ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΑΝΥΣΤΩΝ

1. Εισαγωγικά. Υποθέτουμε ότι ο αναγνώστης γνωρίζει τα περιεχόμενα στην ενότητα "Γραμμικές Μορφές".

Γενικές υποθέσεις – Συμβολισμοί. Ο χώρος, στοιχεία του οποίου χρησιμοποιούμε, είναι ένας γραμμικός (ανυσματικός) χώρος **V** επί ενός σώματος F, συνήθως το σώμα των πραγματικών αριθμών. $\mathbf{V}'$ είναι ο δυϊκός χώρος του **V**, και f^j γραμμικές μορφές που αποτελούν την δυϊκή βάση της τυχούσης βάσεως $\{b_i\}$, $1 \le i \le n$, του **V**.
Έχουμε, λοιπόν, ότι, $f^j(b_i) = \delta_i^j$

Ορισμός. Η βάση των f^j του $\mathbf{V}'$, καλείται ***αντίστροφη βάση*** (reciprocal bases) της βάσης $\{b_i\}$ του **V**.

Φανερά, για το τυχόν $x \in \mathbf{V}$, $x = \chi^i b_i$, ισχύουν οι σχέσεις, $f^j(x) = \chi^j$.

Θα δούμε, τώρα, με πιο τρόπο μεταβάλλεται η δυϊκή βάση, όταν στον χώρο **V**, αλλάξουμε την βάση, από $\{a_i\}$ σε $\{b_i\}$, μέσω ενός μη ιδιάζοντος μετασχηματισμού, (βλέπε ενότητα "Γραμμικές απεικονίσεις" §4, 5) που έχει πίνακα P. Αν ο μετασχηματισμός μας είναι ο $b_i = \rho_i{}^j a_j$, δείξαμε ότι, οι τελικές συντεταγμένες β_j του $x = \beta^j b_j$ συνδέονται με τις αρχικές συντεταγμένες του $x = \alpha^j a_j$ μέσω των σχέσεων $\beta^j = \sigma_1{}^j \alpha^1 + \ldots + \sigma_n{}^j \alpha^n = \sigma_i{}^j \alpha^i$, όπου ο πίνακας $Q = (\sigma_i{}^j)$ είναι ο αντίστροφος του αναστρόφου του πίνακα P. Ισχύουν, δηλαδή, οι σχέσεις $Q = (P^t)^{-1}$, και $P = (Q^t)^{-1}$. Γράφουμε και $(\rho^j{}_\kappa)(\sigma^\kappa{}_i) = \delta_i^j$, ως επίσης $(\rho^\kappa{}_i)(\sigma^j{}_\kappa) = \delta_i^j$.
Ερχόμαστε, τώρα, στον δυϊκό χώρο $\mathbf{V}'$ του **V**. Με g^i θα συμβολίζουμε τα στοιχεία της αντιστρόφου βάσεως της βάσεως $\{b_i\}$, και με f^i τα στοιχεία της αντιστρόφου βάσεως της βάσεως $\{a_i\}$. Εν $\mathbf{V}'$ έχουμε τις σχέσεις $f^i(a_j) = \delta_j^i$ και $g^i(b_j) = \delta_j^i$. Ο γραμμικός μετασχηματισμός της βάσεως $\{f^i\}$ στην βάση $\{g^i\}$, έχει την γενική μορφή $g^\kappa(x) = t_\lambda{}^\kappa f^\lambda(x)$. Θα πρέπει να υπολογίσουμε τα στοιχεία του πίνακα $(t_\lambda{}^\kappa)$. Για τον σκοπό αυτό, εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό T στα στοιχεία f^i και έχουμε ότι, $\delta_\lambda^\kappa = g^\kappa(b_\lambda) = g^\kappa(\rho_\lambda{}^j a_j) = g^\kappa(a_\mu)\rho_\lambda{}^\mu = t_\nu{}^\kappa f^\nu(a_\mu)\rho_\lambda{}^\mu = t_\nu{}^\kappa \rho_\lambda{}^\nu f^\nu(a_\nu) = t_\nu{}^\kappa \rho_\lambda{}^\nu$. Είναι, δηλαδή, $t_\nu{}^\kappa \rho_\lambda{}^\nu = \delta_\lambda^\kappa$. Σε συμβολισμό πινάκων, η σχέση αυτή γράφεται $TP^t = I$ (1).

Σημείωση. Όταν από τους συμβολισμούς με τους δείκτες περνάμε σε συμβολισμούς με πίνακες, θα πρέπει να προσέχουμε αν ο αθροιζόμενος δείκτης αφορά κολώνες ή γραμμές, έτσι ώστε το γινόμενο των πινάκων να είναι δυνατόν. Εδώ, το αθροιζόμενο j στην σχέση $\rho_\lambda{}^j a_j$ αφορά τις γραμμές του πίνακα P και, συνεπώς, ο τελικά σημειούμενος πολλαπλασιασμός, για να είναι δυνατός, πρέπει να γραφεί TP^t, και όχι TP.

Η (1) δίδει και την $T = (P^t)^{-1} = Q$ και άρα, $g^\kappa(x) = \sigma_\lambda{}^\kappa f^\lambda(x)$.

Σημείωση. Σχηματικά, έχουμε την εξής κατάσταση:

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \mathbf{V}\supset \{a_i\} & \rightarrow & \{b_i\}\subset \mathbf{V} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{V}'\supset \{f_i\} & \rightarrow & \{g_i\}\subset \mathbf{V}' \\ & (P^t)^{-1} & \end{array}$$

Όταν, λοιπόν, οι βάσεις στον χώρο **V** αλλάζουν με τον μετασχηματισμό που έχει πίνακα P, οι αντίστροφες βάσεις του δυϊκού χώρου αλλάζουν με έναν μετασχηματισμό, που έχει πίνακα $Q=(P^t)^{-1}$

Την κατάσταση αυτή την χαρακτηρίζουμε λέγοντας ότι "τα ανύσματα του ανυσματικού χώρου μετασχηματίζονται με τον ίδιο τρόπο, ***covariant***, (δείκτες κάτω), τα ανύσματα του δυϊκού χώρου (δείκτες άνω) μετασχηματίζονται με ανάστροφο αντίστροφο τρόπο ***contravariant***." Παρατηρούμε ότι, τα στοιχεία του σώματος F, δεν αλλοιώνονται από τους μετασχηματισμούς αυτούς. Παραμένουν, δηλαδή, ***invariant*** (αναλλοίωτα). Τα μεγέθη αυτά χαρακτηρίζονται ως ***μονόμετρα*** (scalar) μεγέθη.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Έστω ο διανυσματικός χώρος $\mathbf{V}(F)$, $\dim\mathbf{V}=n$, και F^n ο χώρος των συντεταγμένων του. Έστω T ένας μη ιδιάζων γραμμικός μετασχηματισμός του χώρου **V** στον εαυτό του. Το $x\in\mathbf{V}$ απεικονίζεται στο $x'=xT\in\mathbf{V}$. Αν $\overline{b}$ μία βάση του **V**, έχουμε ότι, $b_iT=\rho_i{}^jb_j$ (προστίθενται τα στοιχεία-κολώνες), και γράφουμε ισοδύναμα, $b'=bP$, όπου b ένας $1\times n$ πίνακας, στοιχεία του οποίου είναι τα n $b_i\in\mathbf{V}$ ανύσματα και P ένας $n\times n$ πίνακας, ο πίνακας του T ως προς την βάση $\overline{b}$. Ας δούμε πως μετασχηματίζεται η εικόνα του x στον χώρο F^n. Είναι, $x=\chi^\mu b_\mu=\chi'^\nu b'_\nu$. Άρα, και

$$x=\chi'^\mu b'_\mu=\chi'^\mu b_\mu T=\chi'^1(\rho_1{}^1b_1+\rho_1{}^2b_2+\ldots+\rho_1{}^nb_n)+\chi'^2(\rho_2{}^1b_1+\rho_2{}^2b_2+\ldots+\rho_2{}^nb_n)+\ldots$$
$$\ldots+\chi'^n(\rho_n{}^1b_1+\rho_n{}^2b_2+\ldots+\rho_n{}^nb_n)=$$
$$(\chi'^1\rho_1{}^1+\chi'^2\rho_2{}^1+\ldots+\chi'^n\rho_n{}^1)b_1+\ldots+(\chi'^1\rho_1{}^n+\chi'^2\rho_2{}^n+\ldots+\chi'^n\rho_n{}^n)b_n$$

(προστίθενται τα στοιχεία-γραμμές).

Στον χώρο των συντεταγμένων, λοιπόν, έχουμε την σχέση $\begin{pmatrix}\chi^1\\ \vdots\\ \chi^n\end{pmatrix}=P^t\begin{pmatrix}\chi'^1\\ \vdots\\ \chi'^n\end{pmatrix}$, ή $X=P^tX'$. Αν Q ο αντίστροφος πίνακας του πίνακα P, τότε, $X'=QX$. Άρα και, $Q=(P^t)^{-1}$. **Συμπέρασμα:** Όταν τα στοιχεία του χώρου **V** μετασχηματίζονται κατά covariant τρόπο, τα στοιχεία του χώρου των συντεταγμένων μετασχηματίζονται κατά contra variant τρόπο.

2. Συμβολισμοί, ορολογία. Συνήθως, τα αντικείμενα που θα καλούμε ***τανυστές*** παρίστανται με πίνακες. Θα πρέπει να προσέχουμε όμως, την θέση στην οποία βρίσκονται οι ελεύθεροι δείκτες των στοιχείων τους. Γενικός κανών: Δείκτες κάτω σημαίνει covariant μετασχηματισμός. Δείκτες άνω, σημαίνει contra variant μετασχηματισμός. Τα μονόμετρα μεγέθη δεν έχουν ελεύθερους δείκτες.
Παράδειγμα οι 3×3 πίνακες:

$$(w^{ij})=\begin{pmatrix}w^{11}&w^{12}&w^{13}\\ w^{21}&w^{22}&w^{23}\\ w^{31}&w^{32}&w^{33}\end{pmatrix}\quad (w^i{}_j)=\begin{pmatrix}w^1{}_1&w^1{}_2&w^1{}_3\\ w^2{}_1&w^2{}_2&w^2{}_3\\ w^3{}_1&w^3{}_2&w^3{}_3\end{pmatrix}\quad (w_{ij})=\begin{pmatrix}w_{11}&w_{12}&w_{13}\\ w_{21}&w_{22}&w_{23}\\ w_{31}&w_{32}&w_{33}\end{pmatrix}$$

Είναι ενδεχόμενο, όμως, να εμφανίζονται και τανυστές με περισσότερους δείκτες, όπως για παράδειγμα ο w^{ijk}, ο οποίος είναι ένας $3\times3\times3$, που αντιστοιχεί στους

$$(w^{1jk})=\begin{pmatrix} w^{111} & w^{112} & w^{113} \\ w^{121} & w^{122} & w^{123} \\ w^{131} & w^{132} & w^{133}\end{pmatrix}(w^{2jk})=\begin{pmatrix} w^{211} & w^{212} & w^{213} \\ w^{221} & w^{222} & w^{223} \\ w^{231} & w^{232} & w^{233}\end{pmatrix}(w^{3jk})=\begin{pmatrix} w^{311} & w^{312} & w^{313} \\ w^{321} & w^{322} & w^{323} \\ w^{331} & w^{332} & w^{333}\end{pmatrix}$$

Ο αναγνώστης καταλαβαίνει πλέον τις περιπτώσεις που έχουμε ακόμα πιο πολλούς δείκτες, και μάλιστα να βρίσκονται σε θέσεις πάνω και κάτω.

Το γινόμενο των u^i και v_j, $1\le i,j\le 3$, πινακοποιείται κατά τον προφανή τρόπο:

$$u^iv_j=\begin{pmatrix} u^1v_1 & u^1v_2 & u^1v_3 \\ u^2v_1 & u^2v_2 & u^2v_3 \\ u^3v_1 & u^3v_2 & u^3v_3\end{pmatrix}$$

Στην περίπτωση, που έχουμε επαναλαμβανόμενο δείκτη, αυτός νοείται ότι αθροίζεται και τελικά εξαφανίζεται. Παράδειγμα:

$A^{ij}v_j=\begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ A^{31} & A^{32} & A^{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3\end{pmatrix}$. Εδώ έχουμε να πολλαπλασιάσουμε έναν 3×3 πίνακα επί έναν 1×3. Ο πολλαπλασιασμός αυτός γίνεται κατά τον τρόπο που δείχνουμε:

$$A^{ij}v_j=\begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ A^{31} & A^{32} & A^{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ A^{31} & A^{32} & A^{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A^{11}v_1+A^{12}v_2+A^{13}v_3 \\ A^{21}v_1+A^{22}v_2+A^{23}v_3 \\ A^{31}v_1+A^{32}v_2+A^{33}v_3\end{pmatrix}=B^i$$

Σύμφωνα με την λογική αυτή, είναι σωστό να γράφουμε $A^{ij}v_iv_jw_m=B_m$.

3. Κατασκευή τανυστικού χώρου. Ξεκινάμε την κατασκευή ενός χώρου τανυστών χρησιμοποιώντας δύο ανυσματικούς χώρους **U** και **V**. Θεωρούμε το $\mathbf{U}\times\mathbf{V}$ και θα συμβολίζουμε με uv τα στοιχεία του. Το σύνολο των υποσυνόλων του $\mathbf{U}\times\mathbf{V}$ αποτελεί αυτό που θα καλούμε χώρο τανυστών T. Ένα τυπικό στοιχείο, λοιπόν, του T είναι το $t=\{u_1v_1,\dots,u_\kappa v_\kappa\}$ (1). Εν γένει $uv\neq vu$. Συμφωνούμε αντί της σχέσεως (1), να γράφουμε την $t=u_1v_1+\dots+u_\kappa v_\kappa$. Το uv καλείται και ***συμβολικό γινόμενο*** των u και v, ενώ το t καλείται και ***συμβολικό άθροισμα***. Στο σύνολο T εισάγουμε τις εξής σχέσεις ισοδυναμίας:

1) Δύο συμβολικά αθροίσματα είναι ίσα, με την ίδια έννοια, που δύο σύνολα είναι ίσα. 2) $a(b+c)=ab+ac$, όπου $a,b\in\mathbf{U}$ και $c\in\mathbf{V}$. Επίσης όπου $a,\in\mathbf{U}$ και $b,c\in\mathbf{V}$. 3) $\lambda ab=(\lambda a)b=a(\lambda b)$, όπου $\lambda\in F$, $a,\in\mathbf{U}$ και $b\in\mathbf{V}$.

Οι τρεις αυτές σχέσεις ισοδυναμίας, μας επιτρέπουν τις εξής μεταβολές επί του στοιχείου t: 1) Οιαδήποτε μετάθεση των uv. 2) αντικατάσταση κάποιου uv σύμφωνα με την σχέση ισοδυναμίας 2) και 3) την αντικατάσταση κάποιου uv σύμφωνα με την σχέση ισοδυναμίας 3). Τα στοιχεία t_1 και t_2 του T θα λέγονται ίσα, $t_1=t_2$, τότε και μόνον, αν μέσω κάποιας επιτρεπόμενης μεταβολής, τα σύνολα t_1 και t_2 είναι ίσα.

Στο σύνολο T εισάγουμε μία πρόσθεση και έναν μονόμετρο πολλαπλασιασμό, έτσι ώστε να γίνει αυτό διανυσματικός χώρος. Έτσι, για κάθε $t_1,t_2\in T$ ορίζεται το

$t_1 + t_2 = \{t_1\} \cup \{t_2\}$ και $\lambda t = \lambda u_1 v_1 + \ldots + \lambda u_\kappa v_\kappa$. Παρατηρούμε ότι, το μηδενικό στοιχείο 00 του χώρου T είναι το ζεύγος, που αποτελείται από τα μηδενικά στοιχεία των αντίστοιχων ανυσματικών χώρων.

Ορισμός. Ο έτσι κατασκευασθείς χώρος T, καλείται τανυστικό γινόμενο $T = \mathbf{U} \otimes \mathbf{V}$ των ανυσματικών χώρων **U** και **V**.

Θεωρούμε, τώρα, και τους δυϊκούς χώρους $\mathbf{U}'$ και $\mathbf{V}'$ αντίστοιχα, των **U** και **V** με τις αντίστοιχες αντίστροφες βάσεις.. Αν $t \in T$ και $f \in \mathbf{V}'$, εισάγουμε την εξής πράξη ***contraction*** (από δεξιά) $T \times \mathbf{V}' \ni (uv, f) \to f(v)u = \lambda u \in \mathbf{U}$. Αντίστοιχα, έχουμε και την ***contraction*** (από αριστερά) $\mathbf{U}' \times T \ni (f, uv) \to f(u)v = \lambda v \in \mathbf{V}$. Γράφουμε και $\mathbf{U}' \cdot T$, και λέμε, ότι εκτελούμε μία ***συμπύκνωση*** του τανυστή.
Συνήθως η κατασκευή του τανυστικού χώρου γίνεται πάνω στο $T = \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}$. Τοποθετούμε δείκτες πάνω ή κάτω, ανάλογα με το αν οι μετασχηματισμοί μου είναι contra variant ή covariant. Έτσι, γράφουμε T_0^2 και δηλώνουμε ότι το τανυστικό μας γινόμενο προέρχεται από δύο ίδιους contra variant χώρους, π.χ. χώρους των συντεταγμένων. Το T_2^0 δηλώνει ότι προέρχεται από δύο ίδιους covariant χώρους. Το T_1^1 δηλώνει ότι έχουμε έναν contra και έναν covariant χώρο. Στην περίπτωση αυτή, ισχύει ότι $T_1^1 = \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}' = \mathbf{V}' \otimes \mathbf{V}$. Βέβαια, η γενικότερη μορφή αυτών των συμβόλων είναι η T_q^p, με το προφανές νόημα.

4. Βάση τανυστικού γινομένου. Έστω ο $T = \mathbf{U} \otimes \mathbf{V}$, $\dim \mathbf{U} = m$, $\dim \mathbf{V} = n$, με βάσεις $\bar{u}$ και $\bar{v}$ αντίστοιχα. Αν $b_j \in \mathbf{V}$, $u_i \in \bar{u}$ και $u_1 b_1 + \ldots + u_m b_m = 00$, τότε και $b_j = 0$ για $1 \le j \le m$. Πράγματι, μία contraction από αριστερά, $\mathbf{U}' \cdot T$ εφαρμοζόμενη στην προηγούμενη ισότητα δίδει $f^i(u_j) b_j = b_i = 0$ για όλα τα $1 \le i \le m$.

ΠΡΟΤΑΣΗ. Τα $m \times n$ στοιχεία $u_i v_j \in T$ αποτελούν βάση του T. Άρα $\dim T = mn$.
Απόδειξη. α) Είναι γραμμικά ανεξάρτητα.. Θεωρούμε την $\lambda_{ij} u_i v_j = 00$. Το διπλό αυτό άθροισμα γράφεται και $\sum_i u_i (\sum_j \lambda_{ij} v_j) = 00$, άρα και $\sum_j \lambda_{ij} v_j = 0$, και επειδή τα $v_j \in \bar{v}$, για κάθε i και κάθε j, $\lambda_{ij} = 0$.
β) Παράγουν τον T. Φανερά, για το τυχόν $t \in T$, $t = a_1 b_1 + \ldots + a_\kappa b_\kappa$, επειδή έχουμε ότι $a_\eta = \mu_\eta^\alpha u_\alpha, 1 \le \eta \le \kappa$, $1 \le \alpha \le m$ και $b_\theta = \mu_\theta^\beta v_\beta$, $1 \le \theta \le \kappa$, $1 \le \beta \le n$, μιά και $u_\alpha \in \bar{u}$ αντίστοιχα $v_\beta \in \bar{v}$, είναι και, $t = \tau^{ij} u_i v_j$.

Η παραπάνω πρόταση, ισχύει και για τις περιπτώσεις T_0^2, T_2^0, T_1^1. Τα στοιχεία του χώρου $T_0^2 = \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}$ έχουν την μορφή $\tau^{ij} v_i v_j$, $1 \le i, j \le n$, και καλούνται ***contra variant τανυστές τάξεως δύο επί του χώρου* V**. τ^{ij} είναι οι συντεταγμένες τους ως προς την βάση $\bar{v}$. Τα στοιχεία του χώρου $T_2^0 = \mathbf{V}' \otimes \mathbf{V}'$ έχουν την μορφή $\tau_{ij} f^i f^j$, $1 \le i, j \le n$, και καλούνται ***covariant τανυστές τάξεως δύο επί του χώρου*** $\mathbf{V}'$. τ_{ij} είναι οι συντεταγμένες τους ως προς την αντίστροφη βάση $\bar{f}$. Τέλος κάθε $t \in T_1^1 = \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}'$ έχει την μορφή $t = \tau^i{}_j v_i f^j$ και καλείται μικτός τανυστής τάξεως δύο. Αν θέλουμε να δούμε με ποιο τρόπο αλλάζουν οι συντεταγμένες ενός τανυστή όταν αλλάζει η βάση του χώρου, εργαζόμαστε σύμφωνα με το πού βρίσκονται οι δείκτες, ως εξής:

Για το στοιχείο $t=\tau^{ij}v_iv_j \in T_0^2$, ένας μετασχηματισμός $u_i=\rho_i^{\ j}v_j$ της βάσης $\bar{v}$ στη βάση $\bar{u}$, μετασχηματίζει τις συντεταγμένες του t σύμφωνα με τον κανόνα $\xi^{ij}=\tau^{\alpha\beta}\sigma_\alpha^{\ i}\sigma_\beta^{\ j}$, όπου με ρ σημειώνουμε τα στοιχεία του πίνακα P του μετασχηματισμού $\bar{v}\to\bar{u}$ και με σ τα στοιχεία του πίνακα $Q=(P^t)^{-1}$.

Για το στοιχείο $t=\tau_{ij}f^if^j \in T_2^0$, ένας μετασχηματισμός $g^i=\sigma_j^{\ i}f^j$ της βάσης $\bar{f}$ στη βάση $\bar{g}$, μετασχηματίζει τις συντεταγμένες του t σύμφωνα με τον κανόνα $\xi_{ij}=\tau_{\alpha\beta}\rho^\alpha{}_i\rho^\beta{}_j$, όπου με σ σημειώνουμε τα στοιχεία του πίνακα Q του μετασχηματισμού $\bar{f}\to\bar{g}$ και με ρ τα στοιχεία του πίνακα $P=(Q^t)^{-1}$.

Για το στοιχείο, τέλος, $t=\tau^i{}_jv_if^j \in T_1^1$, ένας μετασχηματισμός $u_i=\rho_i^{\ j}v_j$ της βάσης $\bar{v}$ στη βάση $\bar{u}$ και ένας μετασχηματισμός $g^i=\sigma_j^{\ i}f^j$ της βάσης $\bar{f}$ στη βάση $\bar{g}$, μετασχηματίζει τις συντεταγμένες του t σύμφωνα με τον κανόνα $\xi^i{}_j=\tau^\alpha{}_\beta\sigma_\alpha^{\ i}\rho^\beta{}_j$, όπου με ρ σημειώνουμε τα στοιχεία του πίνακα P του μετασχηματισμού $\bar{v}\to\bar{u}$ και με σ σημειώνουμε τα στοιχεία του πίνακα Q του μετασχηματισμού $\bar{f}\to\bar{g}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. 1) Ο χώρος T_0^0 αποτελείται από το σύνολο των μονόμετρων μεγεθών . 2) Ο χώρος **V** είναι ένας T_0^1 χώρος. Ο χώρος **V**΄ είναι ένας T_1^0 χώρος.

3) Ο χώρος $T_2^0=\mathbf{V}'\otimes\mathbf{V}'$ αποτελείται από στοιχεία της μορφής $(f,g)=\beta_{ij}f^if^j$ Θεωρούμε, τώρα, το $(x,y)\in\mathbf{V}\times\mathbf{V}$. Αν τα x, y έχουν τις εκφράσεις $x=\chi^iv_i$ και $y=\psi^jv_j$, όπου $\bar{v}$ αντίστροφη βάση της $\bar{f}$, τότε, ως γνωστόν, ισχύει ότι $xf^i=\chi^i$ και $yf^j=\psi^j$. Ορίζεται, συνεπώς, η διγραμμική μορφή $w:\mathbf{V}\times\mathbf{V}\to F$ από την σχέση $w(x,y)=(f\otimes g)(x,y)=\beta_{ij}\chi^i\psi^j=f(x)g(y)$.

Είναι, λοιπόν, $w(x,y)=\beta_{ij}(f^i\otimes f^j)(x,y)=\beta_{ij}\chi^i\psi^j$ (1). Ιδιαίτερα, $w(v_i,v_j)=\beta_{ij}$. Το παρακάτω αντιμεταθετικό διάγραμμα διευκρινίζει την κατάσταση στην οποία ευρισκόμεθα.:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{V}\times\mathbf{V}\ni(x,y) \arrow[r, "w"] \arrow[dr, "a"'] & f(x)\,g(y)\in F \\
 & \mathbf{V}'\times\mathbf{V}'\ni(f,g) \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

Η απεικόνιση w είναι μία διγραμμική μορφή, η απεικόνιση a αντιστοιχίζει την βάση του **V,** στην αντίστροφή της βάση του **V**΄, και, τέλος, i είναι ισομορφισμός, που κλείνει το αντιμεταθετικό διάγραμμα . Λόγω αυτού του γεγονότος, μπορούμε να ταυτίσουμε τον χώρο των διγραμμικών μορφών με τον χώρο T_2^0. Η ισότητα (1), αν λάβουμε υπ' όψη τον τρόπο με τον οποίον μετασχηματίζονται οι συντεταγμένες όταν αλλάζουμε την βάση του χώρου, αποδεικνύει ότι, η διγραμμική μορφή $w=\beta_{ij}(f^i\otimes f^j)$ παραμένει αναλλοίωτος ως προς τους μετασχηματισμούς των βάσεων του χώρου (που αποτελούν την ομάδα των μη ιδιαζόντων γραμμικών μετασχηματισμών GL(**V**, n). ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Αυτό, που ουσιαστικά γίνεται εδώ, είναι η απεικόνιση $i:\mathbf{V}'\times\mathbf{V}'=T_2^0\ni(f,g)\to f(x)g(y)\in F$. Την απεικόνιση αυτή, μπορούμε να την λάβουμε και κάνοντας δύο συμπυκνώσεις του τανυστή (f, g), ως εξής: Αν $t=(f,g)=\beta_{ij}f^if^j$, τότε, $x\cdot t\cdot y=\chi^iv_i\cdot t\cdot\psi^jv_j=\beta_{ij}\chi^i\psi^j\in F$

Γράφουμε και $t = f^i \otimes f^j$.
3) Η αντίστοιχος με την παραπάνω διαδικασία, δίδει τον ισομορφισμό $i : \mathbf{V}\times\mathbf{V} = T_0^2 \ni (x,y) \to f(x)g(y) \in F$ με δύο συμπυκνώσεις με τα διανύσματα $f = \xi_i f^i \in \mathbf{V}'$ και $g = \eta_j f^j \in \mathbf{V}'$ ως εξής: $f \cdot t \cdot g = \xi_i f^i \cdot xy \cdot \eta_j f^j = \beta^{ij}\xi_i\eta_j \in F$, όπου β_{ij} είναι η τιμή της διγραμμικής μορφής $w : \mathbf{V}'\times\mathbf{V}' \to F$ επί των στοιχείων της αντιστρόφου βάσεως $\bar{f}$ του $\mathbf{V}'$, δηλαδή, $\beta^{ij} = w(f^i, f^j)$.
Είναι, λοιπόν, $T_0^2 = T_2^0$. Γράφουμε, και, $t = x \otimes y$.
4) Ο χώρος $T_1^1 = \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}'$ αποτελείται από στοιχεία της μορφής $(x, f) = \chi^i \xi_j v_i f^j$. Τον ισομορφισμό $i : \mathbf{V}\times\mathbf{V}' = T_1^1 \ni (x,f) \to \beta_i{}^j \chi^i \xi_j \in F$ τον λαβαίνουμε με δύο συμπυκνώσεις $g\cdot(x,f)\cdot y = g(v_i) f^j(y) = \beta_i{}^j \chi^i \xi_j$, όπου $\beta_i{}^j = w(v_i, f^j)$. Γράφουμε, και, $t = x \otimes f$.

5. Συντεταγμένες τανυστού. Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, αν είναι $T = \mathbf{U} \otimes \mathbf{V}$, με $\dim \mathbf{U} = m$, $\dim \mathbf{V} = n$, και με βάσεις $\bar{u}$ και $\bar{v}$ αντίστοιχα, τότε, το τυχόν στοιχείο $t \in T$ έχει την έκφραση $t = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \beta^{ij} u_i v_j = \beta^{ij} u_i v_j$, (1) με, $u_i \in \bar{u}$ και $v_j \in \bar{v}$, η οποία προκύπτει από την κατασκευή του T και τις βάσεις $\bar{u}$ και $\bar{v}$ των διανυσματικών χώρων **U** και **V** αντίστοιχα. Πράγματι, το $t \in T$ είναι εκ κατασκευής το $t = a_1 b_1 + \ldots + a_\lambda b_\lambda$ όπου $a_\alpha = \mu^i u_i \in \mathbf{U}$ και $b_\beta = v^j v_j \in \mathbf{V}$, και, συνεπώς, το t έχει την έκφραση (1). Στην περίπτωση, που ο T έχει προκύψει από τους χώρους **V** και **V′**, έχουμε, για το $t \in T_0^2 = \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}$ την έκφραση $t = \beta^{ij} v_i v_j$, για το $t \in T_2^0 = \mathbf{V}' \otimes \mathbf{V}'$ την έκφραση $t = \beta_{ij} f^i f^j$, και, τέλος, για το $t \in T_1^1 = \mathbf{V}' \otimes \mathbf{V} = \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}'$ την έκφραση $t = \beta^i{}_j v_i f^j$. Οι εκφράσεις αυτές είναι μονοσήμαντες, για δεδομένη βάση του **V**. Οι συντελεστές β καλούνται συντεταγμένες του t ως προς την βάση που χρησιμοποιούμε Οι συντελεστές αυτοί, αποτελούν τα στοιχεία ενός πίνακα, ο οποίος και ορίζει τον t μέσω των συντεταγμένων του (βλέπε και §2). Η αλλαγή της βάσεως του χώρου **V** έχει ως συνέπεια την αλλαγή των συντελεστών β, έτσι ώστε το t να παραμένει αναλλοίωτο, σύμφωνα με τους κανόνες covariant και contravariant. Έτσι, για τον $t \in T_0^2 = \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}$ έχουμε, για την νέα βάση $\bar{v}'$ του **V**, η οποία συνδέεται με την παλαιά βάση $\bar{v}$ του **V** μέσω των σχέσεων $v_i' = \rho^j{}_i v_j$, με πίνακα $P = (\rho^j{}_i)$, και $v_j = \sigma^i{}_j v_i'$ με πίνακα $Q = (\sigma^i{}_j)$ και $(\rho^j{}_\kappa)(\sigma^\kappa{}_i) = \delta_i^j$, συντελεστές $\beta'^{\kappa\lambda} = \beta^{ij}\sigma^\kappa{}_i\sigma^\lambda{}_j$, όπως προκύπτει από τις ισότητες $t = \beta^{ij} v_i v_j = \beta^{ij}(\sigma^\kappa{}_i v_\kappa')(\sigma^\lambda{}_j v_\lambda') = (\beta^{ij}\sigma^\kappa{}_i\sigma^\lambda{}_j) v_\kappa' v_\lambda'$. Εξ' άλλου, είναι και

$t = \beta'^{\kappa\lambda} v_\kappa' v_\lambda'$, άρα και $\beta'^{\kappa\lambda} = \beta^{ij}\sigma^\kappa{}_i\sigma^\lambda{}_j$.

Το γεγονός ότι ο t παραμένει αναλλοίωτος ως προς τους μετασχηματισμούς αλλαγής βάσης, προκύπτει από τις ισότητες:

$$t = \beta^{\kappa\lambda} v_\kappa' v_\lambda' = (\beta^{\alpha\beta}\sigma^\kappa{}_\alpha\sigma^\lambda{}_\beta)(\rho^\mu{}_\kappa v_\mu)(\rho^\nu{}_\lambda v_\nu) = \beta^{\alpha\beta}(\sigma^\kappa{}_\alpha\rho^\mu{}_\kappa)(\sigma^\lambda{}_\beta\rho^\nu{}_\lambda) v_\mu v_\nu$$
$$= \beta^{\alpha\beta}\delta_\alpha^\mu\delta_\beta^\nu v_\mu v_\nu = \beta^{\mu\nu} v_\mu v_\nu = t$$

Ανάλογα ισχύουν και για τις περιπτώσεις $t \in T_2^0$ και $t \in T_1^1$.

Οι συντεταγμένες του αθροίσματος $s + t \in T$ δύο τανυστών $s, t \in T$, είναι, όπως εύκολα μπορούμε να δούμε, το άθροισμα των συντεταγμένων των s, t. Αν οι s, t, παρίστανται υπό την μορφή πινάκων, έχουμε τότε, όλους τους κανόνες που διέπουν το άθροισμα δύο πινάκων. Το ίδιο ισχύει και για το μονόμετρο γινόμενο $\lambda t \in T$, $\lambda \in F$, $t \in T$. Ας δούμε, τώρα, πως ενεργεί η πράξη συμπύκνωση σε έναν τανυστή, που τον έχουμε με τις συντεταγμένες του.

Για παράδειγμα, έστω ο $t \in T_2^0$, $t = \beta_{ij} f^i f^j$ επί του οποίου εκτελούμε μία από δεξιά συμπύκνωση με το covariant άνυσμα $a = \alpha^i v_i \in \mathbf{V}$. Είναι

$$t \cdot a = (\beta_{ij} f^i f^j) \cdot (\alpha^\kappa v_\kappa) = \beta_{ij} \alpha^\kappa f^i f^j v_\kappa = \beta_{ij} \alpha^\kappa f^i \delta^j_\kappa = \beta_{ij} \alpha^j f^i$$

Το αποτέλεσμα της πράξεως αυτής, είναι το contravariant άνυσμα $(\beta_{ij}\alpha^j) f^i \in \mathbf{V}'$.

Στην περίπτωση, που είναι $t \in T_1^1 = \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}'$ μπορούμε να έχουμε μία συμπύκνωση από τα αριστερά με ένα contravariant άνυσμα και μία συμπύκνωση από τα δεξιά με ένα covariant άνυσμα. Το αποτέλεσμα θα είναι ένα μονόμετρο μέγεθος:

$$f \cdot t \cdot a = (\gamma_\lambda f^\lambda) \cdot (\beta_i^j v_j f^i) \cdot (\alpha^\kappa v_\kappa) = \gamma_\lambda \beta_i^j \alpha^\kappa f^\lambda v_j f^i v_\kappa = \gamma_\lambda \beta_i^j \alpha^\kappa \delta_j^\lambda \delta_\kappa^i = \gamma_j \beta_i^j \alpha^i$$

6. Επαγωγικά, θα ορίσουμε το τανυστικό γινόμενο περισσοτέρων των δύο ανυσματικών χώρων. Έστω, λοιπόν, ότι δίδονται οι γραμμικοί χώροι $\mathbf{V}_i$, $1 \le i \le 3$. Το σύνολο $T = (\mathbf{V}_\alpha \otimes \mathbf{V}_\beta) \otimes \mathbf{V}_\gamma$, $\mathbf{V}_\alpha, \mathbf{V}_\beta, \mathbf{V}_\gamma$, $1 \le \alpha, \beta, \gamma \le 3$ αποτελείται από όλα τα συμβολικά αθροίσματα όλων των συμβολικών γινομένων της μορφής $(ab)c$. Οι δύο σχέσεις ισοδυναμίας που θεσμοθετήθηκαν για το τανυστικό γινόμενο δύο παραγόντων, επεκτείνονται και στην περίπτωση των τριών, με επιπλέον σχέση, την $(ab)c = a(bc)$. Η σχέση αυτή, εξασφαλίζει την ταυτότητα $(\mathbf{V}_\alpha \otimes \mathbf{V}_\beta) \otimes \mathbf{V}_\gamma = \mathbf{V}_\alpha \otimes (\mathbf{V}_\beta \otimes \mathbf{V}_\gamma)$, και μας επιτρέπει να θεωρούμε στοιχεία της μορφής $abc \in T$. Με κάθε $\mathbf{V}_i$, θεωρούμε και τον δυϊκό του $\mathbf{V}^i$, οπότε εν γένει, ένα τανυστικό γινόμενο έχει την μορφή T_q^p, όπου, επαγωγικά, $1 \le p \le m$, και $1 \le p \le n$.

Συνήθως θεωρούμε χώρους της μορφής $T_q^p = \mathbf{V} \otimes \cdots \otimes \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}' \otimes \cdots \otimes \mathbf{V}'$ όπου έχουμε p ανυσματικούς χώρους $\mathbf{V}$ και q $\mathbf{V}'$, δυϊκούς του $\mathbf{V}$. Ένα στοιχείο $t \in T_q^p$ καλείται τανυστής p φορές contravariant και q φορές covariant. Η πρόσθεσις τανυστών που ανήκουν σε διαφορετικά τανυστικά γινόμενα, δεν ορίζεται. Αντίθετα, το γινόμενο ut των στοιχείων $u \in T_{q_1}^{p_1}$, $t \in T_{q_2}^{p_2}$ ορίζεται, και είναι ένα στοιχείο του τανυστικού γινομένου $T_{q_1}^{p_1} \otimes T_{q_2}^{p_2}$. Φανερά, $ut \in T_{q_1}^{p_1} \otimes T_{q_2}^{p_2} = T_{q_1+q_2}^{p_1+p_2}$.

Ένα covariant άνυσμα του T_q^p είναι δυνατόν να υποστεί συμπύκνωση με ένα contravariant άνυσμα του T_q^p. Το αποτέλεσμα της πράξεως αυτής, είναι η δημιουργία ενός μονομέτρου μεγέθους (= στοιχείο του σώματος F), και η αντικατάσταση του T_q^p από τον T_{q-1}^{p-1}. Στην περίπτωση, που $p = q$, η p φορές επανάληψη της πράξης “συμπύκνωση”, οδηγεί στην αντικατάσταση του T_p^p από ένα μονόμετρο μέγεθος.

Μία βάση του T_q^p κατασκευάζεται ως εξής: Θεωρούμε την βάση $\{b_i\}$, $1 \le i \le n$, του $\mathbf{V}$ και $\{f^j\}$, $1 \le j \le n$ του $\mathbf{V}'$. Στην συνέχεια σχηματίζουμε όλα τα τυπικά γινόμενα της μορφής $b_{i_1} \ldots b_{i_p} f^{j_1} \ldots f^{j_q}$, $1 \le i, j \le n$. Το σύνολο των τυπικών αυτών γινομένων, που περιέχει $n \times p \times q \times n$ στοιχεία αποτελεί μία βάση του T_q^p. Το τυχόν στοιχείο $t \in T_q^p$ έχει στην συγκεκριμένη βάση την έκφραση $t = \tau_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p} b_{i_1} \ldots b_{i_p} f^{j_1} \ldots f^{j_q}$. Οι συντελεστές τ καλούνται συντεταγμένες του τανυστή t ως προς τις βάσεις $\{b_i\}$ και

$\{f^j\}$, $1 \le i, j \le n$. Όταν αλλάζουμε βάση, κάθε συντεταγμένη που έχει άνω δείκτη μετασχηματίζεται κατά contravariant τρόπο ενώ κάθε συντεταγμένη που έχει κάτω δείκτη, κατά covariant τρόπο έτσι ώστε, ο τανυστής t να παραμένει αναλλοίωτος. Ο t έχει απλά διαφορετικές εκφράσεις, σε συνάρτηση με τις χρησιμοποιούμενες βάσεις.

Επιτρεπτές πράξεις εν T_q^p: 1. Η πρόσθεση δύο στοιχείων του T_q^p. Αυτή έχει ως αποτέλεσμα ένα στοιχείο του T_q^p, και αν τα στοιχεία αυτά είναι εκφρασμένα στην ίδια βάση, οι συντεταγμένες του αθροίσμα τους είναι το άθροισμα των αντίστοιχων συντεταγμένων. 2. Πολλαπλασιασμός επί μονόμετρο μέγεθος. Δίδει πάλι τανυστή του ιδίου χώρου. Αν $t = \tau^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} b_{i_1} \ldots b_{i_p} f^{j_1} \ldots f^{j_q}$, τότε και $\lambda t = \lambda \tau^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} b_{i_1} \ldots b_{i_p} f^{j_1} \ldots f^{j_q}$, δηλαδή, κάθε συντεταγμένη του, πολλαπλασιάζεται επί λ. 3. Συμπήκνωση. Η πράξη αυτή, έχει ως συνέπεια τανυστή στον χώρο $T_{q-\kappa}^{p-\kappa}$, $\kappa \le$ ελάχιστο των p, q. 4. Τέλος, έχουμε και την πράξη "πολλαπλασιασμός". Κατά τον πολλαπλασιασμό του $r \in T_{q_1}^{p_1}$ με τον $s \in T_{q_2}^{p_2}$ λαβαίνουμε τον $rs \in T_{q_1+q_2}^{p_1+p_2}$. Στην περίπτωση, που $r = \rho^i b_i \in T_0^1 (= \mathbf{V})$ και $s = \sigma^j b_j \in T_0^1 (= \mathbf{V})$, το γινόμενο $rs = \rho^i \sigma^j b_i b_j \in T_0^2$. Φανερά, $rs \ne sr$.

7. Εξωτερικά γινόμενα. Στην ενότητα "Γραμμικές Μορφές" §11 ορίσαμε την πράξη [ ] για δύο γραμμικές μορφές. Θα μεταφέρουμε την πράξη αυτή στα στοιχεία των χώρων T_q^p.

Για στοιχεία a του χώρου T_0^1 θέτουμε $[a] = a$.

Για στοιχεία ab του χώρου T_0^2 θέτουμε $[ab] = \frac{1}{2!}(ab - ba)$.

Για στοιχεία abc του χώρου T_0^3 θέτουμε $[abc] = \frac{1}{3!}(abc + bca + cab - bac - acb - cba)$.

Επαγωγικά, θέτουμε,

$$T_0^m \ni a_1 a_2 \ldots a_m \mapsto [a_1 a_2 \ldots a_m] = \frac{1}{m!} \sum \delta^{p(1) \ldots p(m)}_{1,2,\ldots,m} a_{p(1)} a_{p(2)} \ldots a_{p(m)} \in T_0^m$$

Όπου δ, το δ του Kronecker όπως ορίσθηκε στην §11 της ενότητας "Γραμμικές Μορφές".

Η πράξη αυτή έχει τις ιδιότητες:

1. Είναι γραμμική σε κάθε της παράγοντα. Ισχύει δηληδή,

$$[a_1 \ldots (\lambda b_1 + \mu b_2) \ldots a_m] = \lambda [a_1 \ldots b_1 \ldots a_m] + \mu [a_1 \ldots b_2 \ldots a_m]$$

2. Αντισυμμετρική για κάθε αντιμετάθεση δύο παραγόντων. Ισχύει δηλαδή,

$$[a_1 \ldots b_1 b_2 \ldots a_m] = -[a_1 \ldots b_2 b_1 \ldots a_m]$$

3. Είναι μηδέν, γιά κάθε δύο ίδιους παράγοντες $a \in \mathbf{V}$.

4. Είναι μηδέν, στην περίπτωση που έχουμε γραμμική εξάρτηση ανάμεσα στους παράγοντες.

5. Αν το πλήθος των παραγόντων m είναι μεγαλύτερο από την διάσταση n του χώρου $\mathbf{V}$, τότε και πάλι το αποτέλεσμα της πράξεως αυτής είναι το $0 \in T_0^m$.