ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1. Γραμμικά συστήματα. Μία εξίσωση της μορφής

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \qquad (1)$$

καλείται ***γραμμική εξίσωση*** n μεταβλητών x_i, $1 \le i \le n$, με σταθερό όρο $b \in F$ και συντελεστές $a_i \in F$, όπου το F θα είναι το σώμα των πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών. Τα στοιχεία του F καλούνται και ***μονόμετρα*** μεγέθη. Η ***λύση*** της (1) είναι το σύνολο εκείνων των τιμών s_i των x_i, που καθιστούν την (1) ταυτότητα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Η γραμμική εξίσωση $3x_1 - 5x_2 = 10$ έχει λύση στους πραγματικούς αριθμούς το σύνολο των τιμών $\{s_1, s_2\}$, όπου $\left\{s_1 = \dfrac{5s_2+10}{3},\ s_2 \in \mathbb{R}\right\}$.

Γραμμικό σύστημα είναι ένα σύνολο $m \le n$ γραμμικών εξισώσεων της μορφής (1). Η γενική μορφή ενός γραμμικού συστήματος είναι η

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \qquad (2).$$

Η ***λύση*** (ή το ***σύνολο λύσεων***) του (2) είναι το σύνολο εκείνων των τιμών s_i των x_i, που καθιστούν κάθε μία από τις m γραμμικές εξισώσεις που εμπεριέχονται στο (2), ταυτότητα.
Συστήματα που έχουν $m > n$ θα λέμε ότι έχουν λύση (είναι συμβατά) αν και μόνον αν η λύση που προκύπτει από τις n οποιεσδήποτε εξισώσεις, πληροί και τις υπόλοιπες $m - n$ εξισώσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Το σύστημα

$$\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ x_1 \qquad\ - 4x_3 = -7 \end{array}$$

έχει λύση το σύνολο των τιμών $\{s_1, s_2, s_3\}$, όπου $\left\{s_1 = \dfrac{85}{22} - s_2, s_3 = \dfrac{1}{11} + s_2,\ s_2 \in \mathbb{R}\right\}$

Δύο γραμμικά συστήματα που έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων καλούνται ***ισοδύναμα.***

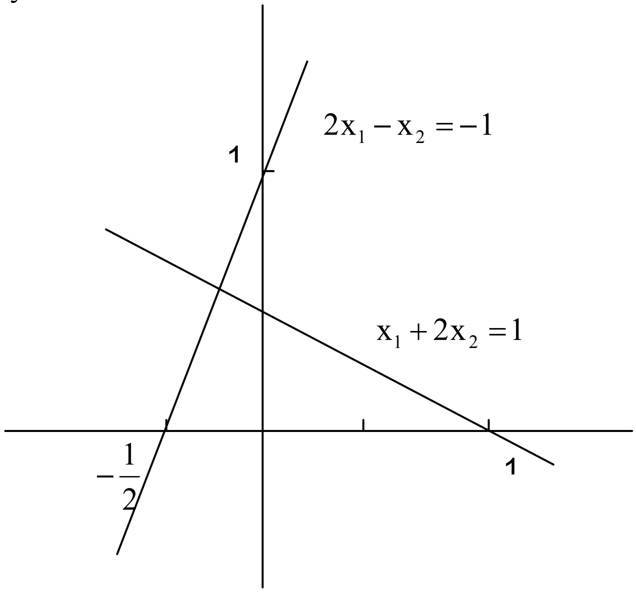
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Να βρεθεί η λύση του συστήματος

$$\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 = -1 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι, κάθε μία από τις παραπάνω δύο εξισώσεις του συστήματος, στο καρτεσιανό επίπεδο απεικονίζει μία ευθεία γραμμή. Το σημείο τομής των ευθειών αυτών, πληροί και τις δύο, και συνεπώς αποτελεί λύση του ανωτέρω συστήματος. Το σημείο αυτό είναι το $(s_1, s_2) = \left(\dfrac{3}{5}, -\dfrac{1}{5}\right)$.

Δύο ευθείες στο επίπεδο είτε τέμνονται, είτε είναι παράλληλες, είτε συμπίπτουν.

Οι τρεις αυτές περιπτώσεις οδηγούν στο συμπέρασμα ότι ένα γραμμικό σύστημα είναι δυνατόν είτε να έχει μία και μοναδική λύση, είτε να μη έχει καμία λύση, είτε να έχει άπειρες λύσεις.



Συμβολισμός. Το σύστημα (2) το γράφουμε ισοδύναμα στην μορφή ενός $m \times n$ πίνακα, ως εξής:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{21} & b_2 \\ & & \cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \quad (3)$$

Ο πίνακας (3) καλείται ***επαυξημένος πίνακας*** (augmented matrix) του συστήματος. Ο πίνακας αυτός, περιέχει όλες τις πληροφορίες που το σύστημα (2) μας παρέχει.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ο 6×3 πίνακας

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

ισοδυναμεί με το σύστημα

$$\begin{aligned} 3x_1 - 9x_2 + 12x_3 - 9x_4 + 6x_5 &= 15 \\ 3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 &= 9 \\ 0x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 &= -5 \end{aligned}$$

2. Στοιχειώδεις πράξεις επί των συστημάτων. Έτσι θα καλούμε εκείνες τις πράξεις που γίνονται ανάμεσα στις εξισώσεις ενός γραμμικού συστήματος, και έχουν σαν αποτέλεσμα να προκύψει σύστημα ισοδύναμο του αρχικού.
Οι πράξεις αυτές είναι οι εξής τρεις:
1. Αλλαγή της σειράς καταγραφής των εξισώσεων του συστήματος (2).
2. Πολλαπλασιασμός μιας εξισώσεως του συστήματος επί μία σταθερά $0 \neq \lambda \in F$.
3. Αντικατάσταση μιας εξισώσεως του συστήματος (2), από το άθροισμα αυτής και κάποιας άλλης εξισώσεως του συστήματος (2).

Το γεγονός ότι ενεργουμένων των πράξεων 1 και 2 επί του συστήματος (2) προκύπτει σύστημα ισοδύναμο του (2), είναι προφανές.
Για την πράξη 3, Έστω ότι έχουμε αντικαταστήσει την δεύτερη εξίσωση του (2) από το άθροισμά της ιδίας με την πρώτη γραμμή. Θα έχει προκύψει, τότε, ένα νέο σύστημα (2') του οποίου, η δεύτερη εξίσωση θα έχει την μορφή

$$(a_{11}+a_{21})x_1+(a_{12}+a_{22})x_2+\ldots+(a_{1n}+a_{2n})x_n=b_1+b_2.$$

Φανερά, αν $\{s_1,s_2,\ldots s_n\}$ σύνολο λύσεων του (2), τότε, αυτό είναι και σύνολο λύσεων του (2'), μια και

$$(a_{11}+a_{21})s_1+(a_{12}+a_{22})s_2+\ldots+(a_{1n}+a_{2n})s_n=$$
$$(a_{11}s_1+a_{12}s_2+\ldots+a_{1n}s_n)+(a_{21}s_1+a_{22}s_2+\ldots+a_{2n}s_n)=b_1+b_2$$

Στον συμβολισμό πινάκων, οι πράξεις αυτές υλοποιούνται ως εξής:
1. Αλλαγή στην θέση μιας γραμμής του πίνακα (3).
2. Πολλαπλασιασμός μιας γραμμής του πίνακα (3) επί μία σταθερά $0\neq\lambda\in F$.
3. Αντικατάσταση μιας γραμμής του πίνακα (3) από το άθροισμα της ιδίας με κάποια άλλη γραμμή. Η άθροιση γίνεται σε τρόπον ώστε στοιχεία που βρίσκονται στην ίδια κολώνα του πίνακα, να παραμένουν στην κολώνα αυτή.
Ο πίνακας που θα προκύψει μετά την διενέργεια στοιχειωδών πράξεων επί ενός πίνακα A, καλείται πίνακας A' ***ισοδύναμος*** του πίνακα A. Γράφουμε και $A'\approx A$. Η σχέση "$\approx$" είναι, φανερά, μία σχέση ισοδυναμίας (βλέπε ενότητα "Σύνολα").

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Στον πίνακα

$$A=\begin{bmatrix}3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15\\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9\\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5\end{bmatrix}$$

καλούμε ℓ_1,ℓ_2,ℓ_3 τις γραμμές του. Αν αντικαταστήσουμε την δεύτερη γραμμή του από το άθροισμα $\ell_1-\ell_2$ λαβαίνουμε τον ισοδύναμο πίνακα

$$\begin{bmatrix}3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15\\ 0 & -2 & 4 & -4 & -2 & 6\\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5\end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη γραμμή επί $\frac{1}{3}$ και την δεύτερη γραμμή επί $-\frac{1}{2}$ προκύπτει ο ισοδύναμος πίνακας

$$\begin{bmatrix}1 & -3 & 4 & -3 & 2 & 5\\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -3\\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5\end{bmatrix}$$

Τέλος, θέτοντας $\ell_3'=-3\ell_2+\ell_3$, προκύπτει ο ισοδύναμος πίνακας

$$\begin{bmatrix}1 & -3 & 4 & -3 & 2 & 5\\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4\end{bmatrix}=A'.$$

Η μορφή του A' όπου το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής ισούται με την μονάδα, όλα δε τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω απ' αυτήν είναι μηδενικά, καλείται

ανοιγμένη μορφή του πίνακα Α. Προφανώς κάθε πίνακας Α έχει μία και μοναδική ανοιγμένη μορφή.

3. Λύση γραμμικών συστημάτων. Η διαδικασία λύσης ενός γραμμικού συστήματος, ουσιαστικά απαντά στα ερωτήματα:
1. Το σύστημα έχει λύση;
2. Αν υπάρχει λύση η λύση αυτή είναι μοναδική ή όχι;
Η απάντηση στα παραπάνω ερωτήματα προκύπτει άμεσα από την μορφή του ανοιγμένου πίνακα Α' του πίνακα Α του γραμμικού συστήματος (2).
Πράγματι, 1. Αν η τελευταία γραμμή του Α' έχει όλα τα στοιχεία της μηδενικά, εκτός του τελευταίου, τότε το σύστημα είναι αδύνατον (δεν έχει λύση). 2. Η τελευταία μη μηδενική γραμμή του πίνακα έχει περισσότερα του ενός μη μηδενικά στοιχεία, το σύστημα έχει λύση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. 1) Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x_2 - 4x_3 &= 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 5x_1 - 8x_2 + 7x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Αλλάζουμε την θέση των γραμμών ένα και τρία,

$$\begin{bmatrix} 5 & -8 & 7 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή επί $\frac{1}{5}$, και στην συνέχεια θέτουμε $\ell'_2 = -2\ell_1 + \ell_2$ και έχουμε τον ισοδύναμο πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & -8/5 & 7/5 & 1/5 \\ 0 & 1/5 & -4/5 & 9/5 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

Τέλος, θέτουμε $\ell'_2 = 5\ell_2$ και $\ell'_3 = -\ell'_2 + \ell_3$, οπότε έχουμε τον ισοδύναμο πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & -8/5 & 7/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & -4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Το σύστημά μας δεν έχει λύση μια και για κανένα $s_3 \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $0s_3 = -1$ είναι δυνατόν να αληθεύει.
2) Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 3 \\ 3x_2 + 5x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -4 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Θέτουμε $\ell'_3 = -3\ell_1 + \ell_3$ οπότε έχουμε τον ισοδύναμο πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & -7 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη γραμμή επί $\frac{1}{3}$ και στην συνέχεια θέτουμε $\ell'_3 = -2\ell_2 + \ell_3$ οπότε έχουμε τον ισοδύναμο πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 11/3 & -23/3 \end{bmatrix}$$

Τέλος, πολλαπλασιάζουμε την τρίτη γραμμή επί $\frac{3}{11}$ και έχουμε,

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -23/11 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας αυτός αντιστοιχεί στο ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 \qquad &= \ 3 \\ 3x_2 + 5x_3 &= \ 3 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 &= -23/11 \end{aligned}$$

που έχει την μοναδική λύση $\left\{ s_3 = -\frac{23}{11}, s_2 = -\frac{82}{33}, s_1 = -\frac{65}{33} \right\}$

3) Να λυθεί το σύστημα.

$$\begin{aligned} -3x_2 - 6x_3 + 4x_4 &= 9 \\ -x_1 - 2x_2 - 1x_3 + 3x_4 &= 1 \\ -2x_1 - 3x_2 \qquad + 3x_4 &= -1 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 9x_4 &= -7 \end{aligned}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix}$$

Την τελευταία γραμμή την καθιστούμε πρώτη.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Θέτουμε $\ell'_2 = \ell_1 + \ell_2$ και $\ell'_3 = 2\ell_1 + \ell_3$ οπότε έχουμε τον ισοδύναμο πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 5 & 10 & -15 & -15 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Θέτουμε $\ell'_2 = \frac{1}{2}\ell_2$ και στην συνέχεια, $\ell'_3 = \ell_3 - 5\ell_2$ και $\ell'_4 = \ell_4 + 3\ell_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Η τελική μορφή του ισοδύναμου πίνακα είναι η

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Η λύση συνεπώς του συστήματός μας είναι η

$$\{s_3 \in \mathbb{R}, s_4 = 0, s_2 = -2s_3 - 3, s_1 = -7s_3 + 5\}$$

Το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων, μια και αυτές εξαρτώνται από την παράμετρο $s_3 \in \mathbb{R}$.

4. Πράξεις επί των διανυσμάτων. Ένας πίνακας που αποτελείται από μία και μόνον κολώνα καλείται και ***διάνυσμα*** (vector). Η γενική μορφή ενός διανύσματος, είναι λοιπόν, η

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

όπου πάντα $u_i \in F$, F για μας το σώμα των πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών. Τα u_i καλούνται ***συντεταγμένες*** του διανύσματος **u**.

Γράφουμε $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ αν και μόνον αν $u_i = v_i \;\; 1 \le i \le n$.

Στην περίπτωση που νοούμε τα $u_i, 1 \le i \le n$, ως συντεταγμένες ενός σημείου P του $\mathbb{R}^n$, το **u** λαβαίνει την μορφή ενός βέλους με αρχή την αρχή των συντεταγμένων και πέρας το σημείο P.

Στο σύνολο των $\mathbf{u} \in F^n$ ορίζουμε τις πράξεις:

1) Πρόσθεση, $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{w} \in F^n$, όπου $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}$

και 2) μονόμετρο πολλαπλασιασμό $\mathbf{w} = \lambda\mathbf{u} \in F^n$, $\lambda \in F$, όπου $w = \begin{bmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{bmatrix}$.

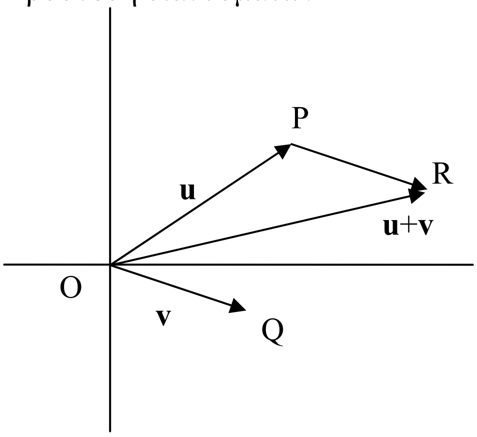
Φανερά, ισχύουν οι παρακάτω αλγεβρικές ιδιότητες των ανωτέρω πράξεων:

1. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$ (αντιμεταθετικός νόμος)
2. $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$ (προσεταιριστικός νόμος)
3. Υπάρχει το (ουδέτερο στοιχείο) $\mathbf{0}$ (όλα τα $u_i = 0$) για το οποίο έχουμε ότι
   $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$, $\quad \mathbf{u}+(-\mathbf{u})=-\mathbf{u}+\mathbf{u}=\mathbf{0}$, $\quad$ όπου $-\mathbf{u}=(-1)\mathbf{u}$.
4. $\lambda(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\lambda\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}$ (επιμεριστικός νόμος)
5. $(\lambda+\mu)\mathbf{u}=\lambda\mathbf{u}+\mu\mathbf{u}$ (επιμεριστικός νόμος)
6. $\lambda(\mu\mathbf{u})=(\lambda\mu)\mathbf{u}$ (προσεταιριστικός νόμος)
7. $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$.

Αν περιοριστούμε στον συνηθισμένο χώρο των τριών διαστάσεων, τότε η πράξη "πρόσθεση" ταυτίζεται με την πρόσθεση που ορίζεται από τον "κανόνα του παραλληλογράμμου" ενώ ο μονόμετρος πολλαπλασιασμός ταυτίζεται με έναν εφελκυσμό του βέλους $\mathbf{u}$ κατά λ μονάδες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

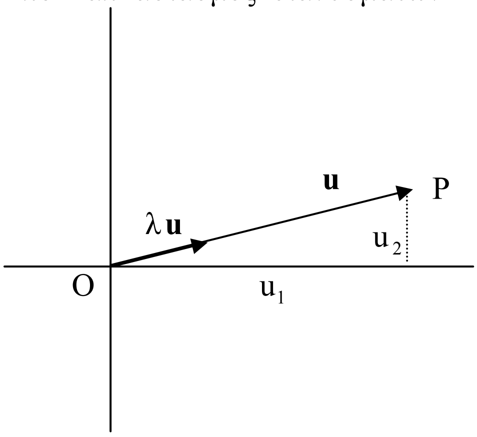
Πρόσθεση διανυσμάτων



Συντεταγμένες του σημείου R,

$R=(u_1+v_1, u_2+v_2)$

Μονόμετρος πολλαπλασιασμός διανυσμάτων



Συντεταγμένες του $P=(u_1, u_2)$

Κλήση φ της ευθείας OP, $\varphi = \tan\frac{u_2}{u_1}$.

5. Γραμμικοί συνδυασμοί. Δοθέντων των διανυσμάτων $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_k \in F^n$, το διάνυσμα που ορίζεται από την σχέση $\mathbf{y}=\lambda_1\mathbf{u}_1+\lambda_2\mathbf{u}_2+\ldots+\lambda_k\mathbf{u}_k \in F^n$ καλείται γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_k$. Λέμε, ακόμα, ότι το $\mathbf{y}$ εκφράζεται γραμμικά από τα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_k$ Το σύνολο όλων των δυνατών συνδυασμών των $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_k$ είναι ένα υποσύνολο S του F^n κλειστό ως προς τις πράξεις "πρόσθεση" και "μονόμετρος πολλαπλασιασμός". (Κλειστό σημαίνει ότι αν είναι $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in S$ τότε και $\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2 \in S$ ως επίσης και αν $\mathbf{y} \in S$, τότε και $\lambda\mathbf{y} \in S$, $\lambda \in F$). Λέμε ότι το σύνολο S παράγεται από τα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_k$. Γράφουμε $S=<\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_k>$ ή και

$S = \text{Span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_k\}$. Το γεωμετρικό ανάλογο του συνόλου S το αντιλαμβανόμεθα από τα παρακάτω παραδείγματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. 1) Εν $F = \mathbb{R}^2$ (το Καρτεσιανό επίπεδο) $S =< \mathbf{u} >$. Το S περιέχει όλα τα διανύσματα της μορφής $\lambda\mathbf{u}, \lambda \in \mathbb{R}$. Τα σημεία P που αντιστοιχούν στα διανύσματα αυτά, βρίσκονται όλα πάνω σε μία ευθεία που περνά από την αρχή των συντεταγμένων και έχει κλήση φ, όπου $\mathbf{tan}\,\varphi = \dfrac{u_2}{u_1}$.

2) Εν $F = \mathbb{R}^3$, $S =< \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 >$. Το S περιέχει όλα τα διανύσματα της μορφής $\lambda\mathbf{u}_1 + \mu\mathbf{u}_2$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τα σημεία P που αντιστοιχούν στα διανύσματα αυτά, βρίσκονται όλα πάνω σε ένα επίπεδο που περνά από την αρχή των συντεταγμένων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Έστω εν $\mathbb{R}^3$ τα διανύσματα $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$. Το $\mathbf{b}$ ανήκει ή δεν ανήκει στο $S =< \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 >$;

Λύση. Απάντηση στο παραπάνω ερώτημα έχουμε αν λύσουμε την γραμμική εξίσωση $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}$ (1). Η (1) δίδει την

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \text{ή και} \quad \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -2x_1 + 5x_2 \\ -5x_1 + 6x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Η (2) λόγω του ορισμού της ισότητας δύο διανυσμάτων είναι ισοδύναμος με το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 7 \\ -2x_1 + 5x_2 &= 4 \\ -5x_1 + 6x_2 &= -3 \end{aligned}$$

Η λύση του συστήματος αυτού είναι η $s_1 = 3$, $s_2 = 2$ και, συνεπώς, $\mathbf{b} \in S$.

Συμβολισμός. Τον επαυξημένο πίνακα του γραμμικού συστήματος (2) της §1, τον συμβολίζουμε και ως εξής: $[\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n\ \mathbf{b}]$ (3).

Παρατήρηση. Μία διανυσματική εξίσωση $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$ (4) έχει το ίδιο σύνολο λύσεων με το σύστημα του οποίου ο επαυξημένος πίνακας είναι ο (3). Ισχύει ότι $\mathbf{b} \in < \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n >$ αν και μόνον αν το γραμμικό σύστημα που έχει τον (3) ως επαυξημένο πίνακα, έχει λύση.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Για ποιες τιμές του λ, $\mathbf{y} \in < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 >$, όπου

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ -\lambda \end{bmatrix}$$

Λύση. $\mathbf{y} \in < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 >$ αν και μόνον αν το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= -4 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &= -3 \\ -2x_1 - 7x_2 + x_3 &= -\lambda \end{aligned}$$

έχει λύση.

Είναι, $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & -4 \\ 1 & 4 & 1 & -3 \\ -2 & -7 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 7 & -8-\lambda \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5-\lambda \end{bmatrix}$ και, συνεπώς, $s_3 = -5-\lambda,\ s_2 = 9+2\lambda,\ s_1 = -34-7\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Για ποιες τιμές του λ, $\mathbf{y} \in < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 >$, όπου

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix},\ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ -\lambda \end{bmatrix}$$

Λύση. $\mathbf{y} \in < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 >$ αν και μόνον αν το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= -4 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= -3 \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= -\lambda \end{aligned}$$

έχει λύση.

Είναι, $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & -4 \\ 1 & 4 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & 2 & -\lambda \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -4 & 8-\lambda \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix}$ και, συνεπώς, για να έχουμε λύση θα πρέπει να λάβουμε $\lambda = 4$. Για την τιμή αυτή του λ, το σύστημα έχει την λύση $s_2 = s_3 - 1,\ s_1 = -8s_3 + 1,\ s_3 \in \mathbb{R}$.

6. Η εξίσωση Ax = b. Αν $A = [\mathbf{a}_1\, \mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n]$ είναι ο $m \times n$ πίνακας του οποίου οι κολώνες αποτελούνται από τα n διανύσματα $\mathbf{a}_i \in F^m$, και αν $\mathbf{x} \in F^n$, ορίζουμε το γινόμενο A**x** ως εξής:

$$A\mathbf{x} = [\mathbf{a}_1\, \mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\, \mathbf{a}_1 + x_2\, \mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\, \mathbf{a}_n$$

Προσοχή! Το διάνυσμα **x** έχει τόσες συντεταγμένες, όσες είναι οι κολώνες του πίνακα A. Αν αυτό δεν συμβαίνει, το γινόμενο A**x** δεν ορίζεται. Το διάνυσμα **b** έχει τόσες συντεταγμένες, όσες είναι οι γραμμές του πίνακα A.

Την εξίσωση A**x** = **b** μπορούμε να την "μεταφράσουμε" ως εξής: Ο πίνακας A δρα επί του διανύσματος **x**, και ως αποτέλεσμα της δράσεως αυτής, λαβαίνουμε το διάνυσμα **b**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$ και $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$. Επειδή ο πίνακας A έχει 3 κολώνες και το διάνυσμα **x** έχει 3 συντεταγμένες, το γινόμενο A**x** ορίζεται και είναι ένα διάνυσμα **b**, που έχει 2 συντεταγμένες.

$$A\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=1\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+4+9\\4+10+18\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14\\32\end{bmatrix}=\mathbf{b}$$

Σύμφωνα με ότι έχουμε πει ως εδώ, μπορούμε να ισχυριζόμαστε ότι ισχύει η πρόταση

Πρόταση. Αν A ένας $m\times n$ πίνακας με κολώνες $\mathbf{a}_1\,\mathbf{a}_2\ldots\mathbf{a}_n$, $a_i\in F^m$ και $\mathbf{b}\in F^m$ η εξίσωση $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ είναι μία άλλη γραφή της $x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+\ldots+x_n\mathbf{a}_n=\mathbf{b}$ η οποία είναι ισοδύναμη με το σύστημα

$$\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=b_2\\ &\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n&=b_m\end{aligned}$$

Η εξίσωση $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ έχει συνεπώς λύση, αν και μόνον αν το **b** είναι δυνατόν να εκφραστεί γραμμικά από τα $\mathbf{a}_1\,\mathbf{a}_2\ldots\mathbf{a}_n$, δηλαδή, αν και μόνον αν $\mathbf{b}\in<\mathbf{a}_1\,\mathbf{a}_2\ldots\mathbf{a}_n>$.

Το γινόμενο A**x** όταν ορίζεται, έχει τις αλγεβρικές ιδιότητες:
1) $A(\mathbf{u}+\mathbf{v})=A\mathbf{u}+A\mathbf{v}$
2) $A(\gamma\mathbf{u})=\gamma(A\mathbf{u})$ $\gamma\in F$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. 1) Έστω $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}-5\\-3\\-6\end{bmatrix}$ και $A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & 1\\ -2 & -8\end{bmatrix}$. Ισχύει ότι $\mathbf{u}\in<\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2>$, όπου $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$ οι κολώνες του πίνακα A ;

Λύση. Θα πρέπει να θέσουμε το **u** στην μορφή $\mathbf{u}=x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2$. Η εξίσωση αυτή, γράφεται και $x_1\begin{bmatrix}3\\1\\-2\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}5\\1\\-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\\-3\\-6\end{bmatrix}$ ή και $\begin{bmatrix}3x_1\\x_1\\-2x_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5x_2\\x_2\\-8x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\\-3\\-6\end{bmatrix}$ ή ακόμα και $\begin{bmatrix}3x_1+5x_2\\x_1+x_2\\-2x_1-8x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\\-3\\-6\end{bmatrix}$. Οδηγούμεθα συνεπώς, σε ένα σύστημα που έχει $m>n$.

Το σύστημα αυτό για να έχει λύση, θα πρέπει η λύση $\{s_1,s_2\}$ που προσδιορίζεται από δύο οποιεσδήποτε εξισώσεις του, να επαληθεύουν και την τρίτη.

Το σύστημα που αποτελείται από την πρώτη και την τρίτη εξίσωση έχει επαυξημένο πίνακα τον $\begin{bmatrix}3 & 5 & -5\\ -2 & -8 & -6\end{bmatrix}$. Ο πίνακας αυτός είναι ισοδύναμος με τον

$\begin{bmatrix} 1 & 5/3 & -5/3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, και συνεπώς έχουμε την λύση $s_1 = -5$ και $s_2 = 2$. Οι τιμές αυτές πληρούν την δεύτερη εξίσωση του συστήματος $x_1 + x_2 = -3$. Άρα το σύστημα είναι συμβατό, και τελικά το διάνυσμα $\mathbf{u} \in < \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 >$.

2) Να λυθεί η εξίσωση $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, με $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$.

Λύση. Έχουμε $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_1 + x_2 \\ 6x_1 - 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$. Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος $\begin{aligned} -3x_1 + \ x_2 &= b_1 \\ 6x_1 - 2x_2 &= b_2 \end{aligned}$ είναι ο $\begin{bmatrix} -3 & 1 & b_1 \\ 6 & -2 & b_2 \end{bmatrix}$, ο οποίος είναι ισοδύναμος με τον $\begin{bmatrix} 1 & -1/3 & b_1/3 \\ 0 & 0 & b_1 + b_2/2 \end{bmatrix}$. Το σύστημα έχει λύση τότε και μόνον τότε, όταν $2b_1 = -b_2$. Στην περίπτωση αυτή $\mathbf{b} = \lambda\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι όλες οι λύσεις $\mathbf{b}$ της $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, αποτελούν στο καρτεσιανό επίπεδο μία ευθεία διερχομένη από την αρχή των συντεταγμένων και με κλίση $\varphi = -26.56^\circ$.

3) Να λυθεί η εξίσωση $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, με $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$.

Λύση. Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος που αντιστοιχεί στην $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ είναι ο $\begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 7 \\ -3 & -2 & 4 & -1 \\ 6 & 1 & -8 & -4 \end{bmatrix}$, που είναι ισοδύναμος του $\begin{bmatrix} 1 & 5/3 & -4/3 & 7/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Η λύση του συστήματος είναι η $\{s_1 = -1 + 4s_3/3, s_2 = 2, s_3 = \lambda \in \mathbb{R}\}$. Το διάνυσμα $\mathbf{x}$ που αποτελεί λύση της $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ είναι το $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 + 4\lambda/3 \\ 2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Θέτουμε

$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, οπότε το $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \lambda\mathbf{v}$.

Το γεωμετρικό ανάλογο της $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \lambda\mathbf{v}$, είναι μία ευθεία παράλληλος της ευθείας $\ell = \lambda\mathbf{v}$, που διέρχεται από το σημείο $\mathbf{p}$ (μεταφορά της ℓ κατά $\mathbf{p}$) . Το διάνυσμα $\mathbf{p}$ καλείται και ειδική ή ***μερική λύση*** της εξισώσεως. $\mathbf{p} + \lambda\mathbf{v}$ είναι η ***γενική λύση*** της εξισώσεως.

7. Ομογενή γραμμικά συστήματα. Έτσι καλούνται τα συστήματα που αντιστοιχούν στην εξίσωση $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Η εξίσωση αυτή έχει πάντα λύση την $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Το ερώτημα που τίθεται είναι αν έχει, και κάτω από ποιες συνθήκες, και λύσεις $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Η απάντηση στο ερώτημα αυτό, δίδεται από την μορφή που λαβαίνει ο ισοδύναμος πίνακας του ομογενούς συστήματος. Αν αυτός τελικά περιέχει μία γραμμή που όλα της τα στοιχεία είναι μηδενικά, τότε το σύνολο λύσεων του συστήματος περιέχει μία τουλάχιστον παράμετρο, και, συνεπώς, έχει άπειρο πλήθος μη μηδενικών λύσεων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Να λυθεί το σύστημα που αντιστοιχεί στην εξίσωση $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, όπου $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$.

Λύση. Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 7 & 0 \end{bmatrix}$. Ο πίνακας αυτός είναι ισοδύναμος του $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Η λύση του συστήματος είναι συνεπώς η $\{s_1 = 5s_3, s_2 = s_3, s_3 = \lambda \in \mathbb{R}\}$. Άρα και $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5\lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{bmatrix} = \lambda\,\mathbf{v}$, όπου $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Παρατήρηση. 1) Το σύνολο λύσεων της $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ περιλαμβάνει πάντα και το διάνυσμα **0.** 2) Η γενική λύση της $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ αποτελείται από μία μερική λύση **p** συν την γενική λύση της ομογενούς $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

8. Γραμμική εξάρτηση. Το σύνολο S των διανυσμάτων $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_k \in F^n$ καλείται ***σύνολο γραμμικά εξαρτημένο***, αν και μόνον αν υπάρχουν $\lambda_i \in F$, $1 \le i \le k$, όχι όλα μηδενικά, έτσι ώστε $\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{u}_k = \mathbf{0}$ (1). Το σύνολο S καλείται σύνολο ***γραμμικά ανεξάρτητο***, αν και μόνον αν δεν είναι σύνολο γραμμικά εξαρτημένο. Το S είναι λοιπόν γραμμικά ανεξάρτητο αν και μόνον αν η $\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{u}_k = \mathbf{0}$ συνεπάγεται την $\lambda_i = 0,\ 1 \le i \le k$. Η (1) γράφεται ισοδύναμα και στην μορφή $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ όπου $A = [u_1\ u_2 \ldots u_k]$ και $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix}$. Το σύνολο S είναι γραμμικά εξαρτημένο (αντ. ανεξάρτητο) αν και μόνον αν η ομογενής εξίσωση $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει (αντ. δεν έχει) και λύσεις διαφορετικές της μηδενικής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. 1) Το σύνολο $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ είναι ναι ή όχι γραμμικά εξαρτημένο; όπου $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}$.

Λύση. Ελέγχουμε αν η σχέση $x_1\begin{bmatrix}3\\-1\\1\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}4\\-7\\3\\2\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}3\\7\\-2\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ ισχύει για τιμές των $x_i \neq 0,\ 1\leq i\leq 3$, και εξετάζουμε τον επαυξημένο πίνακα του αντίστοιχου συστήματος (Προσοχή! το σύστημα έχει τρεις αγνώστους και τέσσερις εξισώσεις). Είναι

$$\begin{bmatrix}3 & 4 & 3 & 0\\-1 & -7 & 7 & 0\\1 & 3 & -2 & 0\\0 & 2 & -6 & 0\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1 & 4/3 & 1 & 0\\0 & 1 & -24/17 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Το ισοδύναμο σύστημα είναι το

$$\begin{aligned}3x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 0\\ 17x_2 - 24x_3 &= 0\\ x_3 &= 0\end{aligned}$$

Το οποίο έχει φανερά, μόνο την μηδενική λύση. Η $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ έχει, λοιπόν, μόνο την μηδενική λύση. Άρα το σύνολο S είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

2) Το σύνολο $S=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_4\}$ είναι ναι ή όχι γραμμικά εξαρτημένο;

όπου $\mathbf{u}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\1\end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-2\\0\end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_3=\begin{bmatrix}0\\3\\1\\-1\end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_4=\begin{bmatrix}4\\-1\\1\\3\end{bmatrix}$.

Λύση. Σχηματίζουμε την εξισώσει $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ και εξετάζουμε τον επαυξημένο πίνακα του αντίστοιχου συστήματος. Είναι

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 4 & 0\\-1 & 0 & 3 & -1 & 0\\0 & -2 & 1 & 1 & 0\\1 & 0 & -1 & 3 & 0\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 4 & 0\\0 & 1 & 3 & 3 & 0\\0 & 0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Η $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ έχει και μη μηδενικές λύσεις. Άρα το σύνολο S είναι γραμμικά εξαρτημένο. Η σχέση εξαρτήσεως είναι η

$$x_1\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\1\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}1\\0\\-2\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}0\\3\\1\\-1\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}4\\-1\\1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\ \text{όπου } \mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\lambda\\0\\-\lambda\\\lambda\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}-4\\0\\-1\\1\end{bmatrix}.$$

Ένα σύνολο $S=\{\mathbf{v}\}$ που αποτελείται από ένα και μόνον στοιχείο, είναι σύνολο γραμμικά ανεξάρτητο αν και μόνον αν $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$.

Ένα σύνολο $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}$ $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\neq\mathbf{0}$, είναι γραμμικά εξαρτημένο, αν και μόνον αν το ένα είναι πολλαπλάσιο του άλλου. Πράγματι, έστω το S γραμμικά εξαρτημένο. Ισχύει τότε ότι $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ με τουλάχιστον ένα απ' τα $x_1, x_2 \neq 0$. Έστω το $x_1 \neq 0$. Μα, τότε είναι και $\mathbf{v}_1 = -\frac{x_2}{x_1}\mathbf{v}_2$.

Επειδή ο ορισμός της γραμμικής εξαρτήσεως αφορά σύνολο S, μπορούμε πάντα να αριθμήσουμε κατά τέτοιο τρόπο τα στοιχεία του συνόλου, ώστε αυτά με τον μικρότερο δείκτη να έχουν μη μηδενικό συντελεστή, και να προηγούνται των στοιχείων με μεγαλύτερο δείκτη, τα οποία ενδεχομένως να έχουν μηδενικό συντελεστή, στην σχέση της γραμμικής εξαρτήσεώς τους. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι ένα γραμμικά εξαρτημένο σύνολο έχει πάντα συντελεστή $x_1 \neq 0$.

Ένα γραμμικά εξαρτημένο S σύνολο παραμένει γραμμικά εξαρτημένο, οσαδήποτε διανύσματα και αν προσθέσουμε σ' αυτό. Πράγματι, η σχέση της γραμμικής εξαρτήσεως δεν αλλάζει, αν σ' αυτήν τα νέα στοιχεία που προσθέσαμε στο S έχουν όλα συντελεστή μηδέν.

Ένα σύνολο S το οποίο περιέχει ως στοιχείο το μηδενικό διάνυσμα, ($\mathbf{0} \in S$) είναι πάντα γραμμικά εξαρτημένο, μια και το $\{\mathbf{0}\}$ είναι σύνολο γραμμικά εξαρτημένο.

Όταν δίδεται ένα σύνολο S γραμμικά εξαρτημένο τότε πάντα, κάποιο στοιχείο του συνόλου εκφράζεται γραμμικά συναρτήσει των υπολοίπων στοιχείων του. Συνήθως η αρίθμηση των στοιχείων του S καθιστά αυτό πρώτο, στην καταγραφή της γραμμικής έκφρασης.

Ένα σύνολο γραμμικά εξαρτημένο, που δεν είναι το $\{\mathbf{0}\}$, περιέχει το λιγότερο δύο μη μηδενικά διανύσματα, μια και το $\{\mathbf{v}\}$ είναι σύνολο γραμμικά ανεξάρτητο.

ΠΡΟΤΑΣΗ. Έστω το $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$, όπου $1 \le i \le p$, $\mathbf{u}_i \in F^n$. Το S είναι γραμμικά εξαρτημένο αν $p > n$.

Απόδειξη. Έστω $A = [u_1\ u_2 \ldots u_p]$. Ο A είναι τότε ένας $n \times p$ πίνακας και η εξίσωση $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ αντιστοιχεί σε σύστημα που έχει περισσότερους αγνώστους από εξισώσεις. Αναγκαστικά έχει συνεπώς και μη μηδενικές λύσεις. Το S είναι, συνεπώς, γραμμικά εξαρτημένο.

9. Γραμμικοί Μετασχηματισμοί. (Γενικά για τις συναρτήσεις βλέπε ενότητα "Σύνολα"). Μία απεικόνιση $T : F^n \to F^m$ θα καλείται ***γραμμική απεικόνιση*** ή ***γραμμικός μετασχηματισμός,*** αν και μόνον αν έχει τις ιδιότητες:
1) $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ 2) $T(\lambda\mathbf{u}) = \lambda T(\mathbf{u}),\ \lambda \in F$.

ΠΡΟΤΑΣΗ. Η εικόνα του $\mathbf{0} \in F^n$ είναι το $\mathbf{0} \in F^m$.
Απόδειξη. Είναι $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x} \in F^n$. Άρα και $T(\mathbf{x}+\mathbf{0}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{0}) = T(\mathbf{x}) \in F^m$.

ΠΡΟΤΑΣΗ. Ένας γραμμικός μετασχηματισμός είναι ένα προς ένα αν το στοιχείο που απεικονίζεται στο **0**, είναι μοναδικό.
Απόδειξη. Έστω ότι ο T δεν είναι ένα προς ένα. Τότε το $\mathbf{y} \in T(F^n)$ είναι εικόνα δύο τουλάχιστον στοιχείων του F^n. Έστω αυτά $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$, δηλαδή, $T(\mathbf{x}_1) = \mathbf{y} = T(\mathbf{x}_2)$. Ισχύει ότι $T(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = T(\mathbf{x}_1) - T(\mathbf{x}_2) = \mathbf{0}$, άρα $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Η δράση του πίνακα A επί του διανύσματος **x** (βλέπε §6) είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Έστω ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 3 & 5\\ -1 & 7\end{bmatrix}$. Ο πίνακας αυτός είναι δυνατόν να δρα πάνω σε διανύσματα $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$, μια και τότε ορίζεται η πράξη A**x**. Αποτέλεσμα αυτής της δράσης, είναι το διάνυσμα $\mathbf{y}=x_1\begin{bmatrix}1\\ 3\\ -1\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}-3\\ 5\\ 7\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$. Ο πίνακας A είναι ένας μετασχηματισμός $A: F^2\to F^3$. Το ότι το **y** είναι μονοσήμαντα ορισμένο, προκύπτει από το μονοσήμαντο των πράξεων βάσει των οποίων τούτο ορίζεται.

Ερωτήματα. 1) Η απεικόνιση A είναι εντός ή επί; 2) Η A είναι ένα προς ένα; 3) Η απεικόνιση A έχει αντίστροφη απεικόνιση;

Απαντήσεις. 1) Φανερά, $\mathbf{y}\in<\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2>$, όπου $\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\ 3\\ -1\end{bmatrix}$ και $\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}-3\\ 5\\ 7\end{bmatrix}$. Το διάνυσμα $\begin{bmatrix}b_1\\ b_1\\ 0\end{bmatrix}\notin<\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2>$ μια και η $x_1\begin{bmatrix}1\\ 3\\ -1\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}-3\\ 5\\ 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_1\\ 0\end{bmatrix}$ ή το σύστημα $\begin{matrix}x_1-3x_2=b_1\\ 3x_1+5x_2=b_1\\ -x_1+7x_2=0\end{matrix}$ απ' όπου $s_1=7s_2$, $26s_2=b_1$, $4s_2=b_1$ δεν έχει λύση. Συνεπώς, $<\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2>\subset\mathbb{R}^3$, δηλαδή, η απεικόνιση είναι εντός.

2) Για να δείξουμε ότι η απεικόνιση A είναι ένα προς ένα, αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ έχει μοναδική λύση, την μηδενική.

Η $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ είναι ισοδύναμη με το σύστημα $\begin{matrix}x_1-3x_2=0\\ 3x_1+5x_2=0\\ -x_1+7x_2=0\end{matrix}$, το οποίο προφανώς έχει την μηδενική λύση και μόνον.

3) Το γεγονός ότι η A είναι ένα προς ένα, εξασφαλίζει την ύπαρξη της αντιστρόφου απεικονίσεως.

Ερωτήματα του είδους "υπάρχει αρχέτυπο **x** του οποίου η εικόνα είναι τι **b**;" είναι ισοδύναμα με την αναζήτηση λύσης της εξισώσεως $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ. Η εικόνα $T(S)\subset F^m$ ενός γραμμικά εξαρτημένου συνόλου $S\subset F^n$ είναι σύνολο γραμμικά εξαρτημένο. Η εικόνα ενός γραμμικά ανεξάρτητου συνόλου $S\subset F^n$ είναι σύνολο γραμμικά ανεξάρτητο αν ο μετασχηματισμός T είναι ένα προς ένα. Στην περίπτωση αυτή, αν $T(S)\subset F^m$ σύνολο γραμμικά ανεξάρτητο, και το $S\subset F^n$ θα είναι σύνολο γραμμικά ανεξάρτητο.

Απόδειξη. Έστω ο γραμμικός μετασχηματισμός $T: F^n\to F^m$ και $S\subset F^n$ σύνολο γραμμικά εξαρτημένο. Υπάρχει τότε η γραμμική έκφραση $\lambda_1\mathbf{u}_1+\lambda_2\mathbf{u}_2=\mathbf{0}$ ανάμεσα σε δύο τουλάχιστον μη μηδενικά στοιχεία του S, με $\lambda_1,\lambda_2\neq 0$. Άρα και, $\lambda_1T(\mathbf{u}_1)+\lambda_2T(\mathbf{u}_2)=\mathbf{0}$ (1). Στην περίπτωση που $T(\mathbf{u}_1)=T(\mathbf{u}_2)=\mathbf{0}$, η εικόνα

$T(S)=\{\mathbf{0}\}$ και, συνεπώς είναι σύνολο γραμμικά εξαρτημένο. Στην περίπτωση, που έστω το $T(\mathbf{u}_1)\neq\mathbf{0}$, με $T(\mathbf{u}_2)=\mathbf{0}$ η σχέση γραμμικής εξαρτήσεως απεικονίζεται στην σχέση $\lambda_1 T(\mathbf{u}_1)=\mathbf{0}$. Υποθέσαμε, όμως, ότι $\lambda_1\neq 0$. Υποχρεωτικά, λοιπόν, αν ισχύει η (1) θα είναι και $T(\mathbf{u}_1)=\mathbf{0}$.

Έστω, τώρα, το $S=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_k\}\subset F^n$ σύνολο γραμμικά ανεξάρτητο. Η σχέση $\lambda_1\mathbf{u}_1+\lambda_2\mathbf{u}_2+\ldots+\lambda_k\mathbf{u}_k=\mathbf{0}$ συνεπάγεται ότι $\lambda_i=0,\ 1\leq i\leq k$. Άρα, και

$T(\lambda_1\mathbf{u}_1+\lambda_2\mathbf{u}_2+\ldots+\lambda_k\mathbf{u}_k)=\lambda_1 T(\mathbf{u}_1)+\lambda_2 T(\mathbf{u}_2)+\ldots+\lambda_k T(\mathbf{u}_k)=\mathbf{0},\ \lambda_i=0,\ 1\leq i\leq k$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.1) Έστω $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, ο οποίος ορίζεται από την σχέση

$$\mathbb{R}^3\ni\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2.$$

Ο μετασχηματισμός αυτός είναι γραμμικός, και καλείται προβολή του $\mathbb{R}^3$ στο $\mathbb{R}^2$.

2) Ο $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, ο οποίος ορίζεται από την σχέση $\mathbf{x}\mapsto\mathbf{x}+\mathbf{p}$ δεν είναι γραμμικός μετασχηματισμός.

3) Ο $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, ο οποίος ορίζεται από την σχέση $\mathbf{x}\mapsto\lambda\mathbf{x},\ \lambda\in F$ είναι γραμμικός μετασχηματισμός.

4) Ο $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, ο οποίος ορίζεται από την σχέση

$$\mathbb{R}^2\ni\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}x_1(\cos\varphi)-x_2(\sin\varphi)\\x_1(\sin\varphi)+x_2(\cos\varphi)\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$$

$\varphi\in F$ είναι γραμμικός μετασχηματισμός.

Πράγματι, αν $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^2$, ισχύει ότι

$$\lambda\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\mapsto\lambda\begin{bmatrix}x_1(\cos\varphi)-x_2(\sin\varphi)\\x_1(\sin\varphi)+x_2(\cos\varphi)\end{bmatrix},\quad \mu\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\mapsto\mu\begin{bmatrix}y_1(\cos\varphi)-y_2(\sin\varphi)\\y_1(\sin\varphi)+y_2(\cos\varphi)\end{bmatrix}$$

συνεπώς,

$$\lambda\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\mu\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}\lambda x_1(\cos\varphi)-\lambda x_2(\sin\varphi)+\mu y_1(\cos\varphi)-\mu y_2(\sin\varphi)\\\lambda x_1(\sin\varphi)+\lambda x_2(\cos\varphi)+\mu y_1(\sin\varphi)+\mu y_2(\cos\varphi)\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}(\lambda x_1+\mu y_1)(\cos\varphi)-(\lambda x_2+\mu y_2)(\sin\varphi)\\(\lambda x_1+\mu y_1)(\sin\varphi)+(\lambda x_2+\mu y_2)(\cos\varphi)\end{bmatrix}$$

εξ άλλου

$$\begin{bmatrix}\lambda x_1+\mu y_1\\\lambda x_2+\mu y_2\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}(\lambda x_1+\mu y_1)(\cos\varphi)-(\lambda x_2+\mu y_2)(\sin\varphi)\\(\lambda x_1+\mu y_1)(\sin\varphi)+(\lambda x_2+\mu y_2)(\cos\varphi)\end{bmatrix}$$

Άρα, $\lambda T(\mathbf{x})+\mu T(\mathbf{y})=T(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y})$.

10. Ο πίνακας ενός γραμμικού μετασχηματισμού. Σε κάθε γραμμικό μετασχηματισμό $T:F^n\to F^m$, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε έναν πίνακα A, σε τρόπο ώστε $T(\mathbf{x})=A\mathbf{x}$. Πράγματι, έστω το διάνυσμα $\mathbf{x}\in F^n$,

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}+\ldots+x_n\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}=x_1\,\mathbf{e}_1+x_2\,\mathbf{e}_2+\ldots+x_n\,\mathbf{e}_n$$

Άρα και $T(\mathbf{x})=x_1T(\mathbf{e}_1)+x_2T(\mathbf{e}_2)+\ldots+x_nT(\mathbf{e}_n)$. Αρκεί συνεπώς, να λάβουμε ως πίνακα A τον $A=[T(\mathbf{e}_1),T(\mathbf{e}_2),\ \ldots\ ,T(\mathbf{e}_n)]$. Ο A καλείται ***καθιερωμένος πίνακας*** (standard matrix) του γραμμικού μετασχηματισμού T και είναι μοναδικός.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Να βρεθεί ο καθιερωμένος πίνακας του μετασχηματισμού

$$\mathbb{R}^3\ni\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}2x_2-x_3\\x_1+x_2-x_3\\x_1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$$

Είναι, $\mathbf{x}=x_1\,\mathbf{e}_1+x_2\,\mathbf{e}_2+x_3\,\mathbf{e}_3$, οπότε και $T(\mathbf{x})=x_1T(\mathbf{e}_1)+x_2T(\mathbf{e}_2)+x_3T(\mathbf{e}_3)$.

Όμως, $T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$, $T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$, $T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\end{bmatrix}$. Άρα $A=\begin{bmatrix}0&2&-1\\1&1&-1\\1&0&0\end{bmatrix}$

11. Άλγεβρα πινάκων. (Βλέπε και ενότητα ΠΙΝΑΚΕΣ).

Συμβολισμός. Όταν γράφουμε $A=[\mathbf{a}_1\,\mathbf{a}_2\ldots\mathbf{a}_n]$ νοούμε ότι ο $m\times n$ πίνακας A αποτελείται από τα n διανύσματα $\mathbf{a}_j\in F^m, 1\le j\le n$, που είναι και οι κολώνες του πίνακα. Γράφουμε ακόμα και $A=(a_{ij}), 1\le i\le m, 1\le j\le n, a_{ij}\in F$.

Ορίζουμε την πρόσθεση δύο $m\times n$ πινάκων ως εξής:

$A+B=[a_1\,a_2\ldots a_n]+[b_1\,b_2\ldots b_n]=[a_1+b_1\ a_2+b_2\ldots a_n+b_n]$.

Ισοδύναμα, $A+B=(a_{ij}+b_{ij})$.

Ορίζουμε τον μονόμετρο πολλαπλασιασμό λA του πίνακα A επί το μονόμετρο $\lambda\in F$, ως εξής: $\lambda A=[\lambda a_1\,\lambda a_2\ldots\lambda a_n]$. Ισοδύναμα, $\lambda A=(\lambda a_{ij})$.

Ισχύουν οι σχέσεις:

1) $A+(B+C)=(A+B)+C$ (προσεταιριστικός νόμος)

2) $A+B=B+A$ (αντιμεταθετικός νόμος)

3) Υπάρχει ο μηδενικός πίνακας $O=(0_{ij}), 1\le i\le m, 1\le j\le n, 0\in F$, με $A+O=A$

4) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B,\ \lambda\in F$ (επιμεριστικός νόμος)

5) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A\ \ \lambda,\mu\in F$ (επιμεριστικός νόμος)

6) $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A\ \ \lambda,\mu\in F$ (προσεταιριστικός νόμος)

Θα ορίσουμε, τώρα, και το γινόμενο AB δύο πινάκων A και B, έτσι ώστε να είναι εκείνος ο πίνακας, η δράση του οποίου πάνω στο διάνυσμα $\mathbf{x}\in F^k$ συμπίπτει με την σύνθεση των δράσεων των A και B. Για την σύνθεση των απεικονίσεων βλέπε ενότητα "Σύνολα" §6. Όπως σημειώνουμε εκεί, το γινόμενο δύο απεικονίσεων δεν ορίζεται πάντα. Έτσι και εδώ αν ο B είναι ένας $m\times k$ πίνακας που δρα επί του $\mathbf{x}\in F^k$ (που ουσιαστικά συμπεριφέρεται σαν ένας $k\times 1$ πίνακας), θα λάβουμε ένα διάνυσμα $\mathbf{y}\in F^m$ (ή έναν $m\times 1$ πίνακα). Για να μπορεί να δράση ο πίνακας A επί του

y, θα πρέπει να είναι $k\times m$. Αν λοιπόν, $B=[\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2 \ldots \mathbf{b}_k]$, $A=[\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m]$, τότε, προκύπτει ότι έχουμε $B\mathbf{x}=[x_1\mathbf{b}_1+x_2\ \mathbf{b}_2+\ldots+x_k\mathbf{b}_k]$ και, λόγω γραμμικότητας, $A(B\mathbf{x})=[x_1A\mathbf{b}_1+x_2A\mathbf{b}_2+\ldots+x_kA\mathbf{b}_k]$. Το γινόμενο συνεπώς AB ορίζεται ως ο $m\times k$ πίνακας $AB=[A\mathbf{b}_1\ A\mathbf{b}_2 \ldots A\mathbf{b}_k]$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ και $B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\end{bmatrix}$, $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3\end{bmatrix}$.

Δράση του B επί του **x**: $B\mathbf{x}=x_1\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21}\end{bmatrix}+x_1\begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22}\end{bmatrix}+x_1\begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23}\end{bmatrix}$.

Δράση του A επί του **y**: $A(B\mathbf{x})=x_1A\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21}\end{bmatrix}+x_2A\begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22}\end{bmatrix}+x_3A\begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23}\end{bmatrix}$ ή

$$A(B\mathbf{x})=x_1\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21}\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22}\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23}\end{bmatrix} \text{ ή}$$

$$A(B\mathbf{x})=x_1\left(b_{11}\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21}\end{bmatrix}+b_{21}\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22}\end{bmatrix}\right)+x_2\left(b_{12}\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21}\end{bmatrix}+b_{22}\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22}\end{bmatrix}\right)+x_3\left(b_{13}\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21}\end{bmatrix}+b_{23}\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22}\end{bmatrix}\right)$$

$$=\left(\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2\end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι τον πίνακα AB τον γράφουμε και ως

$$AB=\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{2} a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{2} a_{1j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{2} a_{1j}b_{j3} \\ \sum_{j=1}^{2} a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{2} a_{2j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{2} a_{2j}b_{j3}\end{bmatrix}=[c_{ij}]$$

όπου $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}=\sum_{r=1}^{2} a_{ir}b_{rj}$, $1\le i\le 2$, $1\le j\le 3$.

Το παράδειγμα αυτό, δείχνει ότι, αν ο A είναι ένας $m\times k$ πίνακας και ο B ένας $k\times n$ πίνακας, τότε το γινόμενό τους ορίζεται και είναι ο $m\times n$ πίνακας $C=[c_{i,j}]$, όπου το $c_{ij}=\sum_{r=1}^{k} a_{ir}b_{rj}$.

Ισχύουν οι σχέσεις:
1) $A(BC)=(AB)C$ (προσεταιριστικός νόμος)
2) $A(B+C)=AB+AC$ και $(B+C)A=BA+CA$ (επιμεριστικός νόμος)
3) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$ (προσεταιριστικός νόμος)

4) Υπάρχει μοναδιαίο στοιχείο για τον πολλαπλασιασμό των πινάκων. Αυτό είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός, που έχει πίνακα $I=[\delta_{ij}]$, όπου $\delta_{ij}=\begin{cases}1, \text{αν } i=j\\ 0, \text{αν } i\neq j\end{cases}$ (δ του Kronecker).

Το γεγονός ότι δεν ισχύει ο αντιμεταθετικός νόμος στην περίπτωση των $n\times n$ πινάκων, πιστοποιείται από το παράδειγμα,

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Έστω $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\end{bmatrix}$ και $B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$. Τότε, $AB=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & -1\end{bmatrix}$ ενώ $BA=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 7 & -3\end{bmatrix}$.

Είναι δυνατόν να έχουμε δύο μη μηδενικούς πίνακες, που το γινόμενό τους να είναι ο μηδενικός πίνακας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Αν $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ και $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{bmatrix}$, τότε και, $AB=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

Ορολογία των $n\times n$ πινάκων. Τους $n\times n$ πίνακες τους καλούμε και τετραγωνικούς πίνακες. Διαγώνια στοιχεία είναι τα a_{ij} όπου $i=j$. Οι δυνάμεις A^k των τετραγωνικών πινάκων ορίζονται επαγωγικά, ως $A^0=\mathbf{I}, A^1=A, \ldots, A^k=AA^{k-1}$. Ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των δυνάμεων $A^{\mu+\nu}=A^{\mu}A^{\nu}$. Ως εκ τούτου, οι πίνακες A^{μ} και A^{ν} αντιμετατίθενται.

Αν $A=[a_{ij}]$ $m\times n$ πίνακας, θέτουμε $A^T=[a_{ji}]$, ένας $n\times m$ (***ανάστροφος*** πίνακας). Ισχύουν οι σχέσεις:

1) $(A^T)^T=A$
2) $(A+B)^T=A^T+B^T$
3) $(\lambda A)^T=\lambda A^T$
4) $(AB)^T=B^TA^T$

Έστω τα διανύσματα $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$. Ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα γινόμενα $\mathbf{u}^T\mathbf{v}$ (***εσωτερικό γινόμενο***) και $\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ (***εξωτερικό γινόμενο***).

Είναι, $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_n\end{bmatrix}$, $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix}$ πίνακες $n\times 1$. Συνεπώς, ο $\mathbf{u}^T\mathbf{v}$ είναι ένας 1×1 πίνακας (μονόμετρο μέγεθος) που ισούται με $\sum_{i=1}^{n}u_i v_i$, ενώ ο $\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ είναι ένας $n\times n$ πίνακας, που ισούται προς $\begin{bmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_n\end{bmatrix}[v_1\ldots v_n]=\begin{bmatrix}u_1v_1 & \ldots & u_1v_n\\ & \ddots & \\ u_nv_1 & \ldots & u_nv_n\end{bmatrix}$.

Διαγώνιος πίνακας καλείται ένας τετραγωνικός πίνακας, του οποίου τα μόνα μη μηδενικά στοιχεία, βρίσκονται επί της κυρίας διαγωνίου του. Ένα διαγώνιο πίνακα, θα τον συμβολίζουμε με $D(\alpha_{11},\alpha_{22},\ \dots\ ,\alpha_{nn})$. Είναι,

$xD(\alpha_{11},\alpha_{22},\ \dots\ ,\alpha_{nn})\ =\ D(\alpha_{11}x_1,\alpha_{22}x_2,\ \dots\ ,\alpha_{nn}x_n)$, όπου, $x=(x_1,x_2,\ \dots\ ,x_n)\in\mathbb{R}^n$. Το άθροισμα και το γινόμενο δύο διαγωνίων πινάκων, είναι πάλι διαγώνιος πίνακας.. Ισχύει μάλιστα ότι $D^k(\alpha_{11},\alpha_{22},\ \dots\ ,\alpha_{nn})=D(\alpha_{11}^k,\alpha_{22}^k,\ \dots\ ,\alpha_{nn}^k)$.

Κάτω τριγωνικός λέγεται ένας τετραγωνικός πίνακας Α, όταν τα α_{ij} στοιχεία του, που βρίσκονται άνω της κυρίας διαγωνίου, είναι όλα ίσα με μηδέν. Το άθροισμα και το γινόμενο δύο κάτω τριγωνικών πινάκων, είναι πάλι κάτω τριγωνικός πίνακας.

Αντίστοιχα, ορίζονται οι ***άνω τριγωνικοί*** πίνακες.

Όπως είδαμε, ανάστροφος [transposed] του $A=(\alpha_{ij})$, είναι ο $A^t=(\alpha_{ji})$.

Ισχύει ότι, $(AB)^t=B^tA^t$.

Συμμετρικός λέγεται ο τετραγωνικός πίνακας Α, ανν έχουμε ότι $A=A^t$.

Αντισυμμετρικός λέγεται ο τετραγωνικός πίνακας Α ανν $-A=A^t$. Τα στοιχεία που βρίσκονται επι της κυρίας διαγωνίου ενός αντισυμμετρικού πίνακα Α, είναι, υποχρεωτικά, ίσα με μηδέν.

12. Ο αντίστροφος πίνακας. Αναφερόμεθα βέβαια, σε τετραγωνικούς πίνακες. Η δράση ενός αντιστρόφου A^{-1} του πίνακα Α, θα πρέπει να είναι ίδια με την δράση της αντιστρόφου απεικονίσεως T^{-1} του γραμμικού μετασχηματισμού που έχει πίνακα Α. Η ύπαρξη του T^{-1}, προϋποθέτει ότι ο μετασχηματισμός Τ είναι ένα προς ένα απεικόνιση. Άρα, όπως παρατηρήσαμε στην §9, η εξίσωση $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ έχει μοναδική λύση την μηδενική λύση. Εξ' άλλου, επειδή η σύνθεση μιας απεικονίσεως και της αντιστρόφου της δίδει την ταυτοτική απεικόνιση, θα πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις $AA^{-1}=I$ και $A^{-1}A=I$.

ΠΡΟΤΑΣΗ. Αν Α αντιστρέψιμος $n\times n$ πίνακας, τότε $\forall\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$, η εξίσωση $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ έχει την μοναδική λύση $\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}$.

Απόδειξη. Είναι, $A(A^{-1}\mathbf{b})=\mathbf{b}$ και, συνεπώς, η $\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}$ αποτελεί λύση της $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$. Έστω, τώρα, ότι η $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ είχε τα $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2$ ως λύσεις. Τότε και $A\mathbf{x}_1=A\mathbf{x}_2$ ή και $A(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)=\mathbf{0}$, και επειδή η εξίσωση αυτή έχει μοναδική την μηδενική λύση, είναι $\mathbf{x}_1=\mathbf{x}_2$.

Ισχύουν οι προτάσεις:

1) Αν Α αντιστρέψιμος πίνακας, τότε και A^{-1} αντιστρέψιμος, και $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.

2) Αν Α, Β αντιστρέψιμοι, τότε και ο ΑΒ αντιστρέψιμος, και $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

3) Αν Α αντιστρέψιμος, τότε και A^T αντιστρέψιμος, και $\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$.

13. Στοιχειώδεις πίνακες. Στην §2 μεταφέραμε τις στοιχειώδεις πράξεις επί των γραμμών ενός συστήματος, σε αντίστοιχες πράξεις επί των γραμμών ενός πίνακα. Κάθε μία από τις πράξεις αυτές, είναι δυνατόν να προκύψει ως δράση ενός ***στοιχειώδους πίνακα*** επί του πίνακα Α. Έχουμε, λοιπόν τρεις στοιχειώδεις πίνακες.

1) Η δράση του πρώτου εναλλάσσει της γραμμές του πίνακα Α. Ένας τέτοιος πίνακας συμβολίζεται με P_{ij} (permutation matrix) όπου i, j, οι γραμμές που εναλλάσσει. Ο P_{ij} προκύπτει από τον I, με την εναλλαγή των γραμμών i, j.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Δίδεται ο $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$ και θέλουμε να λάβουμε τον $A'=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. Σχηματίζουμε τον P_{32} από τον $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P_{32}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Η δράση του P_{32} επί του A μας δίδει τον A΄. Πράγματι,

$$P_{32}A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

2) Η δράση του δεύτερου πολλαπλασιάζει μία γραμμή επί ένα μονόμετρο μέγεθος λ. Ένας τέτοιος πίνακας συμβολίζεται με D_i, όπου i η γραμμή που θέλουμε να πολλαπλασιασθεί επί λ. Ο D_i προκύπτει από τον I, αν το 1 της i,i θέσης το αντικαταστήσουμε με λ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Δίδεται ο $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$ και θέλουμε να λάβουμε τον $A'=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} \end{bmatrix}$. Σχηματίζουμε τον D_3 από τον $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $D_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$. Η δράση του P_3 επί του A μας δίδει τον A΄. Πράγματι,

$$D_3A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} \end{bmatrix}$$

3) Η δράση του τρίτου, αντικαθιστά μια γραμμή από το άθροισμα αυτής, με κάποια άλλη. Ένας τέτοιος πίνακας συμβολίζεται με S_{ij}, όπου i η γραμμή που θέλουμε να αντικατασταθεί από το άθροισμα αυτής συν της γραμμής j.. Ο S_{ij} προκύπτει από τον I, αν την i γραμμή του αντικαταστήσουμε με το άθροισμα αυτής συν την j γραμμή του.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Δίδεται ο $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$ και θέλουμε να λάβουμε τον $A'=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$. Σχηματίζουμε τον S_{21} από τον $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $S_{21}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Η δράση του S_{21} επί του Α μας δίδει τον A'. Πράγματι,

$$S_{21}A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι όλοι οι στοιχειώδεις πίνακες είναι αντιστρέψιμοι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Να βρεθεί ο αντίστροφος A^{-1} του Α πίνακας.
Λύση. Ενεργούμε επί του Α με κατάλληλους στοιχειώδεις πίνακες E_i, μέχρις ότου μετατρέψουμε αυτόν, στον Ι. Έχουμε δηλαδή, $A \approx E_1A \approx E_2E_1A \approx \ldots \approx E_k \cdots E_1A = I$. Είναι, τότε και $A=(E_k \cdots E_1)^{-1}I$, απ' όπου και $A^{-1}=E_k \cdots E_1$.

Η λύση του προηγουμένου προβλήματος οδηγεί στον εξής αλγόριθμο για την εύρεση του αντιστρόφου, αν υπάρχει, A^{-1} του πίνακα Α. Μετατρέπουμε με διαδοχικές στοιχειώδεις πράξεις επί των γραμμών τον επαυξημένο πίνακα $[A,I]$, στον ισοδύναμο $[I,B]$. Είναι, τότε, $B=A^{-1}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Να βρεθεί ο αντίστροφος πίνακας του $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα $C=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ και στην συνέχεια εκτελούμε διαδοχικές πράξεις επί των γραμμών του πίνακα C έτσι ώστε να έρθει στην μορφή $C=[I,B]$. Είναι

$$C \approx \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Είναι, λοιπόν, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$.

Πράγματι, $\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ισχύουν οι παρακάτω ισοδύναμες προτάσεις:
1) Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος
2) Ο A είναι γραμμοισοδύναμος προς τον ταυτοτικό πίνακα I
3) Ο A είναι το γινόμενο στοιχειωδών πινάκων
4) Η εξίσωση $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μοναδική λύση την μηδενική
5) Η εξίσωση $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει μοναδική λύση για κάθε $\mathbf{b} \in \mathbb{R}$
6) Υπάρχει πίνακας C τέτοιος ώστε $AC = I$
7) Υπάρχει πίνακας D τέτοιος ώστε $DA = I$
8) Ο A^T είναι αντιστρέψιμος.

Αποδείξεις. 1) $\Rightarrow$ 7). Αν η 1) ισχύει, τότε αρκεί να θέσουμε $D = A^{-1}$.

7) $\Rightarrow$ 4) Αν η 7) ισχύει και το $\mathbf{x}$ πληροί την $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, τότε και $DA\mathbf{x} = D\mathbf{0}$ και συνεπώς, $I\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Άρα και $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

4) $\Rightarrow$ 2) Αν η εξίσωση $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μοναδική την μηδενική λύση, το αντίστοιχο σύστημα δεν εμφανίζει κάποια μεταβλητή σαν παράμετρο στο σύνολο των λύσεών του. Άρα έχουμε n μεταβλητές, και, συνεπώς, ο ανοιγμένος γραμμοισοδύναμος πίνακας είναι ο I.

2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1) Αν ο A είναι γραμμοισοδύναμος του I, υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες E_i, τέτοιοι ώστε $(E_k \cdots E_1)A = I$. Άρα και $A = (E_k \cdots E_1)^{-1} I$, δηλαδή, ο $A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}$. Οι στοιχειώδεις πίνακες όμως, είναι όλοι αντιστρέψιμοι, άρα και το γινόμενό τους αντιστρέψιμος πίνακας. (Η σύνθεση ένα προς ένα συναρτήσεων είναι συνάρτησης ένα προς ένα. Βλέπε ενότητα "Σύνολα", §6)

2) $\Leftrightarrow$ 5) Είναι η πρόταση της §12.

6) $\Rightarrow$ 8) $\Rightarrow$ 1) $\Rightarrow$ 6) Αν $AC = I$, τότε και $C^T A^T = (AC)^T = I^T = I$

14. Μηδενικός χώρος, πυρήνας μετασχηματισμού. Στην §5 παρατηρήσαμε ότι, το διάνυσμα $\mathbf{b}$ της εξισώσεως $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, στην περίπτωση που αυτή έχει λύση, ανήκει στο σύνολο που παράγουν τα διανύσματα κολώνες του πίνακα A. Θεωρούμε, τώρα, την ομογενή εξίσωση $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (1). Ισχυριζόμαστε ότι το σύνολο λύσεων αυτής, αποτελεί έναν διανυσματικό χώρο Nul(A), τον καλούμενο ***μηδενικό χώρο*** του πίνακα A. (ο αναγνώστης θα πρέπει να κοιτάξει την ενότητα "Γραμμικοί χώροι", όπου ορίζονται οι έννοιες του ***γραμμικού ή διανυσματικού χώρου,*** της ***βάσεως*** και της ***διαστάσεως*** του χώρου, έννοιες, που θα χρησιμοποιήσουμε στα παρακάτω).

Πράγματι, φανερά $\mathbf{0} \in N$, επίσης, $A(\lambda\mathbf{x}_1 + \mu\mathbf{x}_2) = \lambda A\mathbf{x}_1 + \mu A\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, για $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ λύσεις της (1).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. 1) Το διάνυσμα $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\3\\-4\end{bmatrix}$ ανήκει ή όχι στον μηδενικό χώρο του πίνακα $A=\begin{bmatrix}3 & -5 & -3\\6 & -2 & 0\\-8 & 4 & 1\end{bmatrix}$.

Λύση. Ελέγχουμε αν το $\mathbf{b}$ είναι λύση της $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

$$A\mathbf{b}=\begin{bmatrix}3 & -5 & -3\\6 & -2 & 0\\-8 & 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\6\\-8\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}-5\\-2\\4\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

Το είναι λύση της $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$, και άρα $\mathbf{b}\in N$.

2) Ποιος είναι ο μηδενικός χώρος του πίνακα $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & 0\\0 & 1 & 4 & -2\end{bmatrix}$;

Λύση. Βρίσκουμε την γενική λύση της $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$. Είναι,

$$A\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & 0\\0 & 1 & 4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

απ' όπου οδηγούμεθα στο σύστημα

$$\begin{aligned}x_1+3x_2+5x_3 \qquad &=0\\ x_2+4x_3-2x_4&=0\end{aligned}$$

Θέτουμε $s_4=x_4$, $s_3=x_3$, οπότε και $s_2=-4s_3+2s_4$, $s_1=7s_3-6s_4$. Είναι,

$$\begin{bmatrix}7s_3-6s_4\\-4s_3+2s_4\\s_3\\s_4\end{bmatrix}=s_3\begin{bmatrix}7\\-4\\1\\0\end{bmatrix}+s_4\begin{bmatrix}-6\\2\\0\\1\end{bmatrix}.$$ δηλαδή, $N=<\mathbf{u},\mathbf{v}>$, όπου $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}7\\-4\\1\\0\end{bmatrix}$, $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}-6\\2\\0\\1\end{bmatrix}$

Φανερά, είναι $\dim N=2$

Στην περίπτωση που έχουμε ένα γραμμικό μετασχηματισμό $T:F^n\to F^m$ ο $N\subseteq F^n$ του πίνακα A του T, είναι το σύνολο των στοιχείων $\mathbf{x}\in F^n$ που έχουν εικόνα το $\mathbf{0}\in F^m$, και καλείται ***πυρήνας*** KerT του γραμμικού μετασχηματισμού T.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Να βρεθεί ο γραμμικός μετασχηματισμός $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, που έχει εικόνα τον υπόχωρο $U=<\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}>$ και πυρήνα τον $<\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}>$.

Λύση. 1 Ένας τέτοιος γραμμικός μετασχηματισμός υπάρχει, μια και ισχύει η σχέση $\dim\mathrm{Ker}T+\dim\mathrm{Im}T=\dim\mathrm{Dom}T$, όπου DomT το πεδίον ορισμού του T, ImT το πεδίον τιμών του T, και KerT ο πυρήνας του T. (Βλέπε επόμενη παράγραφο).

2. Επεκτείνουμε τον KerT σε όλο το $\mathrm{DomT} = \mathbb{R}^3$. Θεωρούμε δηλαδή ότι είναι, $\mathbb{R}^3 =< \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} >$. Θέτουμε $T(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3$, $T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2$ και

$T(\mathbf{b}) = T(-2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = -2T(\mathbf{e}_1) + T(\mathbf{e}_2)$ ή $\mathbf{0} = -2T(\mathbf{e}_1) + T(\mathbf{e}_2)$, δηλαδή, $T(\mathbf{e}_1) = \dfrac{\mathbf{e}_2}{2}$.

Έχουμε, λοιπόν,

$$
\begin{aligned}
T(\mathbf{e}_1) &= 0\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3 \\
T(\mathbf{e}_2) &= 0\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3 \\
T(\mathbf{e}_3) &= 0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3
\end{aligned}
$$

Άρα ο καθιερωμένος πίνακας του μετασχηματισμού T είναι ο $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Πράγματι, ο μηδενικός χώρος του A (πυρήνας του T), δίδεται από την σχέση $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Οδηγούμεθα στο σύστημα

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 \quad &= 0 \\
x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

Ο μηδενικός χώρος, λοιπόν, του πίνακα A είναι ο $< \mathbf{b} >$.

Το πεδίον ορισμού του T, συμπίπτει με τον χώρο που παράγουν οι κολώνες του πίνακα A, και είναι βέβαια ο $\mathbb{R}^3$

15. Ο χώρος που παράγουν οι κολώνες ενός πίνακα. Έστω $A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n]$ ένας $m \times n$ πίνακας. Ένα $\mathbf{b} \in < \mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n >$ αν και μόνον αν το $\mathbf{b}$ εξαρτάται γραμμικά από τα $\mathbf{a}$, έχει δηλαδή την έκφραση $\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n$, ή ισοδύναμα, αν υπάρχει $\mathbf{x} \in F^n$ τέτοιο ώστε $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, δηλαδή, αν η εξίσωση αυτή, έχει λύση. Το σύνολο όλων αυτών των διανυσμάτων $\mathbf{b}$ αποτελεί γραμμικό χώρο Col(A). Πράγματι, $\mathbf{0} \in C$, μια και μπορούμε να λάβουμε $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Εξ άλλου, λόγω γραμμικότητας του πίνακα A, ισχύει ότι $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in C \Rightarrow \lambda\mathbf{b}_1 + \mu\mathbf{b}_2 \in C$. Παρατηρούμε ότι, ενώ ο χώρος Nul(A) είναι υπόχωρος του **πεδίου ορισμού** του γραμμικού μετασχηματισμού T που έχει πίνακα A, ο χώρος Col(A) είναι υπόχωρος του **πεδίου τιμών** του γραμμικού μετασχηματισμού T που έχει πίνακα A.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Το σύνολο $S = \left\{ \begin{bmatrix} s-2t \\ 5+t \\ s+3t \\ t \end{bmatrix} \ s, t \in \mathbb{R} \right\}$ αποτελεί ή όχι υπόχωρο του $\mathbb{R}^4$;

Λύση. Ισχύει ότι, $\begin{bmatrix} s-2t \\ 5+t \\ s+3t \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Φανερά, $\mathbf{0} \notin S$. Άρα το S δεν είναι υπόχωρος.

Επανερχόμεθα στην εξίσωση $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ (1). Στην περίπτωση, που η εξίσωση αυτή έχει μοναδική την μηδενική λύση, τότε και μόνον, οι κολώνες του πίνακα Α αποτελούν σύνολο γραμμικά ανεξάρτητο. Στην περίπτωση, που οι κολώνες $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n$ αποτελούν σύνολο γραμμικά εξαρτημένο, τότε και μόνον, η (1) έχει και λύσεις εκτός της μηδενικής. Παρατηρούμε ακόμα, ότι η δράση των στοιχειωδών πινάκων επί του πίνακα Α, δεν μεταβάλει την σχέση γραμμικής εξαρτήσεως των στηλών του πίνακα Α, μια και η εξίσωση $EA\mathbf{x}=\mathbf{0}$ έχει το ίδιο σύνολο λύσεων με αυτό της (1). Άρα ο έλεγχος της γραμμικής ή όχι εξαρτήσεως των στηλών $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n$ του πίνακα Α είναι δυνατόν να γίνει από την εξέταση του ισοδύναμου ανοιγμένου του Α πίνακα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. 1) Να βρεθεί μία βάση για τον χώρο Col(A), όπου

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 4 & -2 & -4\\ 2 & -6 & -3 & 1\\ -3 & 8 & 2 & -3\end{bmatrix}.$$

Λύση. Είναι, $A\approx\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 2\\ 0 & -2 & -5 & -3\\ 0 & 2 & 5 & 3\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 5/2 & 3/2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=B$. Ο Col(A) είναι δυνατόν να θεωρηθεί ότι παράγεται από τα διανύσματα $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\5\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix}$. Φανερά, $\begin{bmatrix}1\\5\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\2\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix}$ ή $\mathbf{b}_3=\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2+\mathbf{b}_4$. Στην σχέση αυτή, αντικαθιστούμε τις κολώνες του Β από τις αντίστοιχες κολώνες του πίνακα Α οπότε και έχουμε την $\begin{bmatrix}-2\\-3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\2\\-3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\-6\\8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4\\1\\-3\end{bmatrix}$, σχέση ισχύουσα.

Είναι, λοιπόν, $<\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3\ \mathbf{a}_4>=<\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_4>$. Περνάμε στον Β και ελέγχουμε τις κολώνες 1, 2 και 4: Είναι $5\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\frac{3}{2}\begin{bmatrix}-2\\2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix}$ ή $\mathbf{b}_4=5\mathbf{b}_1+\frac{3}{2}\mathbf{b}_2$. Το $\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2\}$ είναι σύνολο γραμμικά ανεξάρτητο.

Επιστρέφουμε στον πίνακα Α και θέτουμε $\mathrm{Col}(A)=<\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2>$.

2) Να βρεθεί μία βάση του χώρου Nul(A).

Λύση. Σχηματίζουμε την ισοδύναμο εξίσωση $B\mathbf{x}=\mathbf{0}$:

$x_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}-2\\2\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}1\\5\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix}=\mathbf{0}$, η οποία οδηγεί στο σύστημα,

$$\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3+2x_4&=0\\ 2x_2+5x_3+3x_4&=0\end{aligned}$$

Η λύση του συστήματος είναι η $\{s_1 = 6s_3 + 5s_4,\ s_2 = -\frac{5}{2}s_3 - \frac{3}{2}s_4,\ x_3 = s_3,\ x_4 = s_4\}$

ή

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 6s_3 + 5s_4 \\ (-5s_3 - 3s_4)/2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix} = s_3 \begin{bmatrix} 6 \\ -5/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s_4 \begin{bmatrix} 5 \\ -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = s\,\mathbf{u} + t\,\mathbf{v}$$

Ο Nul(A) έχει λοιπόν διάσταση 2 και παράγεται από τα διανύσματα **u** και **v**.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Η διάσταση του χώρου Nul(A) συμπίπτει με το πλήθος των παραμέτρων του συστήματος που είναι ισοδύναμο της εξισώσεως $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Η διάσταση του χώρου Col(A) συμπίπτει με το πλήθος των στύλων που έχουν πρώτο στοιχείο την μονάδα, στην ισοδύναμο ανοιγμένοι μορφή του πίνακα A.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Να βρεθούν οι διαστάσεις των χώρων Nul(A) και Col(A) του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 9 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Λύση. Ο A είναι ισοδύναμος του $A' = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 9 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Άρα $\dim \mathrm{Col}(A) = 3$

Τα διανύσματα $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_4$ αποτελούν μία βάση του χώρου Col(A).
Η εξίσωση $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ είναι ισοδύναμος με το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 - 6x_2 + 9x_3 \qquad - 2x_5 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 5x_5 &= 0 \\ 5x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Η λύση του συστήματος αυτού, έχει δύο παραμέτρους, s_5, s_3. Άρα $\dim \mathrm{Nul}(A) = 2$.
Ισχύει ότι, $\dim \mathrm{Col}(A) + \dim \mathrm{Nul}(A) = n$ όπου n οι κολώνες του $m \times n$ πίνακα A.

16. Ο χώρος που παράγουν οι γραμμές ενός πίνακα. Ο χώρος αυτός, συμβολικά ο Row(A), ταυτίζεται με τον $\mathrm{Col}(A^T)$. Οι γραμμοπράξεις πάνω στον A^T ισοδυναμούν με γραμμοπράξεις πάνω στον A. Έχουμε, λοιπόν, ισοδύναμα και γραμμοπράξεις επί των στηλών του πίνακα A. Οι γραμμοπράξεις πάνω στις κολώνες του πίνακα είναι ισοδύναμες με την δράση των αντιστοίχων στοιχειωδών πινάκων από τα αριστερά του πίνακα A.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Έστω $\mathrm{B}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1 & 5\\ -2 & 0 & 5 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$. Για να μετακινήσουμε την δεύτερη κολώνα στην πρώτη θέση, πολλαπλασιάζουμε από τα αριστερά με τον στοιχειώδη πίνακα $\mathrm{E}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

Είναι, $\mathrm{BE}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1 & 5\\ -2 & 0 & 5 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 5\\ 0 & -2 & 5 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

Ότι έχουμε αναφέρει για τον χώρο των στηλών του πίνακα A, ισχύει και για τον χώρο των γραμμών του πίνακα A. Άρα, τα διανύσματα $(1,0,1,5)=[1,0,1,5]^{\mathrm{T}}$ και $(0,-1/2,5/2,-6/2)=[0,-1/2,5/2,-6/2]^{\mathrm{T}}$ αποτελούν βάση για τον χώρο Row(A). Ο χώρος Col(A) έχει βάση τα $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Επειδή το πλήθος των μονάδων, ως πρώτο στοιχείο γραμμής πίνακος A είναι το ίδιο με αυτό του πίνακα A^{T}, έπεται ότι,

$$\dim \mathrm{Col}(\mathrm{A})=\dim \mathrm{Row}(\mathrm{A})$$

Η κοινή αυτή διάσταση των χώρων αυτών, καλείται ***τάξη*** (rank) του πίνακα A.

17. Συστήματα συντεταγμένων. Έστω $B=\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\ldots,\mathbf{b}_n\}$ μία βάση ενός διανυσματικού χώρου $\mathbf{V}(\mathrm{F})$ (βλέπε ενότητα "Γραμμικοί Χώροι" §3). Κάθε $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$ έχει την μοναδική έκφραση $\mathbf{x}=\beta_1\mathbf{b}_1+\beta_2\mathbf{b}_2+\ldots+\beta_n\mathbf{b}_n$, $\beta_i\in\mathrm{F}$, $1\le i\le n$. Πράγματι αν και $\mathbf{x}=\gamma_1\mathbf{b}_1+\gamma_2\mathbf{b}_2+\ldots+\gamma_n\mathbf{b}_n$, τότε και $\mathbf{0}=(\beta_1-\gamma_1)\mathbf{b}_1+(\beta_2-\gamma_2)\mathbf{b}_2+\ldots+(\beta_n-\gamma_n)\mathbf{b}_n$ και επειδή το B σύνολο γραμμικά ανεξάρτητο, $\beta_i=\gamma_i$, $1\le i\le n$. Τα μονόμετρα μεγέθη $\beta_i\in\mathrm{F}$, $1\le i\le n$ καλούνται ***συντεταγμένες*** του διανύσματος **x** ως προς την βάση B του χώρου $\mathbf{V}(\mathrm{F})$. Γράφουμε και $[\mathbf{x}]_B=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix}$. Στην πραγματικότητα ταυτίζουμε τα στοιχεία $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$ με τις κολώνες του πίνακα $\mathrm{B}=[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\ldots,\mathbf{b}_n]$. Η ταύτιση αυτή είναι δυνατόν να γίνει, γιατί η απεικόνιση $\varphi:\mathbf{V}(\mathrm{F})\to\mathrm{F}^n$ που ορίζεται από την σχάση $\mathbf{V}(\mathrm{F})\ni\mathbf{x}\mapsto\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)\in\mathrm{F}^n$, είναι ισομορφισμός και ως προς την πρόσθεση και ως προς τον μονόμετρο πολλαπλασιασμό. Οι κολώνες του μοναδιαίου πίνακα $\mathrm{I}=[\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n]$ αποτελούν την κανονική βάση του χώρου $\mathbf{V}(\mathrm{F})$. Ως προς αυτήν, το τυχόν $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$ έχει την μοναδική έκφραση

$$\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+\ldots+x_n\mathbf{e}_n=\begin{bmatrix} x_1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0\\ x_2\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}+\ldots+\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}.$$

Συμβολισμός. Γράφουμε $[\mathbf{x}]_B$, αν η βάση του χώρου είναι διαφορετική από την κανονική. Σε κάθε άλλη περίπτωση γράφουμε απλά $\mathbf{x}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. 1) Έστω $B=\left\{\begin{bmatrix} 1\\ -4\\ 3\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 5\\ 2\\ -2\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 4\\ -7\\ 0\end{bmatrix}\right\}$ μία βάση του $\mathbb{R}^3$ και έστω ότι το $\mathbf{X}\in\mathbb{R}^3$ ως προς αυτή την βάση, είναι το $[\mathbf{x}]_B=\begin{bmatrix} 3\\ 0\\ -1\end{bmatrix}$. Να βρεθεί η έκφραση του $\mathbf{x}$ στην βάση $\mathrm{I}=[\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3]$.

Λύση. Είναι,

$$[\mathbf{x}]_B=3\mathbf{b}_1+0\mathbf{b}_2-1\mathbf{b}_3=3\begin{bmatrix} 1\\ -4\\ 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 4\\ -7\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1\\ -5\\ 9\end{bmatrix}=-1\begin{bmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+9\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=-1\mathbf{e}_1-5\mathbf{e}_2+9\mathbf{e}_3=\mathbf{x}$$

2) Έστω $B=\left\{\begin{bmatrix} 1\\ -1\\ -3\end{bmatrix},\begin{bmatrix} -3\\ 4\\ 9\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 2\\ -2\\ 4\end{bmatrix}\right\}$ μία βάση του $\mathbb{R}^3$ και έστω ότι το $\mathbf{X}\in\mathbb{R}^3$ ως προς την κανονική βάση, είναι το $\mathbf{x}=\begin{bmatrix} 8\\ -9\\ 6\end{bmatrix}$. Να βρεθεί η έκφραση του $\mathbf{x}$ στην βάση B.

Λύση. Θέλουμε να βρούμε την έκφραση $[\mathbf{x}]_B=\beta_1\mathbf{b}_1+\beta_2\mathbf{b}_2+\beta_3\mathbf{b}_3$. Έχουμε ότι,

$$[\mathbf{x}]_B=\beta_1\begin{bmatrix} 1\\ -1\\ -3\end{bmatrix}+\beta_2\begin{bmatrix} -3\\ 4\\ 9\end{bmatrix}+\beta_3\begin{bmatrix} 2\\ -2\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \beta_1 & -3\beta_2 & 2\beta_3\\ -\beta_1 & 4\beta_2 & -2\beta_3\\ -3\beta_1 & 9\beta_2 & 4\beta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2\\ -1 & 4 & -2\\ -3 & 9 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8\\ -9\\ 6\end{bmatrix}$$

Οδηγούμεθα στο σύστημα

$$\begin{aligned} \beta_1 -3\beta_2+2\beta_3&=8\\ -\beta_1+4\beta_2-2\beta_3&=-9\\ -3\beta_1+9\beta_2+4\beta_3&=6 \end{aligned}$$

Που έχει λύση την $\beta_1 = -1,\ \beta_2 = -1,\ \beta_3 = 3$. Άρα $[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Η παραπάνω διαδικασία περιγράφεται από την εξίσωση $P_B[\mathbf{x}]_B = \mathbf{x}$.

3) Το τυχόν $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ έχει καθιερωμένες συντεταγμένες $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$. Θεωρούμε τα διανύσματα $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}$ τα οποία αποτελούν σύνολο γραμμικά ανεξάρτητο, και, συνεπώς, μπορεί να θεωρηθούν βάση $\mathcal{B}$ του $\mathbb{R}^4$. Ως προς την βάση $\mathcal{B}$, το $\mathbf{x}$ έχει την έκφραση $\mathbf{x} = \beta_1\mathbf{u}_1 + \beta_2\mathbf{u}_2 + \beta_3\mathbf{u}_3 + \beta_4\mathbf{u}_4$. Η σχέση αυτή ισοδύναμα γράφεται $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -10 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix}$.

Άρα και $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -10 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$.

18. Αλλαγή βάσης. Μέσα σε έναν διανυσματικό χώρο $\mathbf{V}(F)$ το διάνυσμα $\mathbf{x}$ είναι δυνατόν να έχει περισσότερες της μιάς εκφράσεις σε συντεταγμένες, λόγω των διαφορετικών βάσεων που ενδεχομένως έχει ο $\mathbf{V}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Έστω $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ και $C = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ δύο διαφορετικές βάσεις του $\mathbf{V}$ και ότι $\mathbf{b}_1 = 6\mathbf{c}_1 - 2\mathbf{c}_2$ και $\mathbf{b}_2 = 9\mathbf{c}_1 - 4\mathbf{c}_2$. Αν $[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, να βρεθεί το $[\mathbf{x}]_C$.

Λύση. Έχουμε την $[\mathbf{x}]_B = 3\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$. Άρα $[\mathbf{x}]_C = [3\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2]_C = 3[\mathbf{b}_1]_C + [\mathbf{b}_2]_C$. Επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη διαδικασία, όπου στην θέση της C είχαμε την κανονική βάση, και καταλήγουμε στην $[\mathbf{x}]_C = \big[[\mathbf{b}_1]_C\ [\mathbf{b}_1]_C\big] \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ -10 \end{bmatrix}$.

Την παραπάνω διαδικασία που ακολουθήσαμε για να λύσουμε το πρόβλημα, μπορούμε να την περιγράψουμε ως εξής:
Έστω $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ και $C = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ δύο βάσεις του διανυσματικού χώρου $\mathbf{V}$. Υπάρχει τότε, ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας $P_{C \leftarrow B}$ τέτοιος ώστε να ισχύει

η εξίσωση $[\mathbf{x}]_C = P_{C\leftarrow B}[\mathbf{x}]_B$ (1). Οι κολώνες του πίνακα $P_{C\leftarrow B}$ αποτελούνται από τις συντεταγμένες των διανυσμάτων της βάσης B ως προς την βάση C. Είναι, δηλαδή,

$$P_{C\leftarrow B} = [[\mathbf{b}_1]_C, [\mathbf{b}_2]_C, \ldots, [\mathbf{b}_n]_C]$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. 1) Έστω $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ και $C = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ δύο διαφορετικές βάσεις του $\mathbb{R}^2$ $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Να βρεθεί ο πίνακας $P_{C\leftarrow B}$.

Λύση. Πρέπει να βρούμε τις εκφράσεις $[\mathbf{b}_1]_C, [\mathbf{b}_2]_C$.

Είναι $\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix} = \gamma_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} + \gamma_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ απ' όπου οδηγούμεθα στο σύστημα $\begin{matrix} \gamma_1 - 2\gamma_2 = 7 \\ -5\gamma_1 + 2\gamma_2 = 5 \end{matrix}$.

Άρα, $[\mathbf{b}_1]_C = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$. Ομοίως, $\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} = \gamma_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} + \gamma_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ απ' όπου οδηγούμεθα στο σύστημα $\begin{matrix} \gamma_1 - 2\gamma_2 = -3 \\ -5\gamma_1 + 2\gamma_2 = -1 \end{matrix}$. Άρα, $[\mathbf{b}_2]_C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Ο ζητούμενος πίνακας είναι, λοιπόν, ο $P_{C\leftarrow B} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$.

Σημείωση. Προσοχή ! Είναι $[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $[\mathbf{b}_2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

μια και $\mathbf{b}_1 = 1\mathbf{b}_1 + 0\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_2 = 0\mathbf{b}_1 + 1\mathbf{b}_2$.

Παρατηρούμε ότι, όπως περιμένουμε,

$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix} = [\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}}$, $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{b}_2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}}$

2) Τα διανύσματα $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}$ και

$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ αποτελούν δύο διαφορετικές βάσεις του $\mathbb{R}^4$. Τις καλούμε $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$. Παρατηρούμε ότι,

$$(1)\quad \begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{u}_2 &= 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{u}_3 &= -3\mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{u}_4 &= -\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 \end{aligned} \qquad \text{και,} \qquad (2)\quad \begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{v}_2 &= -2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{v}_3 &= 11\mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{v}_4 &= -27\mathbf{u}_1 + 11\mathbf{u}_2 - 2\mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4 \end{aligned}$$

Από (1) προκύπτει ότι,

$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \left[[\mathbf{u}_1]_{\mathcal{C}}\ [\mathbf{u}_2]_{\mathcal{C}}\ [\mathbf{u}_3]_{\mathcal{C}}\ [\mathbf{u}_4]_{\mathcal{C}}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Από την (2) προκύπτει ότι,

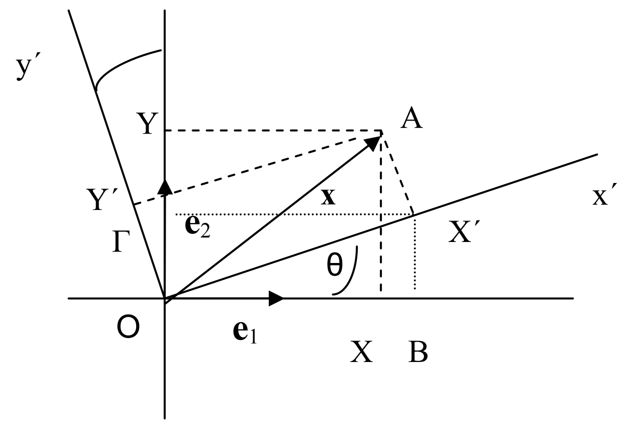
$$P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = \left[[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}}\ [\mathbf{v}_2]_{\mathcal{B}}\ [\mathbf{v}_3]_{\mathcal{B}}\ [\mathbf{v}_4]_{\mathcal{B}}\right] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 11 & -27 \\ 0 & 1 & -4 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Επειδή ο πίνακας $P_{C\leftarrow B}$ είναι αντιστρέψιμος, έχουμε και τον $Q_{B\leftarrow C} = (P_{C\leftarrow B})^{-1}$, που είναι ο πίνακας που από την βάση C μας οδηγεί στην βάση B.
Από την (1) προκύπτει και η $(P_{C\leftarrow B})^{-1}[\mathbf{x}]_C = [\mathbf{x}]_B$ ή $[\mathbf{x}]_B = Q_{B\leftarrow C}[\mathbf{x}]_C$.

19. Εφαρμογή. Η κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$ απεικονίζεται πάνω στο σύστημα των Oxy αξόνων, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Αυτή αποτελείται από τα διανύσματα $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Το διάνυσμα $\mathbf{x} = \overrightarrow{OA}$ έχει ως προς αυτή την βάση συντεταγμένες $x = (OX)$ και $y = (OY)$. Είναι, δηλαδή, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Περιστρέφουμε το Oxy σύστημα κατά γωνία θ, έτσι ώστε να λάβει την θέση Ox′y′. Είναι, τότε, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, με $x' = (OX') = (AY')$, και $y' = (OY') = (AX')$. Ζητάμε να βρούμε τον πίνακα $Q_{B\leftarrow C}$ ή τον $P_{C\leftarrow B}$ όπου B η αρχική κανονική βάση $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ και C η τελική (μετά την περιστροφή) βάση.
Παρατηρούμε ότι οι γωνίες xOx′, XAX′ έχουν τις πλευρές κάθετες, άρα είναι ίσες. Το ίδιο ισχύει και για τις γωνίες yOy′ και YOY′. Επίσης είναι

$$x = (OX) = (OB) - (BX) = x'\cos\theta - y'\sin\theta\ ,\ y = (BX') + (A\Gamma') = x'\sin\theta + y'\cos\theta.$$

Άρα και



$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Αυτή είναι η εξίσωση

$$[\mathbf{x}]_B = Q_{B\leftarrow C}[\mathbf{x}]_C.$$

Μία αντιστροφή του πίνακα $Q_{B\leftarrow C}$ δίδει τον πίνακα $P_{C\leftarrow B}$ και την αντίστοιχο εξίσωση

$[\mathbf{x}]_C = P_{C\leftarrow B}[\mathbf{x}]_B$, που δεν είναι άλλη από την

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

20. Όμοιοι πίνακες. Στην §10 είδαμε ότι, σε κάθε γραμμικό μετασχηματισμό $T : \mathbf{V}(F) \to \mathbf{V}(F)$, αντιστοιχεί ένας πίνακας A, τα στοιχεία του οποίου εξαρτώνται από την εκλογή της βάσεως του γραμμικού χώρου **V**(F). Υποθέτουμε ότι ο **V** έχει τις βάσεις $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_n\}$ και $\mathcal{C} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_n\}$. Με A συμβολίζουμε τον πίνακα του μετασχηματισμού T ως προς την βάση $\mathcal{B}$ και με B τον πίνακα του T ως προς την βάση $\mathcal{C}$. Με το τυχόν $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$, θεωρούμε και $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$. Είναι, τότε, $[\mathbf{y}]_{\mathcal{B}} = A[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ ως επίσης και $[\mathbf{y}]_{\mathcal{C}} = B[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$. Θέλουμε να βρούμε πως συνδέονται οι πίνακες A και B. Σχηματικά, έχουμε,

$$\begin{array}{lcl} [T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}} & = & A[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} \\ \downarrow P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} & & \uparrow P^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} \\ [T(\mathbf{x})]_{\mathcal{C}} & = & B[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} \end{array}$$

όπου, $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = [[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{C}}, [\mathbf{v}_2]_{\mathcal{C}}, \ldots, [\mathbf{v}_n]_{\mathcal{C}}]$. Στο διάγραμμα αυτό, το “=” της πρώτης γραμμής, αντικαθιστά την εικόνα του $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ με την δράση του πίνακα του μετασχηματισμού T επί το $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$. Αντίστοιχα, για το $[\mathbf{x}]_C$. Θεωρώντας, συνεπώς, τους πίνακες A και B ως απεικονίσεις, το παραπάνω διάγραμμα, είναι δυνατόν, να παρασταθεί από το διάγραμμα των απεικονίσεων

$$\begin{array}{lcl} [T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}} & \xrightarrow{A} & A[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} \\ \downarrow P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} & & \uparrow P^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} \\ [T(\mathbf{x})]_{\mathcal{C}} & \xrightarrow{B} & B[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} \end{array}$$

το οποίο πρέπει να είναι αντιμεταθετικό, για να ισχύουν οι παραπάνω ισότητες. Άρα , $A = PBP^{-1}$.

Ορισμός. Δύο τετραγωνικοί $n \times n$ πίνακες A και B λέγονται ***όμοιοι,*** αν και μόνον αν, υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P, τέτοιος ώστε $A = PBP^{-1}$.

Η σχέση “A όμοιος B” είναι σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου των $n \times n$ πινάκων.

21. Αναλλοίωτοι υπόχωροι. Έστω η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$. Ο υπόχωρος **U** του **V** καλείται ***αναλλοίωτος υπόχωρος*** του T ανν $T(\mathbf{U}) \subseteq \mathbf{U}$.

Συμβολισμός. Με T_U συμβολίζουμε τον ***περιορισμό*** του T επί το **U.**

ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δίδεται ο γραμμικός μετασχηματισμός $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με καθιερωμένο πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}. \text{ Τα διανύσματα } \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

αποτελούν βάση του υπόχωρου $\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^3$. Ζητάμε:

1. Να δείξουμε ότι ο **U** είναι αναλλοίωτος υπόχωρος του T.

2. Να βρούμε τον πίνακα του T_U, ως προς την βάση $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$.

Λύση. 1. Είναι $A\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\mathbf{b}_1 \in \mathbf{U}$ και

$$A\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 \in \mathbf{U}$$

2. Το τυχόν διάνυσμα $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ έχει την έκφραση $\mathbf{x} = \kappa\mathbf{b}_1 + \lambda\mathbf{b}_2$. Η δράση του περιορισμού A_U επί του $\mathbf{x}$, είναι ίδια με την δράση του A επί το $\mathbf{x}$. Άρα αυτή δίδει το $A_U\mathbf{x} = \kappa A_U\mathbf{b}_1 + \lambda A_U\mathbf{b}_2 = 2\kappa\mathbf{b}_1 + \lambda(\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2) = (2\kappa + \lambda)\mathbf{b}_1 + 2\lambda\mathbf{b}_2$ οπότε για $\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$, $(\kappa = 1,\ \lambda = 0)$, $A_U\mathbf{b}_1 = 2\mathbf{b}_1$, ενώ για $\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$ $(\kappa = 0,\ \lambda = 1)$, $A_U\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2$. Ο ζητούμενος πίνακας είναι, λοιπόν, ο

$$A_U = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Υποθέτουμε, τώρα, ότι $\mathbf{V} = \mathbf{U}_1 \oplus \mathbf{U}_2$, όπου οι υπόχωροι $\mathbf{U}$ είναι και οι δύο αναλλοίωτοι ως προς $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$. Αν διαλέξουμε την βάση του $\mathbf{V}$ έτσι ώστε αυτή να αποτελείται από δύο μέρη, το πρώτο να είναι βάση του $\mathbf{U}_1$, το δεύτερο βάση του $\mathbf{U}_2$, και εκφράσουμε τον καθιερωμένο πίνακα A της T σ' αυτές τις βάσεις, τότε ο A θα σπάσει σε δύο υποπίνακες με κοινή διαγώνιο, μορφή απλούστερη της αρχικής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δίδεται ο γραμμικός μετασχηματισμός $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ με καθιερωμένο πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -16 & -22 \\ 0 & 3 & 10 & 14 \\ 4 & 8 & 12 & 14 \end{bmatrix}$$

και τα διανύσματα $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$, $\mathbf{q}_3$, $\mathbf{q}_4$, όπου

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{q}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1. Να δείξετε ότι οι υπόχωροι $\mathbf{U}_1 = <\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2>$, $\mathbf{U}_2 = <\mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4>$ είναι αναλλοίωτοι υπόχωροι του μετασχηματισμού T.
2. Ότι $\mathbf{V} = \mathbf{U}_1 \oplus \mathbf{U}_2$.
3. Να βρεθεί ο πίνακας του T, εκπεφρασμένος στις βάσεις των $\mathbf{U}_1$, και $\mathbf{U}_2$.