Η ΜΕΤΡΙΚΗ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

1. Η μετρική του χώρου. Στην §3 ορίσαμε το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων μέσω των συντεταγμένων τους, όταν οι συντεταγμένες αυτές λαβαίνονται σε ένα Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς του $\mathbb{R}^3$. Ερχόμαστε, τώρα, στην περίπτωση ενός συστήματος αναφοράς, που αποτελείται από ένα σημείο Ο και μία τυχούσα βάση $\{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n\}$ του χώρου $\mathbb{R}^n$. Αν $\vec{x}=\sum_{i=1}^{n}x^i e_i = x^i e_i$ (στην περίπτωση, που γνωρίζουμε το πεδίον ορισμού του δείκτου, θα γράφουμε απλά $\vec{x}=x^i\vec{e}_i$, και θα νοούμε ότι ο δείκτης που επαναλαμβάνεται αθροίζεται) και $\vec{y}=\sum_{i=1}^{n}y^j e_j = x^j e_j$ τότε μπορούμε να γράφουμε ότι, $\vec{x}\vec{y}=(x^i e_i)(y^j e_j)=x^i y^j (e_i e_j)$ (1), και για να πάρει νόημα το προηγούμενο τυπικό άθροισμα των $n\times n$ όρων, θέτουμε $\vec{e}_i\vec{e}_j=\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=g_{ij}$. Φανερά, $g_{ij}=g_{ji}$. Έτσι όπως ορίσαμε την (1), την μετατρέψαμε σε μία απεικόνιση $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \ni B(\vec{x},\vec{y})=B(\vec{y},\vec{x})\to\mathbb{R}$. Η $B(\vec{x},\vec{y})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}g_{ij}x^i y^j$, (2) είναι μία ***συμμετρική διγραμμική μορφή*** την οποία, μπορούμε να γράψουμε και ως εξής, $X^t GY$, όπου X^t ο ανάστροφος πίνακας του πίνακα κολώνα των συντεταγμένων x_i του ανύσματος $\vec{x}$, και, Y ο πίνακας κολώνα των συντεταγμένων του ανύσματος $\vec{y}$.

Για παράδειγμα, η $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\ni B(\vec{x},\vec{y})=x^1y^1+(x^1y^2+y^1x^2)+2x^2y^2$, γράφεται και $(x_1,x_2)^t\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$.

Την (2) την γράφουμε και ως $B(\vec{x},\vec{y})=\sum_{i=1}^{n}g_{ii}x^iy^i+\sum_{i<j}^{n}g_{ij}(x^iy^j+x^jy^i)$ (3).

Αν στην διγραμμική μορφή (2) θέσουμε $\vec{y}=\vec{x}$, λαβαίνουμε την ***τετραγωνική μορφή*** $Q(\vec{x},\vec{x})=g_{ij}x^ix^j$ (4). Για παράδειγμα, η $B(\vec{x},\vec{y})$ του προηγούμενου παραδείγματος, δίδει την $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\ni Q(\vec{x},\vec{x})=x^1x^1+2x^1x^2+2x^2x^2$. Φανερά, για $\vec{x}\neq 0$, $Q(\vec{x},\vec{x})>0$.

Ξεκινώντας συνεπώς, από ένα Ευκλείδειο χώρο με εσωτερικό γινόμενο, όπως αυτό ορίστηκε στην §3, φθάσαμε στην τετραγωνική μορφή (4).

Ισχύει και το αντίστροφο:

Θεώρημα. Έστω ο $\mathbb{R}^n$, και $\{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n\}$ τυχούσα βάση του. Υποθέτουμε ότι έχει ορισθεί μία θετική συμμετρική γραμμική μορφή $B(\vec{x},\vec{y})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}g_{ij}x^iy^j$.

Ο τύπος, τότε, $\vec{x}\cdot\vec{y}=g_{ij}x^iy^j$ ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο επί του $\mathbb{R}^n$. Πράγματι, η απεικόνιση $B(\vec{x},\vec{y})$ έχει τις ιδιότητες που ορίζουν μία απόσταση $d(\vec{x},\vec{y})$ εν $\mathbb{R}^n$: 1. Είναι συμμετρική, $B(\vec{x},\vec{y})=B(\vec{y},\vec{x})$ 2. Διγραμμική $B(\lambda_1\vec{x}_1+\lambda_2\vec{x}_2,\vec{y})=\lambda_1B(\vec{x}_1,\vec{y})+\lambda_2B(\vec{x}_2,\vec{y})$ $B(\vec{x},\mu_1\vec{y}_1+\mu_2\vec{y}_2)=\mu_1B(\vec{x},\vec{y}_1)+\mu_2B(\vec{x},\mu_2\vec{y}_2)$ 3. $Q(\vec{x})=B(\vec{x},\vec{x})>0$.

Για τον λόγο αυτόν, η Β καλείται ***μετρική*** του χώρου ως προς την βάση $\{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n\}$ και οι συντελεστές g_{ij} καλούνται ***μετρικοί συντελεστές*** ως προς την βάση αυτή.

Η απόσταση $d(A,B)$ των σημείων $A=\overrightarrow{OA}=(a^1,\ldots a^n)^t$ και $B=\overrightarrow{OB}=(b^1,\ldots b^n)^t$, ορίζεται ως εξής: $d^2(A,B)=Q(A-B)=(a^i-b^i)g_{ij}(a^j-b^j)$. Ισχύουν βέβαια οι σχέσεις

$d(A,B) > 0$, με $d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$, $d(A,B) = d(B,A)$ και (τριγωνική ανισότητα) $d(A,\Gamma) + d(\Gamma,B) \geq d(A,B)$ (Βλέπε και ενότητα “Γεωμετρικές εφαρμογές”, §3).

Θεώρημα. (Κριτήριο του Sylvester) Μία τετραγωνική μορφή είναι θετικά ορισμένη, ανν όλες οι κύριες ορίζουσές της είναι θετικές.

Απόδειξη. Για $n = 2$ είναι, $Q(\vec{x},\vec{x}) = (x^1,x^2)^t \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \alpha(x^1)^2 + 2\beta x^1 x^2 + \gamma(x^2)^2$, με κύριες ορίζουσες $\Delta_1 = \alpha$, $\Delta_2 = \alpha\gamma - \beta^2$. Το $\alpha(x^1)^2 + 2\beta x^1 x^2 + \gamma(x^2)^2$ λαβαίνει το σημείο του α, ανν η διακρίνουσά του $-\Delta_2 < 0$.

Η γενική περίπτωση του θεωρήματος, προκύπτει ως πόρισμα του θεωρήματος αναγωγής μιάς τετραγωνικής μορφής στην κανονική της έκφραση (Βλέπε παρακάτω).

2. Συμμετρικές διγραμμικές μορφές – Τετραγωνικές μορφές. Θα εξετάσουμε το γενικό πρόβλημα της ευρέσεως μιάς βάσεως $\{\vec{e}^1,\ldots,\vec{e}^n\}$ στην οποία η τετραγωνική μορφή λαβαίνει την κανονική της έκφραση $Q(\vec{x},\vec{x}) = \lambda_i (x^i)^2$ (βλέπε §, αλγόριθμος των Gram – Schmidt) Αν C ο πίνακας του μετασχηματισμού της βάσεως $\{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n\}$ στην βάση $\{\vec{e}'_1,\ldots,\vec{e}'_n\}$, X ο πίνακας κολώνα των συντεταγμένων του $\vec{x}$ στην βάση $\{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n\}$ και X′ ο πίνακας κολώνα του $\vec{x}$ στην βάση $\{\vec{e}'_1,\ldots,\vec{e}'_n\}$, τότε, $X = CX'$, $\vec{x}^2 = X^t G X$, οπότε και

$$Q(\vec{x},\vec{x}) = X^t G X = (CX')^t G (CX') = X'^t (C^t G C) X'$$

Απ’ όπου, $G' = C^t G C$, ή και $g_{i'j'} = \gamma^i_{i'} \gamma^j_{j'} g_{ij}$.

Ορισμός. Δύο $n \times n$ πίνακες A και B, για τους οποίους ισχύει ότι $\exists P : A = P^t B P$, όπου ο P έχει $\det P \neq 0$, καλούνται ***όμοιοι***.

Η σχέση της ομοιότητος δύο πινάκων, είναι μία σχέση ισοδυναμίας. $\mathcal{R}$ πάνω στο σύνολο των $n \times n$ πινάκων $\boldsymbol{S}$. Πράγματι, ισχύουν οι $A = I^t A I$ (αυτοπαθής, I ο μοναδιαίος πίνακας). $A = P^t B P \Rightarrow B = \left(P^t\right)^{-1} A P^{-1} = \left(P^{-1}\right)^t A P^{-1}$ (συμμετρική). $A = P^t B P$ και $B = R^t C R$ τότε και $A = P^t (R^t C R) P = (RP)^t C (RP)$ όπου είναι $\det PR \neq 0$ (μεταβατική). Εξ’ άλλου, αν ο πίνακας A είναι συμμετρικός, και ο B είναι όμοιος του A, τότε και ο B θα είναι συμμετρικός πίνακας, μια και για τους συμμετρικούς πίνακες ισχύει ότι $A = A^t$. Συνεπώς η $A = P^t B P \Rightarrow A^t = P^t B^t P \Rightarrow A = P^t B^t P$ οπότε και $B = B^t$, δηλαδή, ο B είναι συμμετρικός πίνακας..

Θεωρούμε, τώρα, το σύνολο πηλίκο $\boldsymbol{S}/\mathcal{R} = \{E(B_i),\ i \in I\}$, $E(B_i)$ η κλάσης του B_i, δηλαδή, το σύνολο των όμοιων προς τον B_i πινάκων. Ισχύει τότε ότι (βλέπε ενότητα “Σύνολα” §5: $\bigcup_i E(B_i) = \boldsymbol{S}/\mathcal{R}$, $i \neq j \Rightarrow E(B_i) \cap E(B_j) = \varnothing$, $i = j \Rightarrow E(B_i) = E(B_j)$.

Θα δείξουμε ότι κάθε κλάση $E(B_i)$ περιέχει έναν διαγώνιο πίνακα, ο οποίος θα είναι και ο αντιπρόσωπος της κλάσης.. Επαγωγικά. Για $n = 1$, δεν έχουμε να δείξουμε τίποτα, μια και ο οιοσδήποτε πίνακας $[b_{11}]$ είναι διαγώνιος. Υποθέτουμε, τώρα, ότι κάθε υποσύνολο $E(B_1) \subset E(B)$ των $(n-1)\times(n-1)$ συμμετρικών πινάκων, περιέχει έναν διαγώνιο πίνακα. Έστω, τώρα, ο $n \times n$ πίνακας $A = [a_{ij}] \in E(A)$, και έστω $Q(\vec{x},\vec{x}) = a_{ij} x^i x^j$ η τετραγωνική μορφή που προκύπτει από την διγραμμική μορφή $B(\vec{x},\vec{y}) = x^i a_{ij} y^j = (AX)\cdot Y$, τα διανύσματα $\vec{x} = x^i e_i$, $\vec{y} = y^j e_j$ εκφρασμένα στην κανονική βάση $\vec{e}$. Για την διγραμμική μορφή B μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει διάνυσμα $\vec{x}_1$ τέτοιο ώστε $B(\vec{x}_1,\vec{x}_1) \neq 0$, μια και αν

$\forall\vec{x}_1,\ B(\vec{x}_1,\vec{x}_1)=0$, τότε και $B(\vec{x}_1,\vec{y})=\frac{1}{2}\{B(\vec{x}_1+\vec{y},\vec{x}_1+\vec{y})-B(\vec{x}_1,\vec{x}_1)-B(\vec{y},\vec{y})\}=0$, για κάθε $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$, οπότε και $A=[a_{ij}]=0$, και ο A διαγώνιος. Εκλέγουμε αυτό το $\vec{x}_1$ σαν το πρώτο διάνυσμα της νέας βάσης του $\mathbb{R}^n$ που θα κατασκευάσουμε, και ως προς την οποία η διγραμμική μας μορφή θα έχει λάβει την διαγώνιο έκφραση. Για να βρούμε τα υπόλοιπα στοιχεία της νέας βάσης, θεωρούμε το σύνολο Z των διανυσμάτων $\vec{z}\in\mathbb{R}^n$, που είναι "ορθογώνια" προς το $\vec{x}_1$, δηλαδή, που για τα οποία ισχύει ότι $B(\vec{x}_1,\vec{z})=0$. Το σύνολο Z αποτελεί γραμμικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$ με $\dim Z=n-1$. Εκλέγουμε, τώρα, εκείνη την βάση $\{\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_n\}$ του Z, ως προς την οποία,από την υπόθεση της επαγωγής, ο A είναι όμοιος προς διαγώνιο πίνακα . Θεωρούμε το $\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_n\}$, που θα είναι η νέα βάση του $\mathbb{R}^n$. Ως προς αυτήν την βάση έχουμε ότι, $Q(\vec{x})=B(\vec{x},\vec{x})=x^i a_{ij} x^j$, όπου $a_{ij}=\vec{x}_i\cdot\vec{x}_j$. Όμως για $2\le i,j\le n,\ a_{ij}=\delta_{ij}$ (από την υπόθεση της επαγωγής) ενώ για $1\le i\le n$ λόγω καθετότητας του $\vec{x}_1$ ως προς τα υπόλοιπα στοιχεία της βάσης, $a_{i1}=\delta_{i1}$ (και λόγω συμμετρίας $1\le j\le n\ \ a_{1j}=\delta_{1j}$). Άρα ο A όμοιος προς διαγώνιο πίνακα $A=[a_{ij}]$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Δίδεται η συμμετρική διγραμμική μορφή

$$B(\vec{x},\vec{y})=\left(x^1,x^2,x^3\right)^t\begin{pmatrix}0&4&3\\4&2&1\\3&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y^1\\y^2\\y^3\end{pmatrix}$$

Από την οποία λαμβάνουμε την τετραγωνική μορφή $Q(\vec{x})=2x^{2^2}+8x^1x^2+6x^1x^3+2x^2x^3$ Ένα διάνυσμα $\vec{x}_1$ για το οποίο $Q(\vec{x}_1)\ne 0$, είναι το $\vec{x}_1=(0,1,0)$, για το οποίο $Q(\vec{x}_1)=2$. Βρίσκουμε όλα τα κάθετα στο $\vec{x}_1$ διανύσματα του $\mathbb{R}^3$, τα οποία και αποτελούν τον γραμμικό υπόχωρο Z. Αν $\vec{z}\in Z$ είναι και $B(\vec{x}_1,\vec{z})=\left(0,1,0\right)^t\begin{pmatrix}0&4&3\\4&2&1\\3&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z^1\\z^2\\z^3\end{pmatrix}=0$, απ' όπου έχουμε $4z^1+2z^2+z^3=0$. Ο Z είναι, λοιπόν, ο χώρος που παράγουν τα $\vec{x}_2=(1,0,-4)$ και $\vec{x}_3=(1,-2,0)$. Τα διανύσματα $\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3\}$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$, και, επιπλέον, $\vec{x}_1\perp Z$. Αντικαθιστούμε τα $\vec{x}_2,\vec{x}_3$ από τα $\vec{x}_2,\vec{x}'_3=\vec{x}_2+\lambda\vec{x}_3$, όπου $\vec{x}'_3\perp\vec{x}_2$ ως προς B. Προσδιορίζουμε το λ, έτσι ώστε $B(\vec{x}_2,\vec{x}_2+\lambda\vec{x}_3)=B(\vec{x}_2,\vec{x}_2)+\lambda B(\vec{x}_2,\vec{x}_3)=0$, ή $-24-12\lambda=0$ ή $\lambda=-2$ ή (νέο) $\vec{x}_3=\vec{x}_2-2\vec{x}_3=(1,0,-4)-2(1,-2,0)=(-1,4,-4)$.

Ως προς την βάση $\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3\}$του $\mathbb{R}^3$, έχουμε ότι, $i\ne j\Rightarrow B(\vec{x}_i,\vec{x}_j)=0$, οπότε το τυχόν $\vec{x}\in\mathbb{R}^3$, $\vec{x}=\kappa_1\vec{x}_1+\kappa_2\vec{x}_2+\kappa_3\vec{x}_3$ θα έχει

$$\|\vec{x}\|=Q(\vec{x})=B(\vec{x},\vec{x})=\kappa_1^2B(\vec{x}_1,\vec{x}_1)+\kappa_2^2B(\vec{x}_2,\vec{x}_2)+\kappa_3^2B(\vec{x}_3,\vec{x}_3)=2\kappa_1^2-24\kappa_2^2-8\kappa_3^2.$$

Ο πίνακας $B=\begin{pmatrix}0&4&3\\4&2&1\\3&1&0\end{pmatrix}$ της διγραμμικής μορφής $B(\vec{x},\vec{y})$, είναι, λοιπόν, όμοιος προς τον διαγώνιο πίνακα $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-24&0\\0&0&-8\end{pmatrix}$. Πράγματι, για $P=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&4\\0&-4&-4\end{pmatrix}$

$$P^tBP=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-4\\-1&4&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&4&3\\4&2&1\\3&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&4\\0&-4&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-24&0\\0&0&-8\end{pmatrix}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Στον $\mathbb{R}^2$ δίδεται η τετραγωνική μορφή $2(\chi)^2+2(\chi\psi)+(\psi)^2$. Να βρεθεί μία βάση, στην οποία η μορφή αυτή λαβαίνει την κανονική της έκφραση.

Λύση. Στο αρχικό σύστημα αναφοράς $O,\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ του χώρου μου, είναι, $\vec{x}=\chi\vec{e}_1+\psi\vec{e}_2$ και η $Q(\vec{x},\vec{x})=X^tGX$ έχει πίνακα $G=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$. Θα βρούμε μία άλλη βάση, έτσι ώστε στο νέο σύστημα αναφοράς $O,\{\vec{e}_1',\vec{e}_2'\}$, με $\vec{x}=\chi'\vec{e}_1'+\psi'\vec{e}_2'$, να έχουμε την έκφραση $Q(\vec{x},\vec{x})=X'^tG'X'=\chi'^2+\psi'^2$, με $G'=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. Ενεργώντας στοιχειώδεις πράξεις επί των γραμμών του πίνακα G, λαβαίνουμε, σχηματικά,

$$\begin{pmatrix}2&1&*&1&0\\1&1&*&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1/2&*&1/2&0\\1&1&*&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1/2&*&1/2&0\\0&1/2&*&-1/2&1\end{pmatrix}$$

Θέτουμε $C=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}$ οπότε ,

$$C^tGC=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$$

Είναι, λοιπόν, $X'^tG'X'=(CX)^tG(CX)=X^t(C^tGC)X=2(\chi^2+\psi^2)$.

Ο γραμμικός μετασχηματισμός $X=CX'$ γράφεται και στην μορφή του συστήματος

$$\begin{pmatrix}\chi\\\psi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi'\\\psi'\end{pmatrix}\quad \text{ή και}\quad \begin{matrix}\chi=\chi'-\psi'\\\psi=\ \ 2\psi'\end{matrix}\qquad (5)$$

Ας δούμε, τώρα, το πως μετασχηματίζεται ένα υπερεπίπεδο του $\mathbb{R}^n$ (επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$) όταν αλλάζει η μετρική του χώρου, οπότε και το σύστημα αναφοράς από το "αρχικό" σύστημα O, $\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\}$, καταλήγει στο "τελικό" $O\{\vec{e}'^1,\dots,\vec{e}'^n\}$, .

Η εξίσωση του υπερεπιπέδου που διέρχεται από το σημείο $A=(\alpha^1,\dots,\alpha^n)$ στην βάση (αρχική) $\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\}$ είναι η $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AX}$, απ' όπου και η έκφραση $A_ix^i+B=0$ (6). Ο μετασχηματισμός $X=CX'$ είναι ισοδύναμος με το σύστημα $\chi^i=\gamma^i_k\chi'^k$ και η (6) γίνεται $A_i\gamma^i_kx'^k+B=0$, ή $A_k'x'^k+B=0$, όπου $A_k'=A_i\gamma^i_k$.

Η καθετότης δύο διανυσμάτων $\vec{n}$ και $\vec{e}$ σε κάποιο σύστημα αναφοράς, εκφράζεται από την σχέση $B(\vec{n},\vec{e})=0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (συνέχεια του προηγουμένου). Στο αναφερόμενο αρχικό σύστημα αναφοράς έχουμε την ευθεία ε: $3\chi+4\psi+10=0$. Ο μετασχηματισμός (5) μας δίδει την έκφραση της ε: στο νέο σύστημα αναφοράς. $\varepsilon':3(\chi'-\psi')+4(2\psi')+10=0$ ή $\varepsilon':3\chi'+5\psi'+10=0$.

Υποθέτουμε, ακόμα, ότι μου δίδεται και το σημείο $A=(1,1)$, το οποίο στο νέο σύστημα αναφοράς είναι το $A'=\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Στο νέο σύστημα η κάθετος στην ευθεία ε΄ που διέρχεται από το σημείο Α΄ έχει εξίσωση $-5\left(\chi'-\frac{3}{2}\right)+3\left(\psi'-\frac{1}{2}\right)=0$, ή και κ΄: $5\chi'-3\psi'-6=0$.

Πράγματι, κατά μήκος των ευθειών ε΄: και κ΄: κείνται τα διανύσματα $\vec{e}'=(-5,3)$ και $\vec{n}'=(3,5)$. Είναι, $B(\vec{e}',\vec{n}')=2((-5)\times 3+3\times 5)=0$

Στο αρχικό σύστημα αναφοράς, η κ΄: λαβαίνει την μορφή κ: $5\chi+\psi-6=0$. Παρατηρούμε ότι, το σημείο Α ευρίσκεται πάνω στην κ:. Η τομή της κ: με την ε: είναι το σημείο $B=(2,-4)$. Στο νέο σύστημα είναι, $B'=(0,-2)$ και το σημείο αυτό, βρίσκεται πάνω στην κ΄. Στο αρχικό σύστημα, η καθετότης εκφράζεται από την συνθήκη $B(\vec{e},\vec{n})=0$, όπου B η διγραμμική μορφή $B(\vec{x},\vec{y})=g_{11}x^1y^1+g_{12}x^1y^2+g_{21}x^2y^1+g_{22}x^2y^2$. Στο παράδειγμά μας είναι, $g_{11}=2,\ g_{12}=g_{21}=1,\ g_{22}=1$, $\vec{e}=(-4,3)$, $\vec{n}=(-1,5)$, οπότε και $B(\vec{e},\vec{n})==0$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Η εξίσωση ενός υπερεπιπέδου που διέρχεται από το σημείο $\overrightarrow{OX_0}$ γράφεται και στην μορφή $\vec{n}\cdot\overrightarrow{X_0X}=0$ (7), όπου το εσωτερικό γινόμενο καθορίζεται από την μετρική του χώρου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Δίδεται ο $\mathbb{R}^2$ με μετρική την $B(\vec{x},\vec{y})=2x^1y^1+x^1y^2+x^2y^1+2x^2y^2$. Ζητάμε να βρούμε την απόσταση του σημείου O (αρχή των συντεταγμένων) από την ευθεία ε: $\chi-\psi+1=0$.

Λύση. Γράφουμε την ευθεία στην μορφή (7): Ένα σημείο επί της ευθείας είναι το $\overrightarrow{OX_0}=(0,1)$, $\overrightarrow{OX_1}=(1,0)$. Είναι, λοιπόν $\vec{x}=\overrightarrow{X_0X_1}=(1,-1)$. Ζητάμε να βρούμε ένα $\vec{n}=(\nu_\chi,\nu_\psi)$ τέτοιο ώστε $B(\vec{x},\vec{n})=0$. Θέτουμε $\nu_\chi=1$, οπότε και, $\nu_\psi=0$. Η κάθετος προς την ε: από το σημείο O, είναι, λοιπόν, η $\overrightarrow{OX}=\lambda\vec{n}$ η οποία τέμνει την ε: στο σημείο $\vec{b}=(-1,0)$. Η ζητουμένη απόσταση είναι $Q(\vec{b},\vec{b})=1$

3. Αναγωγή τετραγωνικής μορφής στην κανονική της έκφραση. Τα δεδομένα μας είναι: Ο χώρος $\mathbb{R}^n$, η συμμετρική διγραμμική μορφή $B(\vec{x},\vec{y})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}g_{ij}x^iy^j$, από την οποία προκύπτει η τετραγωνική μορφή $Q(\vec{x})=B(\vec{x},\vec{x})=g_{ij}x^ix^j$ (οι επαναλαμβανόμενοι δείκτες, αθροίζονται), όπου $g_{ij}=B(\vec{x}_i,\vec{x}_j)$, $\{\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n\}$ βάση του $\mathbb{R}^n$. Ζητάμε να προσδιορίσουμε μια νέα βάση $\{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n\}$ στην οποία για $1\le i,j\le n$, $i\ne j\Rightarrow g_{ij}=0$.

Θέτουμε $\Delta_0=1,\Delta_1=g_{11}\ne 0,\Delta_2=\det\begin{pmatrix}g_{11}&g_{12}\\g_{21}&g_{22}\end{pmatrix}\ne 0$, $\Delta_3=\det\begin{pmatrix}g_{11}&g_{12}&g_{13}\\g_{21}&g_{22}&g_{23}\\g_{31}&g_{32}&g_{33}\end{pmatrix}\ne 0,\ldots,$

$\Delta_n = \det\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$. Αν κάποια από τις προηγούμενες ορίζουσες είναι μηδέν, (π.χ. η $\Delta_1 = 0$, τότε, μια αλλαγή της βάσης, με πίνακα $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, θα εξασφάλιζε το $\Delta_1 \neq 0$. Η νέα βάση $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ σχετίζεται με την παλαιά $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ (λόγω συμμετρίας $p_{ij} = p_{ji}$) από τις ισότητες

$$\begin{array}{lllllllll} \vec{e}_1 & = & p_{11}\vec{x}_1 & & & & & & \\ \vec{e}_2 & = & p_{21}\vec{x}_1 & + & p_{22}\vec{x}_2 & & & & \\ \vdots & & & & & & & & \\ \vec{e}_k & = & p_{k1}\vec{x}_1 & + & p_{k2}\vec{x}_2 & + & p_{k3}\vec{x}_3 & & \\ \vdots & & & & & & & & \\ \vec{e}_n & = & p_{n1}\vec{x}_1 & + & p_{n2}\vec{x}_2 & + & p_{n3}\vec{x}_3 & + & \dots\ p_{nn}\vec{x}_n \end{array} \qquad (1)$$

και θα πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι $1 \le i, j \le n,\ i \neq j \Rightarrow B(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0$ (2). Η (1) ισχύει, ανν η $1 \le i, j \le n,\ i \neq j \Rightarrow B(\vec{e}_i, \vec{x}_j) = 0$ (3) ισχύει, μια και κάθε $\vec{x}_j$ είναι γραμμική εξάρτηση των $\vec{e}_i$. Η απόδειξη δεν αλλάζει, αν επιπλέον ισχει ότι $1 \le i, j \le n,\ i = j \Rightarrow B(\vec{e}_i, \vec{x}_j) = 1$. Του προηγουμένου συστήματος (1), η πρώτη εξίσωση δίδει $B(\vec{e}_1, \vec{x}_1) = p_{11}B(\vec{x}_1, \vec{x}_1) = p_{11}g_{11}$, απ' όπου $p_{11} = \frac{1}{g_{11}} = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}$. Από την δεύτερη εξίσωση του (1) έχουμε,

$$B(\vec{e}_2, \vec{x}_1) = p_{21}B(\vec{x}_1, \vec{x}_1) + p_{22}B(\vec{x}_2, \vec{x}_1) = p_{21}g_{11} + p_{22}g_{21} = 0,$$
$$B(\vec{e}_2, \vec{x}_2) = p_{21}B(\vec{x}_1, \vec{x}_2) + p_{22}B(\vec{x}_2, \vec{x}_2) = p_{21}g_{12} + p_{22}g_{22} = 1.$$

Η λύση του συστήματος αυτού δίδει

$$p_{21} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & g_{21} \\ 1 & g_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{21} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix}} = \frac{g_{21}}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}} \quad \text{και} \quad p_{22} = \frac{\begin{vmatrix} g_{11} & 0 \\ g_{12} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{21} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix}} = \frac{g_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}}$$

Με παρόμοιο τρόπο, υπολογίζουμε όλους τους σύντελεστές p_{ij} και, συνεπώς, τον μετασχηματισμό (1). Παρατηρούμε ότι, ο πίνακας P του μετασχηματισμού αυτού είναι τριγωνικός, και, συνεπώς, $\det(p_{ij}) = p_{11}p_{22}\cdots p_{nn} = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\cdots\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} = \frac{1}{\Delta_n} \neq 0$, άρα ο μετασχηματισμός που έχει πίνακα P είναι ένα προς ένα (μετασχηματισμός αλλαγής βάσης).
Για την τετραγωνική μορφή $Q(\vec{x})$, όταν αυτή εκφράζεται στην βάση $\overline{e}$ έχουμε ότι,

$$Q(\vec{x}') = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}(x'^1)^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}(x'^2)^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}(x'^n)^2 \quad (4)$$

όπου $1 \le i \le n,\ x'^i$, οι συντεταγμένες του $\vec{x}' = P\vec{x}$ στην βάση $\overline{e}$.

Σημείωση. Πάνω δείκτες: Πρόκειται για συντεταγμένες διανύσματος, που αποτελούν ένα πίνακα κολώνα. Κάτω δείκτες: πρόκειται για διανύσματα. Όπως θα δούμε σε μιαν άλλη ενότητα, το αν οι δείκτες θα είναι πάνω ή κάτω, έχει να κάνει με τον τρόπο που μετασχηματίζεται η ποσότης που παριστούν. Covariant μετασχηματισμός αν οι δείκτες είναι κάτω, contravariant, αν οι δείκτες είναι άνω.

Το πλήθος των θετικών όρων της (4) καλείται ***θετικός δείκτης***. Ο πλήθος των αρνητικών όρων της (4) καλείται ***αρνητικός δείκτης***.

ΘΕΩΡΗΜΑ (αδρανείας). Οι θετικοί και αρνητικοί δείκτες μιας τετραγωνικής μορφής, αποτελούν αναλλοιώτους της μορφής. (Δηλαδή, είναι ανεξάρτητοι της βάσεως στην οποία εκφράζεται η τετραγωνική μορφή)
Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η $Q(\vec{x}) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^k)^2 - (x^{k+1})^2 \ldots - (x^n)^2$ έχει στην βάση $\overline{x}$ θετικό δείκτη $p = k$ και αρνητικό δείκτη $q = n - k$, με $p > q$.
(1) Μετάβαση από την βάση $\overline{x}$ στην βάση $\overline{x'}$ μέσω του μετασχηματισμού $\vec{x}' = P\vec{x}$. Έχουμε, $Q(\vec{x}') = (x'^1)^2 + (x'^2)^2 + \ldots + (x'^r)^2 - (x'^{r+1})^2 \ldots - (x'^n)^2$. Ισχύει ότι $\vec{x}' = P\vec{x}$, $Q(\vec{x}') = X'^t I_{p'} X'$, όπου $X'^t = (x'^1, \ldots, x'^r, \ldots, x'^n)$ και $I_{p'}$ ένας "μοναδιαίος" πίνακας, που έχει τα πρώτα διαγώνια στοιχεία p' το πλήθος ίσα με 1, και τα υπόλοιπα q' το πλήθος στοιχεία ίσα με -1. P ο πίνακας αλλαγής βάσης, με $\det P \neq 0$.
Έχουμε, $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ότι $X^t I_p X = Q(P\vec{x}) = X'^t I_{p'} X' = (PX)^t I_{p'} (PX) = X^t (P^t I_{p'} P) X$, άρα και, $I_p = P^t I_{p'} P$. Είναι $\det(P^t I_{p'} P) = \det(P)^2 \det(I_{p'}) = \det(I_p)$. Οι ορίζουσες, συνεπώς των πινάκων I_p, $I_{p'}$ έχουν και οι δύο είτε την τιμή 1, είτε την τιμή -1. Άρα $p - p' = 2$.
(2) Μετάβαση από την βάση $\overline{x'}$ στην βάση $\overline{x}$ μέσω του μετασχηματισμού $\vec{x} = P^{-1}\vec{x}'$. Στο συμπέρασμα $p' - p = 2$ καταλλήγουμε αν θέσουμε $\vec{x} = P^{-1}\vec{x}'$. Άρα αναγκαστικά, $p = p'$ και $q = q'$.

4. Ορθοκανονικά συστήματα συναρτήσεων. Ένα σύνολο $S = \{f_1, \ldots, f_p, \ldots\}$ ολοκληρώσιμων πραγματικών συναρτήσεων, ορισμένων στο $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)g(x)dx$ καλείται ***εσωτερικό γινόμενο*** των συναρτήσεων f και g, και παρίσταται με το $f \cdot g$. Η ***norm*** της f ορίζεται από την σχέση $\|f\| = +\sqrt{f \cdot f}$ (1).
Ισχύουν οι σχέσεις: 1.Συμμετρική, $f \cdot g = g \cdot f$ 2 Ομμογενής $\gamma(f \cdot g) = (\gamma f) \cdot g = f \cdot (\gamma g)$, γ σταθερά, 3. Διγραμμική $(f_1 + f_2) \cdot g = f_1 \cdot g + f_2 \cdot g$ και $f \cdot (g_1 + g_2) = f \cdot g_1 + f \cdot g_2$.
Η ανισότης των Cauchy-Schwartz ισχύει λόγω (1). Πράγματι, θέτουμε $\vec{a} = f(x)$ και $\vec{b} = g(x)$.Θεωρούμε την $f(t) = (\vec{a} + \vec{b}t)^2$. Είναι, φανερά, $f(t) \geq 0$. Άρα, και $(\vec{a} \cdot \vec{a})t^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b})t + (\vec{b} \cdot \vec{b}) \geq 0$. Η διακρίνουσα συνεπώς του $f(t)$ είναι ≤ 0. Είναι, λοιπόν, $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 - (\vec{a} \cdot \vec{a})(\vec{b} \cdot \vec{b}) \leq 0$, (2) ή $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)^2 dx\right)\left(\int_a^b g(x)^2 dx\right)$ που είναι και η ανισότητα των Cauchy-Schwartz. Από την (2) προκύπτει η τριγωνική ανισότητα (βλέπε "Γεωμετρικές εφαρμογές", §3) ή ανισότητα του Minkowski, $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$. Έχουμε επίσης την σχέση $\|f + g\|^2 = (f + g) \cdot (f + g) = \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\|f \cdot g\|$. Συνεπώς, η εξίσωση $\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$ (3) ισχύει αν και μόνον αν $\forall x \in [a, b]$, $f \cdot g = 0$, οπότε και λέμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ορθογώνιες. Η (3) είναι βέβαια, το θεώρημα του Πυθαγόρα.

Το σύνολο S καλείται ***ορθογώνιο σύστημα*** συναρτήσεων, ανν $m \neq n \Rightarrow f_m \cdot f_n = 0$ και ***ορθοκανονικό σύστημα*** ανν $f_m \cdot f_n = \begin{cases} 0 \text{ ανν } m \neq n \\ 1 \text{ ανν } m = n \end{cases}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο C των πραγματικών συναρτήσεων που ορίζονται στο κλειστό διάστημα $[0, 2\pi]$ (βλέπε ενότητα "Γραμμικοί χώροι" §2 παράδειγμα 4). Ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο των συναρτήσεων $f, g \in C$ μέσω της ισότητας $f \cdot g = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$. Θεωρούμε, ακόμα, και το σύνολο των τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$S = \{u_o = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ u_1 = \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ u_2 = \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \ldots,\ u_{2n-1} = \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\ u_{2n} = \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\ \ldots\ \}$$

για $n = 1, 2, \ldots$. Ως γνωστόν, κάθε $f \in C$ αναλύεται κατά Fourier και παρίσταται ως σειρά

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad \text{όπου}$$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2p} f(t)\cos nt dt,\ \ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2p} f(t)\sin nt dt$. Το S είναι συνεπώς, μία ορθοκανονική βάση του γραμμικού χώρου C, μια και $u_n \cdot u_m = \int_0^{2\pi} u_n(x)u_m(x)dx = \delta_{n,m}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Έστω P_n ο χώρος των πολυωνυμικών συναρτήσεων $x(t),\ t \in \mathbb{R}$ μέχρι και n βαθμού (βλέπε ενότητα "Γραμμικοί Χώροι"), με norm το $\int_{-1}^{1} x(t)y(t)dt$. Εφαρμόζουμε στο σύνολο $\{t^0, t, t^2, \ldots, t^n\}$ των πολυωνύμων, τον αλγόριθμος των Gram – Schmidt (βλέπε ενότητα "Γεωμετρικές εφαρμογές"), έτσι ώστε το σύνολο αυτό να μετατραπεί σε ένα ορθοκανονικό σύστημα. Έχουμε,

$$y_0(t) = t^0 = 1,\ \ y_1(t) = t - \frac{\int_{-1}^{1} t y_0(t)dt}{\int_{-1}^{1} y_0(t)y_0(t)dt} t^0 = t,\ \ y_2(t) = t^2 - \frac{1}{3},\ \ y_3(t) = t^3 - \frac{3}{5}t, \ldots$$

(πολυώνυμα του Legendre).

5. Απειροδιάστατοι γραμμικοί χώροι. Η έννοια του γραμμικά εξαρτημένου συνόλου μεταφέρεται αυτούσια και στον γραμμικό χώρο $\mathcal{F}$ των πραγματικών συναρτήσεων, που ορίζονται πάνω σε ένα κλειστό διάστημα των πραγματικών αριθμών (βλέπε ενότητα «Γραμμικοί Χώροι», §2 Παράδειγμα 4). Λέμε ότι το σύνολο των μη μηδενικών συναρτήσεων $\{f_0, \ldots, f_p\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο, ανν υπάρχουν σταθερές $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$ που να μην είναι όλες μηδέν, σε τρόπο ώστε $\forall x \in [a, b],\ \gamma_0 f_0(x) + \ldots + \gamma_p f_p(x) = 0$. Κάθε μη γραμμικά εξαρτημένο σύνολο, καλείται σύνολο γραμμικά ανεξάρτητο. Κάθε ορθογώνιο σύστημα $S = \{f_0, \ldots, f_n, \ldots\}$, είναι σύνολο γραμμικά ανεξάρτητο. Πράγματι, αν ανάμεσα σε οιαδήποτε από τα στοιχεία του S είχαμε μία σχέση γραμμικής εξαρτήσεως $\gamma_0 f_0(x) + \ldots + \gamma_p f_p(x) = 0$, το εσωτερικό γινόμενο της σχέσεως αυτής διαδοχικά επί $f_k(x),\ 0 \leq k \leq p$, δίδει τις σχέσεις $\gamma_k f_k \cdot f_k = 0,\ 0 \leq k \leq p$ και επειδή $\forall x \in [a, b],\ f_k(x) \neq 0,\ 0 \leq k \leq p$, έπεται ότι $\gamma_k = 0$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Είναι δυνατόν το S να χρησιμοποιηθεί για βάση του $\mathcal{F}$; Αν κάτι τέτοιο συμβαίνει, η f θα εκφράζεται ως σειρά, $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n f_n(x)$. Αυτό συμβαίνει, στην περίπτωση που η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα εν $[a,b]$. Έστω, λοιπόν, $f(x)$ το άθροισμα αυτής της σειράς. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη (κατά Riemann), και, συνεπώς οι συντελεστές γ_n υπολογίζονται από τις σχέσεις $\gamma_n = f\cdot f_n = \int_a^b f(x)f_n(x)dx$. Οι κατ' αυτόν τον τρόπο υπολογισμένοι συντελεστές γ_n, καλούνται και ***συντελεστές Fourier***.

ΠΡΟΤΑΣΗ. (Ανισότης του Bessel). Έστω το ορθοκανονικό σύστημα $S=\{f_0,\ldots,f_n,\ldots\}$ και $f\in\mathcal{F}$, με $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n f_n(x)$. Έστω $s_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\gamma_k f_k(x)$ ένα μερικό άθροισμα της σειράς και $\beta_k\in\mathbb{R},\ k\geq 0$ σταθερές. Σχηματίζουμε και τα αθροίσματα $t_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\beta_k f_k(x),\ n\geq 0$. Ισχύει τότε η ισότης $\int_a^b |f(x)-t_n(x)|^2 dx = \int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_{k=0}^{n}|\gamma_k|^2 + \sum_{k=0}^{n}|\gamma_k-\beta_k|^2$ (1), απ' όπου προκύπτει η ανισότητα $\int_a^b |f(x)-s_n(x)|^2 dx = \int_a^b |f(x)-t_n(x)|^2 dx$, μια και η ελαχίστη τιμή της προηγούμενης ισότητας λαβαίνεται όταν $\beta_k=\gamma_k,\ k\geq 0$.

Σημείωση. Γράφουμε ισοδύναμα και $\int_a^b |f(x)-s_n(x)|^2 dx = \|f-s_n\|^2$

Απόδειξη. Είναι

$$\int_a^b |f(x)-t_n(x)|^2 dx = \|f-t_n\|^2 = (f-t_n)\cdot(f-t_n) = f\cdot f - f\cdot t_n - t_n\cdot f + t_n\cdot t_n. \quad (2)$$

Όμως $t_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\beta_k f_k(x)$ και

$$t_n(x)\cdot t_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{n}\beta_k f_k(x)\right)\left(\sum_{l=0}^{n}\beta_l f_l(x)\right) = \sum_{k,l=0}^{n}\beta_k\beta_l f_k(x) f_l(x) = \sum_{k=0}^{n}|\beta_k|^2$$

Επίσης

$$f\cdot t_n(x) = f\cdot\left(\sum_{k=0}^{n}\beta_k f_k(x)\right) = \sum_{k=0}^{n}\beta_k f(x)\cdot f_k(x) = \sum_{k=0}^{n}\beta_k\gamma_k = t_n(x)\cdot f$$

και

$$f\cdot f = \int_a^b\left(\sum_{m=0}^{\infty}\gamma_m f_m(x)\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n f_n(x)\right)dx = \int_a^b\sum_{m,n=0}^{\infty}\gamma_m\gamma_n f_m(x) f_n(x)dx = \int_a^b\sum_{k=0}^{\infty}(\gamma_k f_k)^2 dx = \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

Αντικαθιστούμε στην (2) τα εσωτερικά γινόμενα με τα αθροίσματά τους, και προκύπτει η (1).

6. Ανισότης του Bessel. Έστω $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n f_n(x)$ ως προηγουμένως. Τότε

1. Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}|\gamma_n|^2$ συγκλίνει και ισχύει ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\gamma_n|^2 \le \int_a^b |f(x)|^2 dx \quad \text{(ανισότης του Bessel).}$$

2. Η εξίσωση

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\gamma_n|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx \quad \text{(τύπος του Parseval)}$$

αν και μόνον αν,

$$\lim_{n\to\infty}\|f - s_n\| = 0,$$

Δηλαδή, αν και μόνον αν,

$$\|f(x)\|^2 = \gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \ldots + \gamma_n^2 + \ldots$$

Σχέση ανάλογη της

$$|\vec{x}| = x_1^2 + \ldots + x_n^2$$

όπου $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Ορισμός. Το ορθοκανονικό σύστημα $S = \{f_0, \ldots, f_n, \ldots\}$ θα λέγεται πλήρες, αν και μόνον αν για κάθε πραγματική συνάρτηση (Riemann ολοκληρώσιμη) που ορίζεται στο $[a, b]$, έχουμε την έκφραση $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n f_n(x)$.

7. Προβολές. Προσέγγιση συναρτήσεως. Όταν αναφερόμεθα σε έναν ευκλείδειο χώρο, θα εννοούμε έναν γραμμικό χώρο εφοδιασμένο με norm. Αν S υπόχωρος ευκλείδειου χώρου V, το διάνυσμα $\vec{x} \in V$ θα λέμε ότι είναι ορθογώνιο (κάθετο) προς τον S, αν και μόνον αν είναι ορθογώνιο προς κάθε διάνυσμα του S. Φανερά, το $\vec{x} \notin S$, μια και δεν είναι δυνατόν αυτό να είναι ορθογώνιο προς τον εαυτό του. Το σύνολο των ορθογωνίων προς τον S διανυσμάτων αποτελεί το ορθογώνιο συμπλήρωμα $S^{\perp}$ του S. Η ***προβολή*** του διανύσματος $\vec{x}$ στον υπόχωρο S, είναι εξ' ορισμού το $\vec{s} = \sum_{i=1}^{n}(\vec{x}\cdot\vec{e}_i)\vec{e}_i$, όπου $\{\vec{e}_i, 1 \le i \le n\}$ βάση του S.

ΠΡΟΤΑΣΗ. Αν S υπόχωρος του V με πεπερασμένη διάσταση, και $\vec{x} \in V - S$, τότε και $\vec{x} = \vec{s} + \vec{s}^{\perp}$ όπου $\vec{s} \in S$ και $\vec{s}^{\perp} \in S^{\perp}$.

Απόδειξη. Έστω $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ ορθοκανονική βάση του S. Με κάθε $\vec{x} \in V - S$, θεωρούμε και τα διανύσματα $\vec{s} = \sum_{i=1}^{n}(\vec{x}\cdot\vec{e}_i)\vec{e}_i$, και $\vec{s}^{\perp} = \vec{x} - \vec{s}$. Φανερά, $\vec{s} \in S$ και $\vec{x} = \vec{s} + \vec{s}^{\perp}$. Απομένει να δείξουμε, ότι $\vec{s}^{\perp} \in S^{\perp}$.

Είναι, $\forall i, \vec{x}\cdot\vec{e}_i = (\vec{s} + \vec{s}^{\perp})\cdot\vec{e}_i = \vec{s}\cdot\vec{e}_i + \vec{s}^{\perp}\cdot\vec{e}_i$, δηλαδή, $\forall i,\ \vec{s}^{\perp}\cdot\vec{e}_i = \vec{x}\cdot\vec{e}_i - \vec{s}\cdot\vec{e}_i$. Όμως, από τον ορισμό του $\vec{s}$ και το γεγονός ότι η βάση είναι ορθοκανονική, έπεται ότι $\forall i,\ \vec{s}\cdot\vec{e}_i = \vec{x}\cdot\vec{e}_i$.

Το Πυθαγόρειο θεώρημα, ισχύει για το μήκος $|\vec{x}|$ (norm) του $\vec{x}$, μια και $|\vec{x}|^2 = |\vec{s}|^2 + |s^{\perp}|^2$.

Πράγματι, $|\vec{x}|^2 = \vec{x}\cdot\vec{x} = (\vec{s} + \vec{s}^{\perp})\cdot(\vec{s} + \vec{s}^{\perp}) = |\vec{s}|^2 + |\vec{s}^{\perp}|^2$.

Θεώρημα. Έστω V απειροδιάστατος Ευκλείδειος χώρος. S πεπερασμένης διαστάσεως υπόχωρος του V**.** $\vec{x}$ τυχόν σημείο του V**.** Αν $\vec{s}$ η προβολή του $\vec{x}$ επί του S, ισχύει ότι, $|\vec{x} - \vec{s}| \le |\vec{x} - \vec{t}|$, $\forall \vec{t} \in S$, και $\vec{s} - \vec{t} \in S$. Ισότητα έχουμε αν και μόνον αν $\vec{t} = \vec{s}$.

Απόδειξη. Η προηγούμενη πρόταση δίδει την $\vec{x} = \vec{s} + \vec{s}^{\perp}$. Είναι, $\vec{x} - \vec{t} = (\vec{x} - \vec{s}) + (\vec{s} - \vec{t})$ (1). Άρα και $\vec{x} - \vec{t} = \vec{s}^{\perp} + (\vec{s} - \vec{t})$ ή και $\vec{x} - \vec{s} = \vec{s}^{\perp} \in S^{\perp}$. Εξ' άλλου $\vec{s} - \vec{t} \in S$. Η (1) παριστά λοιπόν, μια διάσπαση του $\vec{x} - \vec{t}$ σε δύο ορθογώνια διανύσματα. Το θεώρημα του Πυθαγόρα δίδει την $|\vec{x} - \vec{t}|^2 = |\vec{x} - \vec{s}|^2 + |\vec{s} - \vec{t}|^2$, απ' όπου και $|\vec{x} - \vec{t}|^2 \geq |\vec{x} - \vec{s}|^2$.