Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

1. Συστήματα συντεταγμένων. Λέμε ότι το σημείο $\bar{x}$ του χώρου μας, έχει την έκφραση $\vec{x} = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n)^t \in \mathbb{R}^n$, και εννοούμε ότι έχουμε επιλέξει ένα σύστημα αναφοράς, $\{O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ ως προς το οποίο, το σημείο $\bar{x} = \overrightarrow{OX}$ έχει τις ξ^i, $1 \le i \le n$ για συντεταγμένες. Το σύνολο όλων των σημείων $\bar{x}$, θα αποτελεί τον n-διάστατο χώρο μας S. Στον διανυσματικό χώρο S ορίζεται και η συνηθισμένη μετρική $\bar{x} \cdot \bar{y} = B(\bar{x}, \bar{y}) = g_{ij}\xi^i\zeta^j$ με πίνακα $G = (g_{ij}) = (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j)$, όπου $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = B(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \vec{e}_j \cdot \vec{e}_i$ (Βλέπε ενότητα "Η μετρική του χώρου"). Συνήθως, στην περίπτωση αυτή, την θετικά ορισμένη συμμετρική διγραμμική μορφή $B(\bar{x}, \bar{y})$ παριστάνουν με $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$ ενώ με $\bar{x} \cdot \bar{y}$ (εσωτερικό γινόμενο) παριστάνουμε την τιμή της. Η βάση $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ λαβαίνετε πάντοτε ορθοκανονική ως προς το οριζόμενο εσωτερικό γινόμενο (βλέπε ενότητα "Γεωμετρικές εφαρμογές", αλγόριθμος των Gram – Schmidt). Η i συντεταγμένη του σημείου $\bar{x} = \overrightarrow{OX}$, είναι δυνατόν να υπολογισθεί από την εξίσωση $\xi^i = \bar{x} \cdot \vec{e}_i$.

Στην περίπτωση, που η βάση του χώρου είναι η καθιερωμένη, $G = (g_{ij}) = (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = (\delta_{ij})$ δ, το δ του Kronecker, το σύστημα αναφοράς καλείται ***καρτεσιανό σύστημα.*** Σε ένα καρτεσιανό σύστημα, η τετραγωνική μορφή που προκύπτει από την διγραμμική μορφή B έχει την έκφραση $Q(\bar{x}, \bar{x}) = +\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\xi^i)^2}$ και την συμβολίζουμε με $\|\bar{x}\|$ (***norm*** του $\bar{x}$). Η απόσταση ανάμεσα στα σημεία $\bar{x} = \overrightarrow{OX}$ και $\bar{y} = \overrightarrow{OY}$ σε ένα καρτεσιανό σύστημα, ισούται με $d(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\zeta^i - \xi^i)^2}$. (Βλέπε σχετικά, την ενότητα "Η μετρική του χώρου").

Συμβολισμοί. Με E θα συμβολίζουμε τον συνηθισμένο χώρο $\mathbb{R}^3$. Η καρτεσιανή βάση του χώρου αυτού είναι η συνηθισμένη $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, και το τυχόν σημείο P του E είναι το $\vec{x} = (x, y, z) = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$.

Το ***στοιχειώδες μήκος*** του χώρου έχει την έκφραση $(ds)^2 = g_{ij} d\xi^i d\xi^j$, και, στον E με την συνηθισμένη μετρική, $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

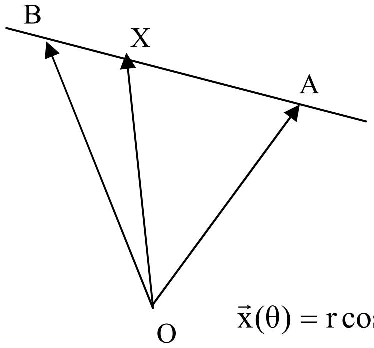
Σε υποσύνολα του χώρου αυτού, θα ορίζουμε συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^n \to S$. Στην περίπτωση, που $S = \mathbb{R}$, η f είναι μία πραγματική συνάρτηση, n, μεταβλητών. Η εξίσωση $f(\xi^1, \dots, \xi^n) = \sigma\tau\alpha\theta.$ παριστάνει, εν γένει, μία επιφάνεια, (n-1)-διαστάσεων συνεχές, εμβυθισμένη μέσα στον χώρο (βλέπε και ενότητα Γεωμετρικές εφαρμογές, υπερεπίπεδα).

Τα ***χωρία*** D του $\mathbb{R}^n$ είναι τα ανοικτά υποσύνολά του. Το ***σύνορο*** του D αποτελείται από τα ***συνοριακά*** του σημεία. Ένα σημείο του $\mathbb{R}^n$ καλείται ***συνοριακό σημείο*** του D, ανν κάθε ***ε-περιοχή*** του, $V(\bar{x}_0, \varepsilon)$, όπου $V(\bar{x}_0, \varepsilon) = \{\bar{x} \in E : d(\bar{x}, \bar{x}_0) < \varepsilon\}$, περιέχει και ένα τουλάχιστον σημείο του D.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Έστω E ο $\mathbb{R}^2$ (το Ευκλείδειο επίπεδο) και $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < r^2\}$. Το σύνορο του D είναι η περιφέρεια $x^2 + y^2 = r^2$.

2. Καμπύλες - επιφάνειες στον χώρο. (Βλέπε και ενότητα "Γεωμετρικές Εφαρμογές") Μία καμπύλη στον χώρο αποτελείται από το σύνολο των σημείων $\bar{x} \in E$, τα οποία προσδιορίζονται από την σχέση $\vec{x} = \vec{x}(t),\ \alpha \le t \le \beta \subset \mathbb{R}$ (1).

Υποθέτουμε ότι στο πεδίο ορισμού της η απεικόνιση $\vec{x}(t)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη (***λεία*** καμπύλη). Η (1) καλείται παραμετρική εξίσωση της καμπύλης, και η έκφρασή της εξαρτάται κάθε φορά από την επιλογή της παραμέτρου (μία παράμετρος, μονοδιάστατο συνεχές).



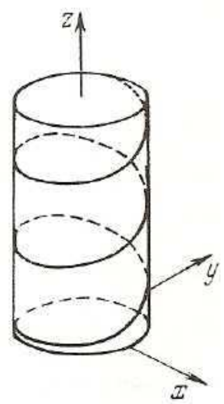
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. Η απλούστερη περίπτωση καμπύλης στον $\mathbb{R}^n$ δίδεται από την σχέση $\overrightarrow{AX} = t\overrightarrow{AB}$ ή

$$\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA} = t(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$$ ή

$\vec{x}(t) = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}, \quad 0 \le t \le 1$ και παριστά το ευθύγραμμο τμήμα AB (βλέπε ενότητα "Γεωμετρικές εφαρμογές").

Η παραμετρική εξίσωση της περιφερείας του κύκλου κέντρου O και ακτίνας r στο Oxy επίπεδο, είναι η

$$\vec{x}(\theta) = r\cos\theta\vec{e}_1 + r\sin\theta\vec{e}_2 \quad 0 \le \theta < 2\pi .$$



Τέλος, η εξίσωση $\vec{x}(\theta) = r\cos\theta\vec{e}_1 + r\sin\theta\vec{e}_2 + b\theta\vec{e}_3$ παριστά στον $\mathbb{R}^3$ μια κυκλική έλικα, με βήμα b.

Το στοιχειώδες μήκος τόξου της καμπύλης (1) είναι $(ds)^2 = g_{ij}dx^i dx^j = g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}(dt)^2$ συνεπώς, το μήκος τόξου της καμπύλης από το σημείο $\vec{a}$ στο σημείο $\vec{b}$ δίδεται από την σχέση $s = \int_\alpha^\beta \left(g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\right)^{\frac{1}{2}} dt$.

Μία επιφάνεια εμβυθισμένη στον $\mathbb{R}^3$, προσδιορίζεται από δύο παραμέτρους u_1, u_2 (διδιάστατο συνεχές). Τα σημεία (x, y, z) που αποτελούν την επιφάνεια, πληρούν το σύστημα $x = x(u_1, u_2), y = y(u_1, u_2), z = z(u_1, u_2)$ (μορφή Gauss). Η απαλοιφή των παραμέτρων u_1, u_2 δίδει την εξίσωση $F(x, y, z) = 0$ (Καρτεσιανή έκφραση). Τέλος, αν την εξίσωση αυτή, συμφέρει να την λύσουμε ως προς μία μεταβλητή, την z π.χ., παίρνουμε την έκφραση $z = f(x, y)$ (μορφή του Monge) .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Μία σφαίρα $S(\theta, \varphi)$ με ακτίνα ρ, έχει παραμετρικό σύστημα

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi, y = \rho\sin\theta\sin\varphi, z = \rho\cos\theta .$$

Για θ (αζιμούθιο) σταθερά, λαβαίνουμε τις παραλλήλους της σφαίρας.. Για φ σταθερά, λαβαίνουμε τους μεσημβρινούς της σφαίρας. Η απαλοιφή των παραμέτρων θ, φ, μας δίδει την μορφή $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$.

Μία καμπύλη πάνω σε μία επιφάνεια λαβαίνουμε, αν θέσουμε $u_1 = u_1(t)$ και $u_2 = u_2(t)$.

3. Εφαπτομένη καμπύλης - επιφάνειας. Ξεκινάμε από την απλούστερη περίπτωση της καμπύλης του επιπέδου που δίδεται από την εξίσωση $y = f(x)$ σε ένα καρτεσιανό σύστημα αναφοράς. Αν $M_0 = (x_0, y_0)$ και $M = (x, y)$ δύο σημεία της καμπύλης μου, η εφαπτομένη στο σημείο M_0 ορίζεται ως η οριακή θέση της ευθείας M_0M όταν $M \to M_0$. Σε μία περιοχή $V(x_0,h)$ η κλήση της ευθείας M_0M δίδεται από τον λόγο $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, ο οποίος ισούται με την παράγωγο $f'(x_0)$, όταν $h\to 0$. Στην περίπτωση αυτή, λοιπόν, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο M_0 είναι η $\dfrac{y-y_0}{x-x_0}=f'(x_0)$ (όπου, βέβαια, (x,y) το τυχόν σημείο της εφαπτομένης).

Ερχόμαστε, τώρα, στον $\mathbb{R}^3$ και υποθέτουμε ότι η καμπύλη μου $\vec{x}(t)$ δίδεται με τις παραμετρικές εξισώσεις $x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$, $a\le t\le b$. Θεωρούμε την χορδή M_0M της καμπύλης, και ορίζουμε την εφαπτομένη στο σημείο M_0, την θέση που παίρνει η χορδή αυτή, όταν $M\to M_0$. Σε μία περιοχή $V(\vec{x}(t_0),h)$ η εξίσωση της ευθείας M_0M είναι η $\dfrac{x-x(t_0)}{x(t_0+h)-x(t_0)}=\dfrac{y-y(t_0)}{y(t_0+h)-y(t_0)}=\dfrac{z-z(t_0)}{z(t_0+h)-z(t_0)}$, που για $h\to 0$ παίρνει την μορφή $\dfrac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\dfrac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}$ (2).

Στην γενική περίπτωση του $\mathbb{R}^n$, και σε καρτεσιανό σύστημα αναφοράς, η (2) παίρνει την μορφή $\vec{x}(\lambda)=\vec{x}(t_0)+\lambda\vec{x}'(t_0),\quad \lambda\in\mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Να βρεθεί η εφαπτομένη στο τυχόν σημείο της κυκλικής έλικας:

$$\vec{x}(t)=a\cos t\vec{e}_1+a\sin t\vec{e}_2+bt\vec{e}_3$$

Είναι, $x(t)=a\cos t$, $y(t)=a\sin t$ και $z(t)=bt$

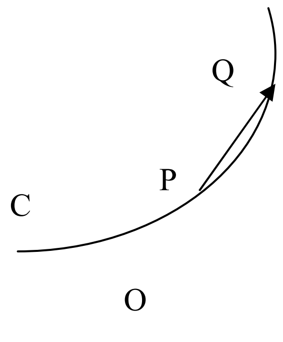
οπότε, και, $x'(t_0)=-a\sin t_0$, $y'(t_0)=a\cos t$ και $z'(t_0)=b$.

Άρα, $x(\lambda)=a(\cos t_0-\sin t_0)\lambda$, $y(\lambda)=a(\sin t_0+\cos t_0)\lambda$, $z(\lambda)=b(t_0+\lambda)$. Για $\lambda=0$ και $\lambda=1$ παίρνουμε επί της εφαπτόμενης τα σημεία $M_0(x_0,y_0,z_0)=(0,0,bt_0)$ και $M_1(x_1,y_1,z_1)=(a(\cos t_0-\sin t_0),a(\cos t_0+\sin t_0),b(t_0+1))$.

Το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{e}=\dfrac{\overrightarrow{M_0M_1}}{\left\|\overrightarrow{M_0M_1}\right\|}$ επί της εφαπτομένης της κυκλικής έλικας είναι το

$\vec{e}=\dfrac{\cos t_0-\sin t_0}{\sqrt{2+(1/a^2)}}\vec{i}+\dfrac{\cos t_0+\sin t_0}{\sqrt{2+(1/a^2)}}\vec{j}+\dfrac{1}{\sqrt{2+(1/a^2)}}\vec{k}$. Παρατηρούμε ότι το $\vec{e}$ σχηματίζει σε κάθε σημείο της καμπύλης γωνία σταθερά με τον άξονα Oz.

Στον $\mathbb{R}^n$, με μετρική $G=(g_{ij})$, θεωρούμε την καμπύλη C με



εξίσωση $\vec{x}=\vec{x}(s)$ όπου s το μήκος τόξου της καμπύλης. Έστωσαν τα σημεία $\overrightarrow{OP}=P(x^i(s))$ και

$\overrightarrow{OQ}=Q(x^i(s+\Delta s))$.

Θεωρούμε το

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\overrightarrow{PQ}}{\Delta s}=\left(\frac{dx^i}{ds}\right)=\vec{v}.$$

Το διάνυσμα $\vec{v}$ καλείται ***εφαπτομενικό διάνυσμα*** της καμπύλης C στο σημείο P. Παρατηρούμε, ότι, $\|\vec{v}\|^2=\dfrac{d\vec{x}\cdot d\vec{x}}{ds^2}=\dfrac{g_{ij}dx^idx^j}{g_{ij}dx^idx^j}=1$. Άρα, ΠΡΟΤΑΣΗ. Όταν η καμπύλη C έχει παραμετρική έκφραση ως προς το μήκος τόξου s, το εφαπτομενικό της διάνυσμα σε κάθε σημείο της, έχει μέτρο (norm) ίσο με την μονάδα.

Στην περίπτωση που η παραμετρική έκφραση της καμπύλης C είναι η $\vec{x} = \vec{x}(t)$, εφ' όσον η σύνδεση των παραμέτρων t και s γίνεται μέσω της $t = t(s)$, για το εφαπτομενικό διάνυσμα της C, έχουμε την σχέση $\vec{\tau} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d\vec{x}}{ds}\frac{ds}{dt} = \vec{v}\frac{ds}{dt}$. Άρα το μέτρο $\|\vec{\tau}\|$ είναι, $\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$

Θεωρούμε, τώρα, και το $\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{ds}$. Παρατηρούμε, ότι, $\frac{d(\vec{v}\cdot\vec{v})}{ds} = \vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$. Άρα τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{w}$ είναι μεταξύ τους κάθετα.

Το μέτρο $\|\vec{w}\|$ καλείται ***καμπυλότης*** κ της καμπύλης C (εκφρασμένη πάντοτε με παράμετρο το μήκος τόξου s).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 1. Η καμπυλότης του ευθυγράμμου τμήματος $\vec{x}(s) = (1-s)\vec{a} + s\vec{b}$ είναι μηδέν. Πράγματι, είναι $\vec{v}(s) = \frac{d\vec{x}(s)}{ds} = \vec{b} - \vec{a}$. Άρα και $\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{ds} = \vec{0}$, οπότε και $\kappa = \|\vec{w}\| = 0$.

2. Στον χώρο E θεωρούμε την καμπύλη $\vec{r}(s) = \left(x_o + R\cos\left(\frac{s}{R}\right)\right)\vec{i} + \left(y_o R\sin\left(\frac{s}{R}\right)\right)\vec{j}$

Σημείωση. Η C είναι περιφέρεια κύκλου στο Oxy επίπεδο κέντρου $K(x_o, y_o)$ και ακτίνος R. Η παράμετρος γωνία θ, ισούται ως γνωστόν με $\theta = \frac{s}{R}$, όπου s το μήκος τόξου που ορίζει η θ σε ένα κύκλο με ακτίνα R.

Είναι $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{ds} = R\sin\left(\frac{s}{R}\right)\left(\frac{1}{R}\right)\vec{i} - R\cos\left(\frac{s}{R}\right)\left(\frac{1}{R}\right)\vec{j} = \sin\left(\frac{s}{R}\right) - \cos\left(\frac{s}{R}\right)$

και $\vec{w} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = -\frac{1}{R}\left(\cos\left(\frac{s}{R}\right)\vec{i} + \sin\left(\frac{s}{R}\right)\vec{j}\right)$. Άρα, $\kappa = \|\vec{w}\| = \frac{1}{R}$.

Το μήκος τόξου μιας καμπύλης που δίδεται παραμετρικά με τυχούσα παράμετρο $\alpha \le t \le \beta$, βρίσκεται αν ολοκληρώσουμε την σχέση $s = \int_\alpha^\beta \left[g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\right]^{\frac{1}{2}} dx$. Στον χώρο E η σχέση αυτή είναι η $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}\,dt$. Στην περίπτωση που έχουμε επίπεδο καμπύλη $y = f(x)$, το $ds^2 = dx^2 + dy^2$, λαβαίνει την μορφή $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, και το $\int_\alpha^\beta ds$ δίδει το μήκος τόξου της καμπύλης, που εκτείνεται από το σημείο $A(\alpha, y(\alpha))$ στο σημείο $B(\beta, y(\beta))$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Η καμπύλη $\vec{x} = (t+1)\vec{e}_1 + (t^2 - 3)\vec{e}_2$ σε ένα Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς του επιπέδου, έχει τις παραμετρικές εξισώσεις $x(t) = t + 1$ και $y(t) = t^2 - 3$. Η απαλοιφή της παραμέτρου t οδηγεί στην καρτεσιανή εξίσωση $y = (x-1)^2 - 3$. Ο μετασχηματισμός $x' = x - 1,\ y' = y + 3$ δίδει την υπερβολή $y' = x'^2$ στο σύστημα αναφοράς $Ox'y'$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Στο επίπεδο, και σε πολικές συντεταγμένες (ρ, θ), δίδεται η καμπύλη $\rho = f(\theta)$. Ο μετασχηματισμός Καρτεσιανών σε πολικές συντεταγμένες είναι ο $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ (βλέπε ενότητα Γεωμετρικές Εφαρμογές). Για να βρούμε το στοιχειώδες μήκος μιάς καμπύλης, όταν αυτή δίδεται σε πολικές συντεταγμένες, εργαζόμαστε ως εξής: Η σχέση $ds^2 = dx^2 + dy^2$ δίδει την $ds^2 = (\cos\theta d\rho - \rho\sin\theta d\rho)^2 + (\sin\theta d\rho + \rho\cos\theta d\rho)^2$ ή ακόμα και $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$.

Στην περίπτωση, που έχουμε ως $\rho = f(\theta)$ π.χ. την $\rho = R + R\cos\theta$ (καρδιοειδής καμπύλη) ο προηγούμενος τύπος δίδει, $ds^2 = R^2 d\theta^2[\sin^2\theta + (1+\cos\theta)^2] = 4R^2\cos^2\dfrac{\theta}{2}d\theta^2$ απ' όπου και $ds = 2R\cos\dfrac{\theta}{2}d\theta$, $0 \le \theta \le \pi$. Άρα και, $s = 2\int_0^\pi R\cos\dfrac{\theta}{2}d\theta$.

Εφαπτόμενα επίπεδα. Όπως είδαμε παραπάνω, μία επιφάνεια παρίσταται είτε στην μορφή Gauss, είτε στην μορφή Monge, είτε στην Καρτεσιανή της έκφραση. Σε κάθε περίπτωση οι επιφάνειες υποτίθενται ***λείες***, δηλαδή, ότι οι συναρτήσεις που τις παριστάνουν, είναι συνεχείς μη μηδενικές, και σε κάθε σημείο τους έχουν παραγώγους k-τάξης.

1) (Μορφή Monge). Έστω η επιφάνεια S: $z = \varphi(x, y)$, και $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ μία καμπύλη του χώρου. Αν η καμπύλη αυτή βρίσκεται πάνω στην S, τότε, $z(t) = \varphi(x(t), y(t))$. Η εφαπτομένη της καμπύλης αυτής στο σημείο $M(x, y, z)$, όπου $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = (x, y, z)$, είναι και εφαπτομένη στην επιφάνεια S, οπότε και $\dfrac{X-x}{x'(t)} = \dfrac{Y-y}{y'(t)} = \dfrac{Z-z}{z'(t)}$ (1), με $\vec{\tau}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$, το εφαπτομενικό διάνυσμα, και $\vec{R} = (X, Y, Z)$ το τυχόν σημείο της εφαπτομένης, $\vec{R} = \vec{r} + \lambda\vec{\tau}$ της επιφάνειας στο σημείο M κατά μήκος της καμπύλης. Όμως, $z'(t) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}x'(t) + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}y'(t)$ (2). Ανάμεσα στις σχέσεις (1) και (2) κάνουμε απαλοιφή των $x'(t),\ y'(t),\ z'(t)$. Είναι, $(Z-z)x'(t) = (X-x)z'(t)$ και $(Z-z)y'(t) = (Y-y)z'(t)$. Τις τιμές των $x'(t)$ και $y'(t)$ που λαβαίνουμε απ' εδώ θέτουμε στην (2) και έχουμε, $z'(t) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\dfrac{X-x}{Z-z}z'(t) + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\dfrac{Y-y}{Z-z}z'(t)$, ή και $Z - z = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(X-x) + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(Y-y)$ (3) Η (3) δεν εξαρτάται από την συγκεκριμένη καμπύλη $z(t) = \varphi(x(t), y(y))$. Άρα το επίπεδο (3) περιέχει την εφαπτομένη που άγεται προς κάθε καμπύλη της S, που διέρχεται από το P. Είναι, συνεπώς, το εφαπτομενικό επίπεδο της S στο σημείο P.

2) (Καρτεσιανή μορφή) $F(x, y, z) = 0$ και από το σημείο $M(x, y, z)$ της S διέρχεται η καμπύλη $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, η οποία κείται επί της S, η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο M, $\dfrac{X-x}{x'(t)} = \dfrac{Y-y}{y'(t)} = \dfrac{Z-z}{z'(t)} = \lambda$ μαζί με την $dF = \dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{dz}{dt} = 0$ ή $\dfrac{\partial F}{\partial x}x'(t) + \dfrac{\partial F}{\partial y}y'(t) + \dfrac{\partial F}{\partial z}z'(t) = 0$, δίδει την $\dfrac{\partial F}{\partial x}(X-x) + \dfrac{\partial F}{\partial y}(Y-y) + \dfrac{\partial F}{\partial z}(Z-z) = 0$, ή $\vec{n}\cdot\vec{\tau} = 0$ όπου $\vec{n} = \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial z}\right) = \nabla F$. Η εξίσωση του εφαπτομενικού επιπέδου στην

μορφή αυτή, δείχνει ότι το διάνυσμα $\vec{n}=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)$ είναι κάθετο στο εφαπτομενικό επίπεδο της S στο σημείο P. Λέμε ότι το $\vec{n}=\nabla F$ είναι κάθετο στην επιφάνεια S.

3) (Μορφή Gauss) S: $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ $z=z(u,v)$. Πάνω στην επιφάνεια S, θεωρούμε της καμπύλες c_1 : $u=\sigma\tau\alpha\theta, v=v(t_2)$ και c_2 : $u=u(t_1), v=\sigma\tau\alpha\theta$. Έχουμε, τότε, $\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial x}{\partial t_1}u'$, $\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial t_1}u'$, $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial t_1}u'$ ως επίσης και $\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{\partial x}{\partial t_2}v'$, $\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial y}{\partial t_2}v'$, $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial t_2}v'$, όπου $u'=\frac{du}{dt_1}$ και $v'=\frac{dv}{dt_2}$. Η εξίσωση της εφαπτομένης στην καμπύλη c_1 είναι η $\frac{X-x}{x'(t_1)}=\frac{Y-y}{y'(t_1)}=\frac{Z-z}{z'(t_1)}$ και η εξίσωση της εφαπτομένης στην καμπύλη c_2 είναι η $\frac{X-x}{x'(t_2)}=\frac{Y-y}{y'(t_2)}=\frac{Z-z}{z'(t_2)}$. Όμως, $x'(t_1)=\frac{1}{u'}\frac{\partial x}{\partial u}$, $y'(t_1)=\frac{1}{u'}\frac{\partial y}{\partial u}$, $z'(t_1)=\frac{1}{u'}\frac{\partial z}{\partial u}$ και $x'(t_2)=\frac{1}{v'}\frac{\partial x}{\partial v}$, $y'(t_2)=\frac{1}{v'}\frac{\partial y}{\partial v}$, $z'(t_2)=\frac{1}{v'}\frac{\partial z}{\partial v}$. Τα διανύσματα $\vec{u}=(x'(t_1),y'(t_1),z'(t_1))$ και $\vec{v}=(x'(t_2),y'(t_2),z'(t_2))$ είναι δύο διανύσματα κατά μήκος των διευθύνσεων των εφαπτομένων που άγονται από το σημείο $M(x,y,z)$ της S. Η εξίσωση, συνεπώς, του επιπέδου που τα δύο αυτά μη συγγραμμικά διανύσματα παράγουν, είναι η

$$\det\begin{pmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}=0$$ (βλέπε και ενότητα “Γεωμετρικές εφαρμογές” §7).

Το στοιχειώδες μήκος. Η επιφάνεια S δίδεται στην μορφή Gauss. M το τυχόν σημείο της. $\vec{r}(u,v)=\overrightarrow{OM}=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ το διάνυσμα θέσης του M ως προς ένα καρτεσιανό σύστημα αναφοράς. Σε μία περιοχή του M θεωρούμε το σημείο $\vec{r}+d\vec{r}$. Είναι,

$d\vec{r}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}du+\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}dv$, οπότε και $ds^2=d\vec{r}^2=\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}du+\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}dv\right)^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$

όπου $E=\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\right)^2=\vec{u}\cdot\vec{u}$, $F=\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\right)\cdot\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right)=\vec{u}\cdot\vec{v}$, $G=\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right)^2=\vec{v}\cdot\vec{v}$.

Το στοιχειώδες μήκος μιας καμπύλης της S που έχει το $\vec{u}$ σαν εφαπτομενικό διάνυσμα στο σημείο M είναι, $\sqrt{E}$, οπότε το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος αυτής της εφαπτομένης είναι το $\vec{a}=E^{-\frac{1}{2}}\vec{u}$. Ανάλογα έχουμε και το μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα $\vec{b}=G^{-\frac{1}{2}}\vec{v}$, εκείνης της καμπύλης που έχει στο σημείο M εφαπτομένη κατά μήκος του $\vec{v}$. Η γωνία των $\vec{a}$ και $\vec{b}$ δίδεται από την σχέση $\cos\omega=\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{F}{\sqrt{EG}}$.

Το στοιχειώδες εμβαδόν υπολογίζεται από την σχέση $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=ab\sin\omega$ ως εξής:

Είναι, $\vec{u}=\frac{\partial x}{\partial u}\vec{i}+\frac{\partial y}{\partial u}\vec{j}+\frac{\partial z}{\partial u}\vec{k}$, $\vec{v}=\frac{\partial x}{\partial v}\vec{i}+\frac{\partial y}{\partial v}\vec{j}+\frac{\partial z}{\partial v}\vec{k}$ άρα και

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\vec{i}-\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\vec{k}$$

Παρατηρούμε ότι $(\vec{u}\times\vec{v})^2+(\vec{u}\cdot\vec{v})^2=\vec{u}^2\vec{v}^2$ απ' όπου έπεται ότι $|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{EG-F^2}$

Και, συνεπώς, $\sin\omega=|\vec{a}\times\vec{b}|=\dfrac{|\vec{u}\times\vec{v}|}{\sqrt{EG}}=\dfrac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{EG}}$.

4. Μετασχηματισμοί των συντεταγμένων. Όταν λέμε ότι αλλάζουμε τις συντεταγμένες, στην πραγματικότητα εννοούμε ότι αλλάζουμε το σύστημα αναφοράς του χώρου. Συνήθως, ως αρχικό σύστημα αναφοράς του χώρου λαμβάνεται το $\{O,\ \vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\}$, όπου τα $\vec{e}_i$ αποτελούν την καθιερωμένη βάση του $\mathbb{R}^n$. Ένας μετασχηματισμός των συντεταγμένων υλοποιείται, εν γένει, από το σύστημα των εξισώσεων $\eta^i=\eta^i(\xi^1,\dots\xi^n)$, $1\le i\le n$ (1), όπου η^i είναι οι συντεταγμένες του $\vec{x}$ στο νέο σύστημα αναφοράς $\{O,\ \vec{e}'_1,\dots,\vec{e}'_n\}$. Οι συναρτήσεις η^i θεωρούνται συνεχείς, παραγωγίσιμες και τοπικά αντιστρέψιμες, μέσα σε ένα χωρίο D του $\mathbb{R}^n$. Για τον λόγο αυτό, σε μία ε-περιοχή του $\vec{x}\in D\subseteq E$ ισχύει ότι $d\eta^i=\dfrac{\partial\eta^i}{\partial\xi^1}d\xi^1+\dots+\dfrac{\partial\eta^i}{\partial\xi^n}d\xi^n$, $1\le i\le n$ (2). Παρατηρούμε ότι, το (2) είναι ένα ομογενές γραμμικό σύστημα με πίνακα $J=\left(\dfrac{\partial\eta^i}{\partial\xi^j}\right)$ (***Ιακωβιανός Πίναξ***, Jacobian matrix, του συστήματος).

Συνοπτικά, γράφουμε και $d\eta^i=\dfrac{\partial\eta^i}{\partial\xi^j}d\xi^j$, όπου ο δείκτης j νοείται ότι αθροίζεται.

Ο μετασχηματισμός (1) είναι, συνεπώς ένα προς ένα, ανν $\det J\ne 0$. Στην περίπτωση αυτή, ο (1) αντιστρέφεται, και έχουμε $\xi^j=\xi^j(\eta^1,\dots,\eta^n)$ με $J^{-1}=\left(\dfrac{\partial\xi^j}{\partial\eta^k}\right)$. Ισχύει, βέβαια, $JJ^{-1}=I=J^{-1}J$, ή $\left(\dfrac{\partial\eta^i}{\partial\xi^j}\right)\left(\dfrac{\partial\xi^j}{\partial\eta^k}\right)=\delta^i_k$. Μετασχηματισμοί αυτού του τύπου, καλούνται **τοπικά συσχετισμένοι** (locally affine) μετασχηματισμοί.

Υποθέτουμε ότι έχουμε και την καμπύλη C στον χώρο μας. Στο σύστημα αναφοράς $\overline{e}$, δίδεται από το παραμετρικό σύστημα $x^i=x^i(t)$. Χρησιμοποιώντας την ίδια παράμετρο t, στο σύστημα αναφοράς $\overline{z}$ η C δίδεται από το σύστημα $z^j=z^j(t)$. Για το εφαπτομενικό διάνυσμα $\vec{\tau}=\left(\dfrac{d(x_i)}{dt}\right)$ σε κάποιο σημείο $t=t_o$ της καμπύλης C έχουμε ότι, $\dfrac{dx^i}{dt}=\dfrac{\partial x^i}{\partial z^j}\dfrac{dz^j}{dt}$. Τις σχέσεις αυτές, τις γράφουμε και $\xi^i=\eta^j\dfrac{\partial x^i}{\partial z^j}$ (1), (**το j αθροίζεται**) και παρατηρούμε, ότι, ξ^i είναι οι συντεταγμένες του $\vec{\tau}$ στο $\overline{x}$ σύστημα αναφοράς, ενώ η^j είναι οι συντεταγμένες του $\vec{\tau}$ στο $\bar{z}$ σύστημα αναφοράς και $J=\left(\dfrac{\partial x^i}{\partial z^j}\right)$ είναι ο Ιακωβιανός πίνακας του μετασχηματισμού. Η (1) γράφεται και $X^t = X'^t J$, όπου X ο πίνακας κολώνα των συντεταγμένων ξ^i του $\vec{\tau}$ στο $\bar{x}$ σύστημα αναφοράς και X' ο πίνακας κολώνα των συντεταγμένων η^j του $\vec{\tau}$ στο $\bar{z}$ σύστημα αναφοράς. Ο πίνακας J είναι συνεπώς, ο πίνακας αλλαγής βάσης των συντεταγμένων των εφαπτομενικών διανυσμάτων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Α. Συσχετισμένοι μετασχηματισμοί (Affine transformations). Είναι η πιο γενικοί γραμμικοί μετασχηματισμοί. Υλοποιούνται από το ομογενές γραμμικό σύστημα $\xi^i = \lambda^i_j \eta^j$ (1) με πίνακα $A=\left(\lambda^i_j\right)$. Το διάνυσμα $\vec{x}$ εκφράζεται μέσω των συντεταγμένων $\begin{pmatrix}\eta^1\\ \vdots \\ \eta^n\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}\xi^1\\ \vdots \\ \xi^n\end{pmatrix}$, δηλαδή, είναι $\vec{x}=\eta^1\vec{e}'_1+\ldots\eta^n\vec{e}'_n$. Ο (1) πρέπει, βέβαια, να είναι ένα προς ένα, θα πρέπει, λοιπόν, $\det A \neq 0$.Ο αντίστροφος μετασχηματισμός του (1) δίδεται, τότε, από το σύστημα $\eta^i = \mu^i_j \xi^j$, όπου $\left(\lambda^i_k\right)\left(\mu^k_j\right)=\left(\delta^i_j\right)$.

Β. Αλλαγή κλίμακας Η απλούστερη περίπτωση είναι να έχουμε το $\vec{x}=\overrightarrow{OX}=\xi^1\vec{e}_1+\xi^2\vec{e}_2$ στο καρτεσιανό επίπεδο $\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ με την συνηθισμένη μετρική $G=I$, και μετασχηματισμό τον $\eta^1=\lambda^1_1\xi^1+0\xi^2$, $\eta^2=0\xi^1+\lambda^2_2\xi^2$ (1), όπου η^1,η^2 οι συντεταγμένες του ιδίου $\vec{x}$ στο νέο σύστημα αναφοράς $\{O,\vec{e}'_1,\vec{e}'_2\}$. Πρόκειται για έναν γραμμικό μετασχηματισμό με πίνακα $A=\begin{pmatrix}\lambda^1_1 & 0\\ 0 & \lambda^2_2\end{pmatrix}$ και $\det A=\lambda^1_1\lambda^2_2\neq 0$. Το (1) γράφεται και στη μορφή $\begin{pmatrix}\eta^1\\ \eta^2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\xi^1\\ \xi^2\end{pmatrix}$. Οι συντεταγμένες του $\vec{e}_1$ στο σύστημα $\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ είναι, $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Στο νέο σύστημα $\{O,\vec{e}'_1,\vec{e}'_2\}$ είναι $\begin{pmatrix}\eta^1\\ \eta^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^1_1 & 0\\ 0 & \lambda^2_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^1_1\\0\end{pmatrix}$, ή $\eta^1=\lambda^1_1$ και $\eta^2=0$. Οι συντεταγμένες του $\vec{e}_2$ στο σύστημα $\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ είναι, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Στο νέο σύστημα $\{O,\vec{e}'_1,\vec{e}'_2\}$ είναι $\begin{pmatrix}\eta^1\\ \eta^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^1_1 & 0\\ 0 & \lambda^2_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \lambda^2_2\end{pmatrix}$, ή $\eta^1=0$ και $\eta^2=\lambda^2_2$ Έχουμε, συνεπώς, την έκφραση, $\vec{e}_1=\lambda^1_1\vec{e}'_1+0\vec{e}'_2$ και $\vec{e}_2=0\vec{e}'_1+\lambda^2_2\vec{e}'_2$. Παρατηρούμε ότι, με την συγκεκριμένη μετρική, το $\{O,\vec{e}'_1,\vec{e}'_2\}$ εξακολουθεί να είναι ορθογώνιο, το δε σημείο $\vec{x}=\overrightarrow{OX}=\xi^1\vec{e}_1+\xi^2\vec{e}_2=\eta^1\vec{e}'_1+\eta^2\vec{e}'_2$ παραμένει αναλλοίωτο.

Γ. Στροφή των αξόνων. Πάντα στο καρτεσιανό επίπεδο, με την συνηθισμένη μετρική, ο μετασχηματισμός μου δίδεται από το γραμμικό σύστημα,

$$\begin{aligned}\eta^1 &= \xi^1\cos\varphi-\xi^2\sin\varphi\\ \eta^2 &= \xi^1\sin\varphi+\xi^2\cos\varphi\end{aligned}\qquad 0\leq\varphi<2\pi,\ \xi^1,\xi^2\in\mathbb{R} \qquad (1)$$

με πίνακα $A=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$ και $\det A=1$. Το (1) γράφεται και στη μορφή $\begin{pmatrix}\eta^1\\ \eta^2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\xi^1\\ \xi^2\end{pmatrix}$. Οι συντεταγμένες του $\vec{e}_1$ στο σύστημα $\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ είναι, $\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$. Στο νέο σύστημα $\{O,\vec{e}_1',\vec{e}_2'\}$ είναι $\begin{pmatrix}\eta^1\\ \eta^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$ ή $\eta^1=\cos\varphi$, $\eta^2=\sin\varphi$

Οι συντεταγμένες του $\vec{e}_2$ στο σύστημα $\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ είναι, $\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$. Στο νέο σύστημα $\{O,\vec{e}_1',\vec{e}_2'\}$ είναι $\begin{pmatrix}\eta^1\\ \eta^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}$ ή $\eta^1=-\sin\varphi$, $\eta^2=\cos\varphi$.

Έχουμε, συνεπώς, την έκφραση, $\vec{e}_1=\cos\varphi\vec{e}_1'+\sin\varphi\vec{e}_2'$ και $\vec{e}_2=-\sin\varphi\vec{e}_1'+\cos\varphi\vec{e}_2'$, και, αντιστρέφοντας τον πίνακα A, την $\vec{e}_1'=\cos\varphi\vec{e}_1-\sin\varphi\vec{e}_2$ και $\vec{e}_2'=-\sin\varphi\vec{e}_1+\cos\varphi\vec{e}_2$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ 1. Με την συγκεκριμένη μετρική, το $\{O,\vec{e}_1',\vec{e}_2'\}$ εξακολουθεί να είναι ορθογώνιο, το δε σημείο $\vec{x}$ παραμένει αναλλοίωτο, μια και

$$\begin{aligned}\vec{x}&=\xi^1\vec{e}_1+\xi^2\vec{e}_2=\xi^1(\cos\varphi\vec{e}_1'+\sin\varphi\vec{e}_2')+\xi^2(-\sin\varphi\vec{e}_1'+\cos\varphi\vec{e}_2')\\ &=(\xi^1\cos\varphi-\xi^2\sin\varphi)\vec{e}_1'+(\xi^1\sin\varphi+\xi^2\cos\varphi)\vec{e}_2'=\eta^1\vec{e}_1'+\eta^2\vec{e}_2'\end{aligned}$$

2. Το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{e}_r=\vec{e}_1'$ έχει κλήση $\kappa_r=\tan\varphi$, ως προς το $\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$. Κείται, συνεπώς, κατά μήκος της διανυσματικής ακτίνος $\overrightarrow{OX}$

3. Το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{e}_\varphi=\vec{e}_2'$ έχει κλήση $\kappa_\varphi=-\cot\varphi$. Η καθετότης αυτών των δύο διανυσμάτων προκύπτει και από το γεγονός ότι $\kappa_r\kappa_\varphi=-1$ ως προς το $\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$.

Δ. Πολικές συντεταγμένες. Στο καρτεσιανό επίπεδο, με την συνηθισμένη μετρική, ο μετασχηματισμός μου δίδεται από το μη γραμμικό σύστημα,

$$\begin{aligned}\eta^1&=r\cos\varphi\\ \eta^2&=r\sin\varphi\end{aligned}\qquad 0\le\varphi<2\pi,\ r\in\mathbb{R}_+\qquad (1)$$

Τοπικά, ο μετασχηματισμός που επάγει ο (1) είναι γραμμικός, και δίδεται από το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$\text{ή}\ \begin{aligned}d\eta^1&=\cos\varphi dr-r\sin\varphi d\varphi\\ d\eta^2&=\sin\varphi dr+r\cos\varphi d\varphi\end{aligned},\ \text{ή και}\ \begin{pmatrix}d\eta^1\\ d\eta^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dr\\ d\varphi\end{pmatrix}.$$

Η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού είναι η $J=r>0$.

Από το τυχόν σημείο X του χώρου μας, διέρχονται οι ***συντεταγμένες καμπύλες*** $\varphi=\sigma\tau\theta$ και $r=\sigma\tau\theta$, με παραμετρικές εκφράσεις (1). Η πρώτη είναι ευθεία με κλήση $\kappa_r=\tan\varphi$ και η δεύτερη περιφέρεια κύκλου κέντρου X και ακτίνας r.

Εισάγουμε ένα τοπικό σύστημα αναφοράς $\{X,\vec{e}_1',\vec{e}_2'\}$ που αποτελείται από το σημείο X και τα μοναδιαία διανύσματα $\{X,\vec{e}_1',\vec{e}_2'\}$, $\vec{e}_1'=\cos\varphi\vec{e}_1+\sin\varphi\vec{e}_2$ και $\vec{e}_2'=-\sin\varphi\vec{e}_1+\cos\varphi\vec{e}_2$.

Για $\varphi=\sigma\tau\theta$, ο (1) δίδει, $d\eta^1=\cos\varphi dr$, $d\eta^2=\sin\varphi dr$ με κλήση $\kappa_r=\tan\varphi$

Για $r=\sigma\tau\theta$, ο (1) δίδει, $d\eta^1=-r\sin\varphi d\varphi$, $d\eta^2=r\cos\varphi d\varphi$ με κλήση $\kappa_\varphi=-\cot\varphi$.

Συνεπώς, ο τοπικός μετασχηματισμός (1) συμπίπτει με τον μετασχηματισμό στροφή των αξόνων $\{X,\vec{e}_1',\vec{e}_2'\}\to\{X,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ δίδεται από το σύστημα

$$\begin{aligned} d\eta^1 &= \cos\varphi dr - \sin\varphi d\varphi \\ d\eta^2 &= \sin\varphi dr + \cos\varphi d\varphi \end{aligned}, \quad \text{ή} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} d\eta^1 \\ d\eta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\varphi \end{pmatrix}.$$

Συνοπτικά, γράφουμε και $d\eta^j = \dfrac{\partial \eta^j}{\partial \xi^i} d\xi^i$, όπου $d\xi^1 = dr,\ d\xi^2 = d\varphi$ (2)

Ο αντίστροφος τοπικός μετασχηματισμός δίδεται από το σύστημα

$$\begin{aligned} dr &= \cos\varphi d\eta^1 + \sin\varphi d\eta^2 \\ d\varphi &= -\sin\varphi d\eta^1 + \cos\varphi d\eta^2 \end{aligned}, \quad \text{ή} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} dr \\ d\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\eta^1 \\ d\eta^2 \end{pmatrix}$$

Συνοπτικά, γράφουμε και $d\xi^i = \dfrac{\partial \xi^i}{\partial \eta^j} d\eta^j$, όπου $d\xi^1 = dr,\ d\xi^2 = d\varphi$ (3).

Από τις (2) και (3) έχουμε και την $d\eta^j = \dfrac{\partial \eta^j}{\partial \xi^i} \dfrac{\partial \xi^i}{\partial \eta^k} d\eta^k$.

Εξ' άλλου, είναι και, $\dfrac{\partial \eta^j}{\partial \xi^k} \dfrac{\partial \xi^k}{\partial \eta^i} = \delta_i^j$.

Ε. Κυλινδρικές συντεταγμένες. Στο χωρίο $D \subseteq \mathbb{R}^3$, θεωρούμε τον μη γραμμικό μετασχηματισμό $\eta^1 = r\cos\varphi,\ \eta^2 = r\sin\varphi,\ \eta^3 = \xi^3$, με $r \neq 0$ και $0 < \varphi < 2\pi$.

Έχουμε τον Ιακωβιανό πίνακα $J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \eta^1}{\partial r} & \dfrac{\partial \eta^1}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial \eta^1}{\partial \xi^3} \\ \dfrac{\partial \eta^2}{\partial r} & \dfrac{\partial \eta^2}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial \eta^2}{\partial \xi^3} \\ \dfrac{\partial \eta^3}{\partial r} & \dfrac{\partial \eta^3}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial \eta^3}{\partial \xi^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

με $\det J = r > 0$.

Στ. Σφαιρικές συντεταγμένες. Στο χωρίο $D \subseteq \mathbb{R}^3$, θεωρούμε τον μη γραμμικό μετασχηματισμό, $\eta^1 = \eta^1(r,\varphi,\theta),\ \eta^2 = \eta^2(r,\varphi,\theta),\ \eta^3 = \eta^3(r,\varphi,\theta)$, (1) όπου,

$\eta^1 = r\sin\varphi\cos\theta,\ \eta^2 = r\sin\varphi\sin\theta,\ \eta^3 = r\cos\varphi$, με $r \neq 0$ και $0 \le \theta < \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$.

Έχουμε τον Ιακωβιανό πίνακα

$$J = \left(\frac{\partial \eta^i}{\partial \xi^j}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \eta^1}{\partial r} & \dfrac{\partial \eta^1}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial \eta^1}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial \eta^2}{\partial r} & \dfrac{\partial \eta^2}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial \eta^2}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial \eta^3}{\partial r} & \dfrac{\partial \eta^3}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial \eta^3}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

με $\det J = -r^2\sin\theta$. Τοπικά, ο μετασχηματισμός (1) είναι γραμμικός, και δίδεται από το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$\begin{pmatrix} d\eta^1 \\ d\eta^2 \\ d\eta^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\varphi \\ d\theta \end{pmatrix}$$

$$d\eta^1 = \sin\varphi\cos\theta dr + r\cos\varphi\cos\theta d\varphi - r\sin\varphi\sin\theta d\theta$$

ή $$d\eta^2 = \sin\varphi\sin\theta dr + r\cos\varphi\sin\theta d\varphi + r\sin\varphi\cos\theta d\theta$$

$$d\eta^3 = \cos\varphi dr - r\sin\varphi d\varphi$$

Από το τυχόν σημείο Χ του χώρου μας, διέρχονται οι ***συντεταγμένες καμπύλες*** c_r με $\theta = \sigma\tau\theta \quad \varphi = \sigma\tau\theta$, c_φ με $\theta = \sigma\tau\theta \quad r = \sigma\tau\theta$ και c_θ με $\varphi = \sigma\tau\theta \quad r = \sigma\tau\theta$, με παραμετρικές εκφράσεις (1).

Για $r = \sigma\tau\theta$ (1) παριστά επιφάνεια σφαίρας.. Η c_r είναι, τότε, ευθεία που ορίζεται από το κέντρο Χ αυτής της σφαίρας και του σημείου $d\vec{r} \in V(\vec{x}, \varepsilon)$. Το διάνυσμα $\vec{e}'_1 = \vec{e}_r$ με συντεταγμένες $d\eta_1^1 = \sin\varphi\cos\theta dr, d\eta_1^2 = \sin\varphi\sin\theta dr, d\eta_1^3 = \cos\varphi dr$ κείται επί της c_r.

Για $\theta = \sigma\tau\theta$, $r = \sigma\tau\theta$ η c_φ παριστάνει τους "παράλληλους κύκλους" της προηγούμενης σφαίρας. Το διάνυσμα $\vec{e}'_2 = \vec{e}_\varphi$ με $d\eta_2^1 = \cos\varphi\cos\theta d\varphi, d\eta_2^2 = \cos\varphi\sin\theta d\varphi, d\eta_2^3 = \sin\varphi d\varphi$ είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα της c_φ.

Για $\varphi = \sigma\tau\theta \quad r = \sigma\tau\theta$ η c_θ παριστάνει τους "μεσημβρινούς κύκλους" της προηγούμενης σφαίρας. Το διάνυσμα $\vec{e}'_3 = \vec{e}_\theta$ με $d\eta_3^1 = \sin\varphi\sin\theta d\theta, d\eta_3^2 = \sin\varphi\cos\theta d\theta, d\eta_3^3 = 0$ είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα της c_θ.

Τοπικά, έχουμε, λοιπόν, τον γραμμικό μετασχηματισμό $\{X, \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\} \to \{X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

5. Συντελεστές κλίμακας. Έστω ότι οι συντεταγμένες x, y, z του σημείου $\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ του Ε εκφράζονται ως $x = x(u^1, u^2, u^3),\ y = y(u^1, u^2, u^3),\ z = z(u^1, u^2, u^3)$, σε κάποιο άλλο σύστημα αναφοράς. Υποθέτουμε, ότι ο μετασχηματισμός $(x, y, z) \mapsto (u^1, u^2, u^3)$ έχει όλες τις καλές ιδιότητες (είναι αντιστρέψιμος, συνεχής, παραγωγίσιμος). Μπορούμε, τότε, το σημείο $\vec{x}$ να το εκφράσουμε ως $\vec{x} = u^1\vec{e}_1 + u^2\vec{e}_2 + u^3\vec{e}_3 = u^i\vec{e}_i$, όπου τα $\vec{e}_i$ κατάλληλα επιλεγμένα διανύσματα.

Διαδοχικά, για $u^j = \sigma\tau\alpha\theta.$ λαβαίνουμε τις ***συντεταγμένες επιφάνειες*** με κοινό σημείο το $\vec{x}$, (u^i, u^k μεταβλητές) των οποίων ανά δύο οι τομές είναι οι ***συντεταγμένες καμπύλες*** c_i (u^i μεταβλητή). Ένα τοπικό σύστημα αναφοράς, αποτελείται από το σημείο $\vec{x}$ και την βάση $\vec{e}_i,\ 1 \le i \le 3$, όπου $\vec{e}_i = \dfrac{1}{h_i}\dfrac{\partial\vec{x}}{\partial u^i}$, με $h_i = \left\|\dfrac{\partial\vec{x}}{\partial u^i}\right\|$ τον ***συντελεστή κλίμακας*** του $\vec{e}_i$ (μετατρέπει το $\vec{e}_i$ σε μοναδιαίο διάνυσμα). Το $\vec{e}_i$ είναι εφαπτομενικό της καμπύλης c_i. Το σύστημα αναφοράς $\{\vec{x}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ καλείται ***καμπυλόγραμμο σύστημα αναφοράς.***

Για την Ιακωβιανή του μετασχηματισμού, όταν u_1, u_2, u_3 ορθογώνιες καμπυλόγραμμες συντεταγμένες, έχουμε

$$\det J=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u^1} & \frac{\partial y}{\partial u^1} & \frac{\partial z}{\partial u^1}\\ \frac{\partial x}{\partial u^2} & \frac{\partial y}{\partial u^2} & \frac{\partial z}{\partial u^2}\\ \frac{\partial x}{\partial u^3} & \frac{\partial y}{\partial u^3} & \frac{\partial z}{\partial u^3}\end{pmatrix}=$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u^1}\vec{i}+\frac{\partial y}{\partial u^1}\vec{j}+\frac{\partial z}{\partial u^1}\vec{k}\right)\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial u^2}\vec{i}+\frac{\partial y}{\partial u^2}\vec{j}+\frac{\partial z}{\partial u^2}\vec{k}\right)\times\left(\frac{\partial x}{\partial u^3}\vec{i}+\frac{\partial y}{\partial u^3}\vec{j}+\frac{\partial z}{\partial u^3}\vec{k}\right)=$$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1}\cdot\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2}\times\frac{\partial \vec{x}}{\partial u^3}\right)=h_1\vec{e}_1\cdot h_2\vec{e}_2\times h_3\vec{e}_3=h_1h_2h_3\left(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2\times\vec{e}_3\right)=h_1h_2h_3$$

Ο στοιχειώδεις όγκος είναι, λοιπόν, $dv=h_1h_2h_3du_1du_2du_3$

Το στοιχειώδες μήκος τόξου

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=d\vec{x}\cdot d\vec{x}=\left(\frac{\partial\vec{x}}{\partial u^i}du^i\right)^2=\left(h_i du^i\right)^2$$

6. To gradient A. Θεωρούμε τον χώρο $E=\mathbb{R}^3$ με την συνηθισμένη μετρική, και έστω $\vec{x}=\overrightarrow{OX}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\in E$. Θεωρούμε την απεικόνιση $f:E\to\mathbb{R}$. Θέτουμε $\forall\vec{x}_o\in E$, $(\nabla f)_{\vec{x}_o}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_o}\vec{i}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y_o}\vec{j}+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{z_o}\vec{k}$. Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}}\frac{\left\|f(\vec{x}_o+\vec{h})-f(\vec{x})\right\|}{\left\|\vec{h}\right\|}=\nabla f\cdot d\vec{x}$$

Είναι, λοιπόν, $\left\|f(\vec{x})-f(\vec{x}_o)\right\|=(\nabla f)_{\vec{x}_o}\cdot(\vec{x}-\vec{x}_o),\ \left\|\vec{x}-\vec{x}_o\right\|<\rho$.

Σε κάθε σημείο $\vec{x}\in E$, ορίζεται πάνω στο σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων f, η διανυσματική συνάρτηση ∇f, η οποία είναι και γραμμική: $\nabla(\alpha f+\beta g)=\alpha\nabla f+\beta\nabla g$. Η συνάρτηση αυτή καλείται ***gradient*** της f, είναι ένα ***γραμμικό συναρτησιοειδές*** και συμβολίζεται επίσης με $\operatorname{grad} f=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$. Επιπλέον, για την σύνθεση των συναρτήσεων ισχύει ο κανόνας του Leibnitz: $\nabla(fg)=f\nabla g+g\nabla f$. Το ∇ είναι συνεπώς, ένας ***διαφορικός τελεστής***.

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι στον Ε έχουμε και μία άλλη ορθογώνια βάση $\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$. Θέλουμε να βρούμε τον τρόπο μεταβολής του ∇, όταν από το αρχικό σύστημα αναφοράς, περνάμε στο τονούμενο σύστημα αναφοράς. Ένας μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ δίδεται από το σύστημα $x=x^1(u^1,u^2,u^3),\ y=x^2(u^1,u^2,u^3),\ z=x^3(u^1,u^2,u^3)$. Η $f:E\to\mathbb{R}$, από $f(x,y,z)$, γίνεται $f(u^1,u^2,u^3)$. Θέλουμε να βρούμε την έκφραση του ∇f ως προς τις u^1,u^2,u^3. Είναι $\frac{\partial f}{\partial u^j}=\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial u^j}$ (1). Αν, λοιπόν, τις συντεταγμένες του ∇ στο νέο σύστημα της καλέσουμε $\eta_j=\frac{\partial}{\partial u^j}$, ενώ τις συντεταγμένες του ∇ στο αρχικό σύστημα τις έχουμε καλέσει $\xi_i=\frac{\partial}{\partial x^i}$, αυτές μεταβάλλονται σύμφωνα με τον νόμο (1), $\eta_j=\xi_i\frac{\partial x^i}{\partial z^j}$ (ο άνω δείκτης i αθροίζεται. ***Covariant*** μεταβολή). Αν θέσουμε $J=\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^j}\right)$, η προηγούμενη σχέση, σε γραφή πινάκων γίνεται, $\eta = J^t\xi$. Στην περίπτωση που ο πίνακας J έχει αντίστροφο, $\xi=(J^t)^{-1}\eta$, ή και $\xi_i=\eta_j\frac{\partial z^j}{\partial x^i}$.

Τέλος, αν θέσουμε $\vec{e}_i=\frac{1}{h_i}\frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i}$, η (1) δίδει και την έκφραση

$$\nabla f=\frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial x^1}\vec{e}_1+\frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial x^2}\vec{e}_2+\frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial x^3}\vec{e}_3 \quad (2)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1 Κυλινδρικές συντεταγμένες. Στον χώρο E από καρτεσιανές (x,y,z) συντεταγμένες, σε κυλινδρικές (r,φ,z) συντεταγμένες. Ο μετασχηματισμός είναι ο

$$x=r\cos\varphi,\ \ y=r\sin\varphi,\ \ z=z,\ \text{με}\ r\neq 0\ \ \text{και}\ \ 0\le\varphi<2\pi .$$

Ζητάμε να υπολογίσουμε πως μεταβάλλεται το $\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$ όταν εκτελέσουμε τον παραπάνω μετασχηματισμό.

Είναι

$$\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \varphi}=-\frac{\partial f}{\partial x}\sin\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\varphi$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial z}$$

και αν λάβουμε $\vec{e}_r=\cos\varphi\vec{i}+\sin\varphi\vec{j}$, $\vec{e}_\varphi=-\sin\varphi\vec{i}+\cos\varphi\vec{j}$, $\vec{e}_z=\vec{k}$,

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

Παρατηρούμε ότι, το ∇f σε οιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων και αν εκφραστεί, παραμένει αναλλοίωτο. Πράγματι,

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi\right)(\cos\varphi\vec{i}+\sin\varphi\vec{j})$$

$$+\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\sin\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\varphi\right)(-\sin\varphi\vec{i}+\cos\varphi\vec{j})+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}\cos^2\varphi\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi\sin\varphi\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi\cos\varphi\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\sin^2\varphi\vec{j}+$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\sin^2\varphi\vec{i}-\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi\sin\varphi\vec{j}-\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi\cos\varphi\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\cos^2\varphi\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

Άλλος τρόπος. Από την Ιακωβιανή του μετασχηματισμού

$$J = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

υπολογίζουμε τους συντελεστές κλίμακας

$$h_1^2 = \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1,\ h_2^2 = r^2\sin^2\phi + r^2\cos^2\phi = r^2,\ h_3^2 = 1.$$

Άρα, η (2) δίδει την

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z \qquad \text{όπως υπολογίσαμε.}$$

2 Σφαιρικές συντεταγμένες. Στον χώρο E από καρτεσιανές (x, y, z) συντεταγμένες, σε σφαιρικές (r, φ, θ) συντεταγμένες. Ο μετασχηματισμός είναι ο

$$x = r\sin\varphi\cos\theta,\ y = r\sin\varphi\sin\theta,\ z = r\cos\varphi,\ \text{με } r \neq 0 \text{ και } 0 \le \theta < \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Ζητάμε να υπολογίσουμε πως μεταβάλλεται το $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$ όταν εκτελέσουμε τον παραπάνω μετασχηματισμό.

Είναι

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\sin\varphi\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\varphi$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\varphi\sin\theta - \frac{\partial f}{\partial z}\sin\varphi$$

$$\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta$$

ή

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi \\ r\cos\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi \\ -r\sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

ή

$$\nabla f(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi \\ r\cos\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi \\ -r\sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & 0 \end{pmatrix} \nabla f(x, y, z)$$

ή και

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{pmatrix} \nabla f(r, \varphi, \theta)$$

και αν λάβουμε

$$\vec{e}_r = \sin\varphi\cos\theta\vec{i} + \sin\varphi\sin\theta\vec{j} + \cos\varphi\vec{k}$$
$$\vec{e}_\varphi = \cos\varphi\cos\theta\vec{i} + \cos\varphi\sin\theta\vec{j} - \sin\varphi\vec{k}$$
$$\vec{e}_\theta = -\sin\theta\vec{i} + r\cos\theta\vec{j}$$

τότε,

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial f}{\partial\theta}\vec{e}_\theta$$

Παρατηρούμε ότι, το ∇f σε οιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων και αν εκφραστεί, παραμένει αναλλοίωτο. Πράγματι,

$$\frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial f}{\partial\theta}\vec{e}_\theta =$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\sin\varphi\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\varphi\right)\left(\sin\varphi\cos\theta\vec{i} + \sin\varphi\sin\theta\vec{j} + \cos\varphi\vec{k}\right) +$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\varphi\sin\theta - \frac{\partial f}{\partial z}\sin\varphi\right)\left(\cos\varphi\cos\theta\vec{i} + \cos\varphi\sin\theta\vec{j} - \sin\varphi\vec{k}\right) +$$
$$\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta\right)\left(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}\right) =$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\sin^2\varphi\cos^2\theta + \cos^2\varphi\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\vec{i} +$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\sin^2\varphi\sin^2\theta + \cos^2\varphi\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)\vec{j} +$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}\left(\cos^2\varphi + \sin\varphi^2\right)\vec{k} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

Άλλος τρόπος. Από την Ιακωβιανή του μετασχηματισμού

$$J = \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi \\ r\cos\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi \\ -r\sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

υπολογίζουμε τους συντελεστές κλίμακας

$$h_1^2 = \sin^2\phi\cos^2\theta + \sin^2\phi\sin^2\theta + \cos^2\phi = 1,$$
$$h_2^2 = r^2\cos^2\phi\cos^2\theta + r^2\cos^2\phi\sin^2\theta + r^2\sin^2\phi = r^2, \quad \text{οπότε, και}$$
$$h_3^2 = r^2\sin^2\phi\sin^2\theta + r^2\sin^2\phi\cos^2\theta = r^2\sin^2\phi$$

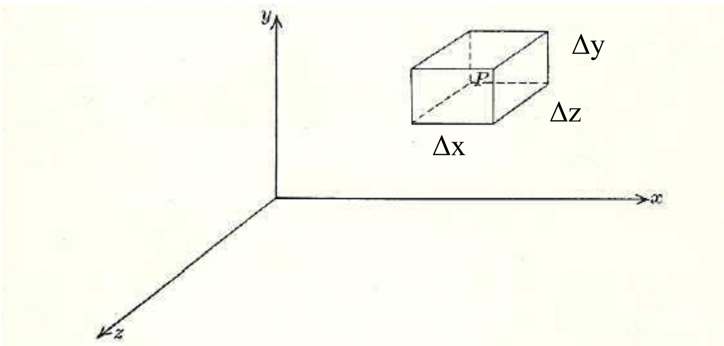
Άρα και $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial f}{\partial\theta}\vec{e}_\theta$, όπως υπολογίσαμε.

Β. Στον χώρο $E = \mathbb{R}^3$ με την συνηθισμένη μετρική, θεωρούμε συναρτήσεις της μορφής $\vec{x} \mapsto f(\vec{x})$. Η έννοια της μερικής παραγώγου γενικεύεται στην έννοια της ***παραγώγου ως προς κάποια διεύθυνση*** $\vec{k}$: $\frac{\partial f}{\partial\vec{k}}(\vec{x}) = \lim_{t\to 0}\frac{f(\vec{x}+t\vec{k}) - f(\vec{x})}{t}$. Είναι, λοιπόν, $\frac{\partial f}{\partial\vec{k}} = \vec{k}\cdot\nabla f$. Η μεγίστη τιμή $\max\left(\frac{\partial f}{\partial \vec{k}}\right)$ λαβαίνετε για $\cos(\theta)=1$, όπου θ η γωνία των $\vec{k}$ και ∇f, δηλαδή, κατά την διεύθυνση ∇f. Στην §17 της ενότητας "Γεωμετρικές εφαρμογές", είδαμε ότι το κάθετο διάνυσμα $\vec{n}$ της επιφάνειας $f(x,y,z)=0$, είναι το ∇f.

7. Το divergence. Στον χώρο $E=\mathbb{R}^3$ με την συνηθισμένη μετρική, θεωρούμε την περιοχή του σημείου P, στην μορφή ενός κύβου με πλευρές Δx, Δy, Δz. Το P βρίσκεται στο κέντρο της περιοχής. Υποθέτουμε, ακόμα, ότι στον χώρο E έχουμε ροή κάποιου ρευστού. Σε κάθε σημείο του χώρου, η ροή απεικονίζεται από την ταχύτητα $\vec{v}=\vec{v}(x,y,z)$ του ρευστού. Αν οι συντεταγμένες του $\vec{v}$ είναι $u=u(x,y,z)$, $\upsilon=\upsilon(x,y,z)$, $w=w(x,y,z)$, έχουμε, τότε, ότι

(ανάπτυγμα Taylor) $u\left(x-\frac{\Delta x}{2},y,z\right)=u(x)-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{2}+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{2}\right)^2-\ldots$

και, $$u\left(x+\frac{\Delta x}{2},y,z\right)=u(x)+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{2}+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{2}\right)^2-\ldots\ .$$



Ο όγκος του ρευστού, που ρέει με ταχύτητα $\upsilon=\upsilon(x,y,z)$ κάθετα στην πλευρά ΔyΔz του κύβου είναι οριακά, $\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dxdydz$ όπου $\rho=\rho(x,y,z)$ η πυκνότητα του ρευστού. Όμοια και για τις άλλες πλευρές του κύβου. Μπορούμε, συνεπώς, να γράφουμε, ότι η ολική ροή του ρευστού είναι $\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho\upsilon)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right)dxdydz$. Αν υποθέσουμε, ακόμα, ότι δεν έχουμε απώλειες ρευστού κατά την ροή του μέσα από τον κύβο ΔxΔyΔz, τότε αν, $\frac{\partial\rho}{\partial t}dxdydz$ η μάζα του ρευστού που διέρχεται δια του κύβου ανά μονάδα χρόνου, έχουμε, ότι, (εξίσωση συνεχείας) $\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho\upsilon)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=\frac{\partial\rho}{\partial t}$. Στην περίπτωση, που το ρευστό θεωρείται ασυμπίεστο και ομογενές, έχουμε $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\upsilon}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$.

Την παράσταση $\nabla\cdot\vec{v}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(u(x,y,z),\upsilon(x,y,z),w(x,y,z)\right)$ καλούμε ***divergence*** της $\vec{v}$. Γράφουμε και, $\operatorname{div}\vec{v}=\nabla\cdot\vec{v}$.

Ένας μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ δίδεται από το σύστημα

$$x = x^1(u^1,u^2,u^3),\ y = x^2(u^1,u^2,u^3),\ z = x^3(u^1,u^2,u^3).$$

Η $\vec{v}: E \to \mathbb{R}^3$, από $\vec{v} = u(x,y,z)\vec{i} + \upsilon(x,y,z)\vec{i} + w(x,y,z)\vec{k}$, εκφραζόμενη σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$, θα λάβει την μορφή,

$$\vec{v} = \frac{1}{h_1}u(u^1,u^2,u^3)\vec{e}_1 + \frac{1}{h_2}\upsilon(u^1,u^2,u^3)\vec{e}_2 + \frac{1}{h_3}w(u^1,u^2,u^3)\vec{e}_3$$

$$= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left(h_2h_3u(u^1,u^2,u^3)\vec{e}_1 + h_3h_1\upsilon(u^1,u^2,u^3)\vec{e}_2 + h_1h_2w(u^1,u^2,u^3)\vec{e}_3\right)$$

όπου $h_1 = h_1(u^1,u^2,u^3),\ h_2 = h_2(u^1,u^2,u^3),\ h_3 = h_3(u^1,u^2,u^3)$.

Η έκφραση, συνεπώς, του divergence ως προς της u^1,u^2,u^3 θα είναι,

$$\nabla\cdot\vec{v} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\frac{\partial(h_2h_3u)}{\partial u^1} + \frac{\partial(h_3h_1\upsilon)}{\partial u^2} + \frac{\partial(h_2h_1w)}{\partial u^3}\right)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. Για να περάσουμε στις κυλινδρικές συντεταγμένες r, φ, z, εκτελούμε τον μετασχηματισμό $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$, με $r \neq 0$ και $0 < \varphi < 2\pi$. Πιο πάνω υπολογίσαμε τους συντελεστές κλίμακας για τις κυλινδρικές συντεταγμένες από την ιακωβιανή του μετασχηματισμού,

$$h_1^2 = \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1,\ h_2^2 = r^2\sin^2\phi + r^2\cos^2\phi = r^2,\ h_3^2 = 1$$

οπότε και, $h_1h_2h_3 = r$, ως επίσης και $h_2h_3 = r$, $h_3h_1 = 1$, $h_1h_2 = r$.

Είναι,

$$\frac{\partial(h_2h_3u)}{\partial u^1} = \frac{\partial(ru)}{\partial r} = u + \frac{r\partial u}{\partial r},\quad \frac{\partial(h_3h_1\upsilon)}{\partial\varphi} = \frac{\partial\upsilon}{\partial\varphi},\quad \frac{\partial(h_1h_2w)}{\partial z} = \frac{\partial(rw)}{\partial z} = \frac{r\partial w}{\partial z}$$

Άρα και,

$$\nabla\cdot\vec{v} = \frac{1}{r}\left(u + \frac{r\partial(u)}{\partial r} + \frac{\partial\upsilon}{\partial\varphi} + \frac{r\partial w}{\partial z}\right)$$

Για να περάσουμε από καρτεσιανές (x,y,z) συντεταγμένες, σε σφαιρικές (r,φ,θ) συντεταγμένες εκτελούμε τον μετασχηματισμό

$x = r\sin\varphi\cos\theta,\ y = r\sin\varphi\sin\theta,\ z = r\cos\varphi$, με $r \neq 0$ και $0 \le \theta < \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$

Οι συντελεστές κλίμακας είναι οι (τους υπολογίσαμε παραπάνω)

$$h_1^2 = \sin^2\phi\cos^2\theta + \sin^2\phi\sin^2\theta + \cos^2\phi = 1,$$

$$h_2^2 = r^2\cos^2\phi\cos^2\theta + r^2\cos^2\phi\sin^2\theta + r^2\sin^2\phi = r^2,$$

$$h_3^2 = r^2\sin^2\phi\sin^2\theta + r^2\sin^2\phi\cos^2\theta = r^2\sin^2\phi$$

Υπολογίζουμε τα γινόμενα $h_2h_3 = r^2\sin\phi$, $h_3h_1 = r\sin\phi$, $h_1h_2 = r$, $h_1h_2h_3 = r^2\sin\phi$.

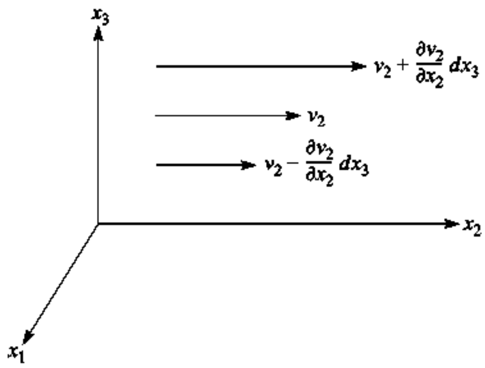
Άρα και $\dfrac{\partial(r^2\sin\phi u)}{\partial r} = 2r\sin\phi u + r^2\sin\phi\dfrac{\partial u}{\partial r}$, $\dfrac{\partial(r\sin\phi\upsilon)}{\partial\phi} = r\cos\phi\upsilon + r\sin\phi\dfrac{\partial\upsilon}{\partial\phi}$ και $\dfrac{\partial(rw)}{\partial\theta} = r\dfrac{\partial w}{\partial\theta}$.

Συνεπώς,

$$\nabla\cdot\vec{v} = \frac{1}{r^2\sin\phi}\left(2r\sin\phi u + r^2\sin\phi\frac{\partial u}{\partial r} + r\cos\phi\upsilon + r\sin\phi\frac{\partial\upsilon}{\partial\phi} + r\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)$$

$$= \frac{2u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\phi\upsilon}{r\sin\phi} + \frac{\partial\upsilon}{r\partial\phi} + \frac{\partial w}{\sin\phi\partial\theta}$$

8. Το curl. Ο διαφορικός τελεστής curl (περιστροφή) προκύπτει από την περιγραφή της τυρβώδους ροής ενός ρευστού.



Ας υποθέσουμε ότι, η ταχύτης $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ ενός ρευστού που πληροί τον χώρο E είναι διαφορετική κατά στρώματα. Το μέγεθος $\frac{\partial v_2}{\partial x_3}$ μετρά αυτήν την μεταβολή της συντεταγμένης v_2 της ταχύτητας κατά μήκος του Oz άξονα. Η μεταβολή της συντεταγμένης v_3 κατά μήκος του Oy άξονα είναι $\frac{\partial v_3}{\partial x_2}$. Άρα η μεταβολή κατά τον Ox άξονα, που οφείλεται στις δύο προηγούμενες μεταβολές, και προκαλεί μία καμπύλωση της ροής του ρευστού κατά τον $x_1 = Ox$ είναι, $\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right)$. Συνεπώς, και ως προς τους τρείς άξονες έχουμε στρέβλωση της ταχύτητας της ροής κατά

$$\nabla \times \vec{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)\vec{k} \qquad (1)$$

Την (1) την γράφουμε και

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \qquad (2).$$

Εύκολα, τώρα, μπορούμε να εκφράσουμε την (2) σε καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων:

$$\nabla \times \vec{v} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{pmatrix} h_1\vec{e}_1 & h_2\vec{e}_2 & h_3\vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1v_1 & h_2v_2 & h_3v_3 \end{pmatrix}$$

9. Χαρακτηρισμός εμπλεκομένων μεγεθών. Ένα “μέγεθος” για μας εδώ, αντιπροσωπεύει την τιμή κάποιας συναρτήσεως, που έχει ορισθεί με την βοήθεια ενός συστήματος αναφοράς. Παράδειγμα: Το μέγεθος “θερμοκρασία” T. Αν η μέτρηση γινεται στο σύστημα ° C (βαθμοί Celsius), το αποτέλεσμα αυτής, είναι ο αριθμός Tc. O Tc, είναι, λοιπόν, η συντεταγμένη του μεγέθους T στο σύστημα αναφοράς βαθμοί Celsius. Το ίδιο μέγεθος, το εκφράζουμε και σε ένα άλλο σύστημα αναφοράς, π.χ. ° F με “συντεταγμένη” Tf (βαθμοί Farenheit). Τα δύο αυτά μεγέθη συνδέονται με την σχέση Tf = (9/5)*Tc+32.

Ένα μέγεθος θα το καλούμε ***μονόμετρο*** ανν μία αλλαγή του συστήματος αναφοράς αφίνει το μέγεθος αναλλοίωτο.

Θα εξετάσουμε το μέγεθος $\mathbb{R} \ni \varphi = a_i \xi^i$, όταν αλλάζουμε το σύστημα αναφοράς με έναν ένα προς ένα γραμμικό μετασχηματισμό $\eta^i = q^i_j \xi^j$ με αντίστροφο τον $\xi^j = p^j_i \eta^i$. Το μέγεθος φ μετασχηματίζεται στο $\varphi' = a_i(p^i_k \eta^k) = (a_j p^j_i)\eta^i = a'_i \eta^i$. Εάν θέλουμε το φ να παραμαίνει αναλλοίωτο, να είναι, δηλαδή, ένα μονόμετρο μέγεθος, θα πρέπει και οι συντελεστές a_i να μετασχηματίζονται σύμφωνα με τον κανόνα $a'_j = p^i_j a_i$, ή $a_i = q^j_i a'_j$ (ο πίνακας $\left(q^j_i\right)$ είναι ο ανάστροφος του αντιστρόφου του πίνακα $\left(p^i_j\right)$).

Για έναν μετασχηματισμό $\eta^j = \eta^j(\xi^i)$ (1) (βλέπε §4), υποθέτουμε ότι, σε μία περιοχή του χώρου μας $V(\vec{x},\varepsilon)$ ισχύει ότι, $d\eta^i = \frac{\partial \eta^i}{\partial \xi^j} d\xi^j$ (ή ισοδύναμα, $d\xi^j = \frac{\partial \xi^j}{\partial \eta^i} d\eta^i$). Καλούμε, το διάνυσμα $\left(d\xi^j\right)$ ***contravariant*** διάνυσμα. Γενικεύοντας την προηγούμενη σχέση, καλούμε contravariant διάνυσμα κάθε μέγεθος, που στο σύστημα αναφοράς μου ορίζεται ως $\vec{v} = (v^1,\ldots,v^n)$, όπου $v^i = v^i(\xi^j)$, και το οποίο, μέσω του (1), μετασχηματίζεται στο $\vec{v}' = \left(v'^1(\eta^1,\ldots,\eta^n),\ldots,v'^n(\eta^1,\ldots,\eta^n)\right)$, με τέτοιο τρόπο, ώστε σε κάθε $V(\vec{x},\varepsilon)$ να ισχύει ότι $v'^i = \frac{\partial \eta^i}{\partial \xi^j} v^j$ (ή ισοδύναμα, $v^j = \frac{\partial \xi^j}{\partial \eta^i} v'^i$). **Σημείωση** Και στις δύο περιπτώσεις αθροίζεται ο δείκτης που είναι "κάτω" και δηλώνει την κολώνα του ιακωβιανού πίνακα $J = \left(\frac{\partial \xi^j}{\partial \eta^i}\right)$ ή του αντιστρόφου του $\left(\frac{\partial \eta^i}{\partial \xi^j}\right)$. Η σχέση, λοιπόν, $v^j = \frac{\partial \xi^j}{\partial \eta^i} v'^i$ σε μορφή πινάκων γράφεται και $V = JV'$, όπου V ο πίνακας κολώνα των συντεταγμένων του διανύσματος $\vec{v}$.

Καλούμε ***covariant*** διάνυσμα κάθε μέγεθος, που στο σύστημα αναφοράς μου ορίζεται ως $\vec{u} = (u_1,\ldots,u_n)$, όπου $u_i = u_i(\xi^j)$, και το οποίο, μέσω του (1), μετασχηματίζεται στο $\vec{u}' = \left(u'_1(\eta^1,\ldots,\eta^n),\ldots,u'_n(\eta^1,\ldots,\eta^n)\right)$, με τέτοιο τρόπο, ώστε σε κάθε $V(\vec{x},\varepsilon)$ να ισχύει ότι $u'_i = \frac{\partial \xi^j}{\partial \eta_i} u_j$ (ή ισοδύναμα, $u^j = \frac{\partial \eta^i}{\partial \xi^j} u'^i$). **Σημείωση** Και στις δύο περιπτώσεις αθροίζεται ο δείκτης που είναι "άνω" και δηλώνει την γραμμή του ιακωβιανού πίνακα $\left(\frac{\partial \xi^j}{\partial \eta^i}\right)$ ή του αντιστρόφου του $\left(\frac{\partial \eta^i}{\partial \xi^j}\right)$. Η σχέση, λοιπόν, $u^j = \frac{\partial \eta^i}{\partial \xi^j} u'^i$ σε μορφή πινάκων γράφεται και $U = (J^t)^{-1} U'$, όπου V ο πίνακας κολώνα των συντεταγμένων του διανύσματος $\vec{u}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Το εφαπτομενικό διάνυσμα $\vec{\tau}$ της καμπύλης $c : x^i = x^i(t)$, είναι (βλέπε §3) το $\vec{\tau} = \left(\xi^i\right)$, όπου $\xi^i = \frac{dx^i}{dt}$. Αλλάζουμε το σύστημα αναφοράς, και τα σημεία της c έχουν πλέον την έκφραση $z^i = z^i(t)$, με $x^i = x^i(z^i(t))$, και το $\vec{\tau} = \left(\eta^i\right)$. Ισχύει ότι $\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial z^j}\frac{dz^j}{dt}$, ή $\xi^i = \frac{\partial x^i}{\partial z^j}\eta^j$, ή σε μορφή πίνακα, $\xi = J\eta$.

Ορθογώνιοι μετασχηματισμοί.

Δύο γραμμικοί μετασχηματισμοί $\xi^i = a^i_k \widehat{\xi}^k$ με $\det(a^i_k) \neq 0$ και $\eta_i = \widehat{a}^k_i \widehat{\eta}_k$ με $\det(\widehat{a}^k_i) \neq 0$ (1) λέγονται ***contra-gradient*** αν και μόνον αν αφήνουν αναλλοίωτο την διγραμμική μορφή $B(\eta_i, \xi^i) = \eta_i \xi^i$ (ο δείκτης i αθροίζεται). Ισχύει, δηλαδή, ότι $\eta_i \xi^i = \widehat{\eta}_i \widehat{\xi}^i$. Η σχέσης contra-gradient είναι μία σχέσης ισοδυναμίας. Για τους συντελεστές a^i_k και $\widehat{a}^i_k$ ισχύει ότι $a^r_i \widehat{a}^k_r = \delta^k_i$. Οι αντίστροφοι των γραμμικών μετασχηματισμών (1) είναι οι $\widehat{\eta}_i = a^k_i \eta_k$ και $\widehat{\xi}^i = \widehat{a}^i_k \xi^k$ και έχουμε επίσης, $a^i_r \widehat{a}^r_k = \delta^i_k$. Ένας αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός θα καλείται ***ορθογώνιος*** ανν αυτός και ο αντίστροφός του είναι σε σχέση contra-gradient. Τούτο έχει ως συνέπεια, να ισχύει ο πίνακας του αντιστρόφου μετασχηματισμού, να είναι ο ανάστροφος πίνακας του αντιστρέψιμου μετασχηματισμού.

Αν μία οιαδήποτε γραμμική μορφή $f(\xi^1, \ldots \xi^n) = a_i \xi^i$ την μετασχηματίσουμε μέσω του $\xi^i = a^i_k \widehat{\xi}^k$, (contravarient μετασχηματισμός) η f για να παραμείνει αναλλοίωτη, θα πρέπει οι συντελεστές της να μετασχηματιστούν $a_i = b^k_i a_k$ (covariant μετασχηματισμός) με $a^i_r b^r_k = \delta^i_k$

Σημείωση. Το σύνολο των ένα προς ένα αντιστρέψιμων γραμμικών μορφών $\varphi : \mathbf{V}(F) \to F$ όπου $\varphi(\kappa_1 \vec{x}_1 + \kappa_2 \vec{x}_2) = \kappa_1 \varphi(\vec{x}_1) + \kappa_2 \varphi(\vec{x}_2)$ (ισομορφισμών) αποτελεί τον δυϊκό χώρο $\mathbf{V}'$ του **V**. Λεπτομέρειες γι αυτούς, ο αναγνώστης θα βρει στις ενότητες "Γραμμικές μορφές" και "Άλγεβρα τανυστών".

10. Εξίσωση Euler-Lagrange. Ένα συναρτησιωειδές (functional) είναι μία απεικόνιση, που ορίζεται σε ένα σύνολο συναρτήσεων. Στην περίπτωση, που η εικόνα του συναρτησιωειδούς είναι ένας πραγματικός αριθμός, τούτο καλείται και μορφή. Ιδιαίτερα, μελετάμε τις γραμμικές και τις διγραμμικές μορφές (βλέπε ενότητα Γραμμικές μορφές).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Έστω $M = \{y\}$ το σύνολο των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων $y : [0,1] \to \mathbb{R}$. Το $J[y(x)] = \int_0^1 y(x)dx$ είναι, τότε, σύμφωνα με τον ορισμό μας, ένα συναρτησιωειδές. Για $y(x) = 1$, $J[y(x)] = 1$, για $y(x) = e^x$, $J[y(x)] = e - 1$.

Το πεδίο ορισμού M του συναρτησιωειδούς, είναι δυνατόν να αποτελείται από μια οικογένεια συναρτήσεων $y(x)$, που εξαρτώνται από κάποια παράμετρο t.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Θεωρούμε την οικογένεια $\varphi[t, y(x)],$, όπου $\varphi(t, y) = \dfrac{t}{1+y^2}$ με $-1 \leq t \leq 1$ και $y(x) = 1 + x,\ 0 \leq x \leq 1$.

θέτουμε $J(t, y) = t \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+(1+x)^2} d(1+x) = t \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+u^2} du = t\arctan u\Big|_1^2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Το μήκος τόξου $J(y(x)) = \displaystyle\int_\alpha^\beta ds$ (βλέπε Γεωμετρία του χώρου) όπου $ds = \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$, με, $y(x),\ \alpha \leq x \leq \beta, \{\alpha, y(\alpha)), (\beta, y(\beta)\} \in \mathbb{R}^2$, τόξο καμπύλης του Ευκλείδειου χώρου.

Ορισμοί Για δύο απεικονίσεις $y_1(x), y_2(x) \in M,\ \alpha \le x \le \beta$, ορίζουμε την απόσταση d αυτών, ως εξής, $d(y_1, y_2) = \max\{| y_2 - y_1 |,\ x \in [\alpha, \beta]$. Εφ' όσον οι απεικονίσεις y έχουν μέχρι και k παράγωγο, ορίζεται η k τάξεως απόσταση αυτών, από την σχέση $d^k(y_1, y_2) = \max_k\{\max\{| y_2^k - y_1^k |,\ x \in [\alpha, \beta]\}$

Η μεταβολή δy του ορίσματος $y(x) \in M$ του συναρτησιωειδούς $J(y(x))$, ορίζεται από την σχέση $\delta y = d(y_1, y_2)$

Ένα συναρτησιωειδές $J(y(x))$ θα λέμε ότι είναι k-συνεχές στο σημείο $y_o(x)$, αν και μόνον αν, $\forall \varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $d^k(y, y_o) < \delta \Rightarrow | J(y) - J(y_o) | < \varepsilon$.

Ένα συναρτησιωειδές $J(y(x))$ θα λέμε ότι είναι k-ομαλά συνεχές στο πεδίο ορισμού της M, αν και μόνον αν, $\forall \varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε, $\forall (y_1(x), y_2(x) \in M$ $d^k(y_1, y_2) < \delta \Rightarrow | J(y_2) - J(y_1) | < \varepsilon$.

Έστω M ο γραμμικός χώρος των απεικονίσεων $y(x), x \in \mathbb{R}$, εφοδιασμένος με μία απόσταση. Το συναρτησιωειδές $L(y(x)),\ y(x) \in M$ καλείται γραμμικό, αν και μόνον αν ισχύει ότι 1) $\forall c \in \mathbb{R},\ L(cy(x)) = cL(y(x))$ και

2) $L(y_1(x) + y_2(x) = L(y_1(x)) + L(y_2(x))$.

Αν η μεταβολή $\Delta J = J(y(x) + \delta(x) - J(y(x))$ είναι δυνατόν να παρασταθεί ως

$$\Delta J = L(y(x), \delta y)) + t(y(x), \delta(y)) | \delta y |, \text{ με } t \to 0 \text{ όταν } | \delta y | \to 0$$

($\delta(y(x))$ υποθέτουμε, λοιπόν, ότι τίθεται στην μορφή $\delta(y(x)) = t\varphi(x),\ \varphi(x) \ne 0$), λέμε ότι το συναρτησιωειδές είναι διαφορήσιμο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Το συναρτησιωειδές $J[y(x)] = \int_0^1 y(x)dx$ είναι διαφορήσιμο.

Πράγματι,

$$\Delta J = J(y(x) + \delta(y(x)) - J(y(x)) = \int_0^1 (y(x) + \delta(y(x)))dx - \int_0^1 \delta(y(x))dx = \int_0^1 \delta(y(x))dx \text{ , και,}$$

συνεπώς, το $\Delta J = \int_0^1 \delta(y(x))dx$ είναι γραμμικό ως προς $\delta(y(x))$.

Ως γνωστόν, το μέγιστο ή το ελάχιστο μιάς πραγματικής συναρτήσεως λαμβάνεται σε εκείνο το σημείο του πεδίου ορισμού της, όπου το διαφορικό της μηδενίζεται.

Θεωρούμε, τώρα, την $f(x, y, y')$, η οποία υποτίθεται ότι αναλύεται κατά Taylor, και ζητάμε να βρούμε το μέγιστο ή το ελάχιστο του συναρτησιωειδούς $J(f(x, y, y'))$.

Είναι, $\Delta J = \int_\alpha^\beta \{f(x, y + t\varphi, y' + t\varphi') - f(x, y, y')\}dx = tI_1 + \frac{1}{2}t^2 I_2 + R$, όπου

$I_1 = \int_\alpha^\beta \left(\varphi\frac{\partial f}{\partial y} + \varphi'\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dx$, $I_2 = \int_\alpha^\beta \left(\varphi^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} + \varphi'^2\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\right)dx$, R το υπόλοιπο του αναπτύγματος κατά Taylor. Περιοριζόμαστε στον πρώτο όρο του αναπτύγματος.

Ολοκληρώνουμε κατά μέρη τον όρο $\varphi'\frac{\partial f}{\partial y'}$ και έχουμε,

$$\int_\alpha^\beta \left(\varphi'\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dx = \left[\varphi\frac{\partial f}{\partial y'}\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \varphi\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dx \text{, οπότε και,}$$

$$I_1 = \int_\alpha^\beta \varphi \frac{\partial f}{\partial y} dx + \left[\varphi \frac{\partial f}{\partial y'} \right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \varphi \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx$$

$$I_1 = \int_\alpha^\beta \varphi \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right\} dx + \left[\varphi \frac{\partial f}{\partial y'} \right]_\alpha^\beta$$

Υποθέτουμε ότι το συναρτησιωειδές $J(f(x,y,y'))$ είναι διαφορήσιμο. Οπότε και το $\Delta J = tI_1 = t\int_\alpha^\beta \varphi \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right\} dx + t\left[\varphi \frac{\partial f}{\partial y'} \right]_\alpha^\beta$ μηδενίζεται τότε και μόνον αν

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0, \qquad (1)$$

μια και ο όρος $t\left[\varphi \frac{\partial f}{\partial y'} \right]_\alpha^\beta$ από την υπόθεση ότι το ΔJ είναι διαφορήσιμο, μηδενίζεται.

Η συνθήκη (1) καλείται εξίσωση των Euler-Lagrange.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ. 1) Η συνάρτηση $f(x,y,y')$ δεν περιέχει την μεταβλητή y. Τότε, είναι, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ και η (1) γίνεται, $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$, οπότε και $\frac{\partial f}{\partial y'} = c$, c σταθρά.

2) Η συνάρτηση $f(x,y,y')$ δεν περιέχει την μεταβλητή x. Τότε,

$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y''$ και, λόγω της (1), $\frac{df}{dx} = y' \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \frac{\partial f}{\partial y'} y''$. Άρα και,

$$f = \int \left\{ y' \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' \right\} dx = \int \frac{d}{dx}\left\{ y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right\} dx = y' \frac{\partial f}{\partial y'} + c.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ζητάμε να βρούμε την ελαχίστη απόσταση κατά μήκος μιας καμπύλης, που συνδέει δύο σημεία του ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$.

Έχουμε, $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}$, και, χωρίς τα όρια ολοκλήρωσης, $I = \int \sqrt{1 + y'^2} dx$. Η συνάρτηση $f = \sqrt{1 + y'^2}$ είναι ανεξάρτητη και από την μεταβλητή x και την y. Σύμφωνα με την περίπτωση 1), έχουμε, $\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c_1$. Σύμφωνα με την περίπτωση 2) $\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = c_2$. Είτε από την μία είτε από την άλλη, έχουμε, $y' = m$, και, συνεπώς, $y = mx + c$. Συνεπώς, μέσα στον $\mathbb{R}^3$, με μετρική $G = (g_{ij}) = (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = (\delta_{ij})$, (βλέπε §1), η ευθεία $y = mx + c$ είναι η ελαχίστου μήκους καμπύλη, που συνδέει δύο σημεία του χώρου.

11. Το στοιχειώδες μήκος 1. (βλέπε και ενότητα "Η μετρική του Χώρου"). Ορίσαμε το στοιχειώδες μήκος στον $\mathbb{R}^3$ με σύστημα αναφοράς (O,x,y,z), με μετρική

$G=(g_{ij})=(\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j)=(\delta_{ij})$, ως το $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$ ή στον $\mathbb{R}^n$, $ds^2=\sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2$.

Θεωρούμε, τώρα, τον "καλό" μετασχηματισμό των συντεταγμένων $x^{i'}=x^{i'}(x^j)$. Το ds, τότε, θα μετασχηματιστεί στο $(ds')^2=\left(dx^{1'}\right)^2+\left(dx^{2'}\right)^2+\left(dx^{3'}\right)^2$ (1) όπου $dx^{i'}=\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}dx^j$, ή αναλυτικά, (βλέπε και §4)

$$\begin{aligned}
dx^{1'}&=\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1}dx^1+\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^3}dx^3\\
dx^{2'}&=\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1}dx^1+\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^3}dx^3 \qquad (2)\\
dx^{3'}&=\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^1}dx^1+\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^3}dx^3
\end{aligned}$$

και, θέλουμε, βέβαια, να έχουμε την ισότητα $ds=ds'$.
Αντικαθιστούμε τις (2) στην (1), και μετά από μερικές πράξεις και τακτοποιήσεις έχουμε την

$$\begin{aligned}
(ds)^2=&\left[\left(\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1}\right)^2+\left(\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1}\right)^2+\left(\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^1}\right)^2\right](dx^1)^2+\left[\left(\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^2}\right)^2\right](dx^2)^2\\
&+\left[\left(\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^3}\right)^2+\left(\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^3}\right)^2+\left(\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^3}\right)^2\right](dx^3)^2\\
&+2\left[\left(\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1}\right)\left(\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1}\right)\left(\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^1}\right)\left(\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^2}\right)\right]dx^1dx^2\\
&+2\left[\left(\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^3}\right)+\left(\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^3}\right)+\left(\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^3}\right)\right]dx^2dx^3\\
&+2\left[\left(\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^3}\right)\left(\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1}\right)+\left(\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^3}\right)\left(\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1}\right)+\left(\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^1}\right)\left(\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^1}\right)\right]dx^3dx^1
\end{aligned}$$

Η παραπάνω ισότητα είναι μία συμμετρική διγραμμική διαφορική μορφή της μορφής $B(d\vec{x},d\vec{x})$, όπου $d\vec{x}=\begin{pmatrix}dx^1\\dx^2\\dx^3\end{pmatrix}$, και πίνακα $G=\begin{pmatrix}g_{11}&g_{12}&g_{13}\\g_{21}&g_{22}&g_{23}\\g_{31}&g_{32}&g_{33}\end{pmatrix}$, όπου

$$g_{ii}=\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^i}+\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^i}+\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^i} \quad \text{και} \quad g_{ij}=\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^j}+\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^j}+\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{3'}}{\partial x^j}=g_{ji}.$$

Γράφουμε, συνεπώς και $(ds)^2=\left(dx^1,dx^2,dx^3\right)\begin{pmatrix}g_{11}&g_{12}&g_{13}\\g_{21}&g_{22}&g_{23}\\g_{31}&g_{32}&g_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dx^1\\dx^2\\dx^3\end{pmatrix}$ ή συνοπτικά, $(ds)^2=g_{ij}dx^idx^j$ (οι δείκτες i και j αθροίζονται).

Σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Οι κυλινδρικές συντεταγμένες r, φ, z, συνδέονται με τις καρτεσιανές συντεταγμένες με τις σχέσεις $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=z$, με $r\neq 0$ και $0\leq\varphi<2\pi$. Ο Ιακωβιανός πίνακας του μετασχηματισμού είναι ο

$$J=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z}\\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$ Άρα και $g_{11}=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$

$g_{22}=r^2$, $g_{33}=1$, $g_{12}=0=g_{21}$, $g_{13}=0=g_{31}$, $g_{23}=0=g_{32}$, και, συνεπώς το στοιχειώδες μήκος έχει την έκφραση $ds^2=dr^2+r^2d\varphi^2+dz^2$

Σε σφαιρικές συντεταγμένες. Οι σφαιρικές συντεταγμένες r, φ, θ, συνδέονται με τις καρτεσιανές συντεταγμένες με τις σχέσεις

$x=r\sin\varphi\cos\theta,\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\ z=r\cos\varphi$, με $r\neq 0$ και $0\leq\theta<\pi,\ 0\leq\varphi\leq 2\pi$.

Έχουμε τον Ιακωβιανό πίνακα

$$J=\left(\frac{\partial\eta^i}{\partial\xi^j}\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta\\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0\end{pmatrix}$$

Άρα και $g_{11}=\sin^2\varphi\cos^2\theta+\sin^2\varphi\sin^2\theta+\cos^2\varphi=1$

$g_{22}=r^2\cos^2\varphi\cos^2\theta+r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta+r^2\sin^2\varphi=r^2$,

$g_{33}=r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta=r^2\sin^2\varphi$,

$g_{12}=r\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\theta+r\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta-r\sin\varphi\cos\varphi=0=g_{21}$,

$g_{13}=-r\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta+\sin^2\varphi r\sin\theta\cos\theta=0=g_{31}$,

$g_{23}=-r^2\cos\varphi\cos\theta\sin\varphi\sin\theta+r^2\cos\varphi\sin\theta\sin\varphi\cos\theta=0=g_{32}$,

και, συνεπώς το στοιχειώδες μήκος έχει την έκφραση

$ds^2=dr^2+r^2d\varphi^2+r^2\sin^2\varphi d\theta^2=dr^2+r^2(d\varphi^2+\sin^2\varphi d\theta^2)$

11. Το στοιχειώδες μήκος 2. Επανερχόμεθα σε μία περιοχή του χώρου $\mathbb{R}^n$ με συμμετρική διγραμμική διαφορική μορφή $ds^2=g_{ik}dx^idx^k$, $g_{ik}=g_{ki}$, $g_{ik}=g_{ik}(x^i,x^k)$ η οποία ορίζει το στοιχειώδες μήκος του $\mathbb{R}^n$ με $\det G>0$ (βλέπε και ενότητα "Η Μετρική του Χώρου". Ο πίνακας $G=(g_{ij})$ καλείται ***μετρικός τανυστής*** του χώρου. Θα προσδιορίσουμε την μορφή των συντελεστών g_{ik} , κατά τέτοιο τρόπο, ώστε η έκφραση του στοιχειώδους μήκους να παραμένει αναλλοίωτη ως προς ορισμένες ομάδες μετασχηματισμών των σημείων του χώρου (όταν, δηλαδή, αλλάζουμε διαδοχικά θέση μέσα στον χώρο). Θέλουμε, δηλαδή, να ισχύει

$$(ds)^2=g_{ij}dx^idx^j=g'_{ij}dx'^idx'^j=(ds')^2$$

όπου $P'=(x'^i)$ βρίσκεται σε μία περιοχή του αρχικού σημείου $P=(x^k)$, $x'^i=x'^i(x^k)$.

Έχουμε, $dx'^i=\frac{\partial x'^i}{\partial x^i}dx^i$, και, συνεπώς, $g_{ij}dx^idx^j=g'_{ij}\frac{\partial x'^i}{\partial x^i}\frac{\partial x'^j}{\partial x^j}$, οπότε και,

$$g_{ij}=\frac{\partial x'^i}{\partial x^i}\frac{\partial x'^j}{\partial x^j}g'_{ij}\quad \text{ή και}\quad g'_{ij}=\frac{\partial x^i}{\partial x'^i}\frac{\partial x^j}{\partial x'^j}g_{ij}$$

Για την $\det G'$, έχουμε, $\det G'=\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^i}\right)\det\left(\frac{\partial x^j}{\partial x'^j}\right)\det G$

Αν $G^{-1}=(g^{jk})$ είναι ο αντίστροφος πίνακας του G, είναι, $g_{ij}g^{jk}=\delta_i^k$ (δ του Kronecker).

Έστω (x'^i) και (x^k) οι συντεταγμένες του τελικού P' και του αρχικού σημείου P του χώρου, σημεία, που συνδέονται με τον γραμμικό μετασχηματισμό $A=(a^i_k)$ (βλέπε ενότητα "Γραμμικά συστήματα §9"). Είναι, λοιπόν, $x'^i=a^i_k x^k$, με αντίστροφο τον $x^k=\bar{a}^k_i x'^i$ και πίνακα $A^{-1}=(\bar{a}^k_i)$. Ο μετασχηματισμός A, όταν δρα πάνω σε μία βάση $\{\vec{e}_i\}$ δίδει την βάση $\{e'_i\}$, όπου $\vec{e}'_i=\bar{a}^k_i\vec{e}_k$ και $\vec{e}_k=a^i_k\vec{e}'_i$. Στην περίπτωση, που το τελικό σημείο $P'=(x'^i)$ βρίσκεται σε μία περιοχή του αρχικού σημείου $P=(x^k)$, $x'^i=x'^i(x^k)$, $dx'^i=a^i_k dx^k$, ο A έχει την μορφή του Ιακωβιανού πίνακα $J=\left(a^i_k\right)=\left(\dfrac{\partial x'^i}{\partial x^k}\right)$ και, με αντίστροφο μετασχηματισμό, $dx^k=\bar{a}^k_i dx'^i$, με $J^{-1}=\left(\bar{a}^k_i\right)=\left(\dfrac{\partial x^k}{\partial x'^i}\right)$.

Προσοχή ! Οι συντεταγμένες διανύσματος, έχουν τους δείκτες κάτω. Οι συντεταγμένες σημείου, έχουν τους δείκτες άνω. Τον συσχετισμένο (βλέπε ενότητα "Γεωμετρικές εφαρμογές") χώρο, μπορούμε να τον νοούμε ως αποτελούμενο από σημεία (συντεταγμένες άνω), ή από διανύσματα (συντεταγμένες κάτω). Σε κάθε σημείο του χώρου, αντιστοιχεί ένα και μόνο διάνυσμα μέσω της σχέσης $u_i=g_{ij}\upsilon^j$, και, αντίστροφα, $\upsilon^i=g^{ij}u_j$.

Στην ενότητα "Γεωμετρικές εφαρμογές", παρατηρήσαμε ότι, μία παράλληλη μεταφορά $\xi_i=\xi'_i+p_i$, διατηρεί τα διανύσματα $\overrightarrow{RS}$ αναλλοίωτα (§1, 6), β). Τούτο συνέβαινε, γιατί, είχαμε, ουσιαστικά, ταυτίσει τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{RS}$, με την διαφορά των συντεταγμένων των σημείων R και S. Προϋπόθεση γι' αυτό, ήταν η παραδοχή ότι οι συντεταγμένες τόσο των σημείων όσο και των διανυσμάτων, λαμβάνονταν σε ένα ορθογώνιο (Καρτεσιανό) σύστημα αναφοράς, στο οποίο ο μετρικός τανυστής G είναι ο μοναδιαίος πίνακας, οπότε και δεν χρειάζεται να γίνεται διαφοροποίηση στους δείκτες άνω ή κάτω.

Στην γενική περίπτωση, που έχουμε δύο σημεία, ακόμα και αν αυτά είναι "κοντά", κανένας δεν εξασφαλίζει ότι η διαφορά τους $d\xi_i$ θα μας δώσει τις συντεταγμένες ενός διανύσματος.

12. Το στοιχειώδες μήκος 3. Συνεχίζουμε την προηγούμενη παράγραφο (βλέπε και Space Time Matter του Hermann Weyl, Riemannian Geometry του L.P. Eisenhart).

Θεωρούμε, λοιπόν, τον $\mathbb{R}^n$, και δύο σημεία του $P=(x_i), P'=(x'_i)$, το P' εικόνα του P μέσω ενός "καλού" μετασχηματισμού. Είναι $x_i=f_i(x'_1,\dots,x'_n)$. Υποθέτουμε ότι τα σημεία αυτά, βρίσκονται μέσα σε μία περιοχή του $\mathbb{R}^n$, $P'_i=(x_i+dx_i)$ οπότε θα έχουμε και $dx_i=\dfrac{\partial f_i}{\partial x'_k}dx'_k$. Υποθέτουμε ακόμα, ότι στο σημείο P εφαρμόζεται ένα τυχόν σύστημα αναφοράς, και ότι ο προηγούμενος μετασχηματισμός, είναι ένας μετασχηματισμός των συντεταγμένων. Επιπλέον υποθέτουμε, ότι υπάρχει "καλή" απεικόνιση $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, έτσι ώστε $f_i=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$. Είναι, τότε, $dx'^i=a^i_k dx^k$, με αντίστροφο $dx^k=\bar{a}^k_i dx'^i$, όπου $\left(a^i_k\right)=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x^k}\right)$. Από το τυχόν σημείο P του χώρου, θεωρούμε και το σύνολο των καμπύλων $x^k=x^k(t)$, ως επίσης και τα εφαπτομενικά διανύσματα με συντεταγμένες $u^i=\dfrac{dx^i}{ds}$ ως προς το σύστημα αναφοράς μας, με αρχή το P.

Θεωρούμε, τώρα, το $J\left(f(\vec{x}), \frac{dx^i}{dt}\right)$ όπου $x^i = x^i(t)$ τα σημεία μιας καμπύλης του χώρου μας, που περνά από το P. Παρατηρούμε, ότι από την υπόθεσή μας ότι οι συναρτήσεις f_i είναι συναρτήσεις αλλαγής συντεταγμένων, έπεται ότι για να ταυτίζεται το σημείο P με το σημείο P', που και αυτό είναι πάνω στην καμπύλη, πρέπει και αρκεί να ισχύει η εξίσωση του Euler (βλέπε §10). Πρέπει, δηλαδή, να είναι $\frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i'}\right) = 0$ (1).

9. Γεωδαιτικές καμπύλες. Το μήκος s μιάς καμπύλης, $x_1 = x_1(t), \ldots, x_{n-1} = x_{n-1}(t)$, που κείται πάνω σε μία υπερεπιφάνεια, δίδεται από το ολοκλήρωμα $s = \int_\alpha^\beta \left(g_{ij}\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt}\right)^{\frac{1}{2}} dt$.

Η καμπύλη που συνδέει τα σημεία P και $P_i' = (x_i + dx_i)$ και για την οποία ισχύει η (1), καλείται ***γεωδαιτική*** καμπύλη. Το σύστημα αναφοράς, (P, x^i) για το οποίο ισχύει η προηγούμενη ιδιότητα, ισχύει, καλείται **γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς.**

Θεωρούμε το $\overrightarrow{PP'}$, και θέλουμε να υπολογίσουμε το στοιχειώδες μήκος του, που είναι το $(ds)^2 = g_{ij}dx^i dx^j$. Λαβαίνουμε ως $f(\vec{x})$, την $f(\vec{x}) = \frac{1}{2} g_{ik}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt}$. Έχουμε, τότε, την εξίσωση Euler-Lagrange, $\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x'^i} - \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0$ και, επειδή, $\frac{\partial f}{\partial x_i'} = g_{ik}\frac{dx^k}{ds}$ οπότε και, $\frac{d}{dt}\left(g_{ik}\frac{dx^k}{dt}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{rs}}{\partial x^i}\frac{dx^r}{dt}\frac{dx^s}{dt}$ (1), που είναι και οι εξισώσεις των γεωδαιτικών καμπύλων.

Η εξίσωση (1) λαβαίνει την μορφή

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma_{rs}^k \frac{dx^r}{dt}\frac{dx^s}{dt} = 0$$

όπου

$$\Gamma_{rs}^k = \frac{1}{2} g^{ik}(g_{si,r} + g_{ri,s} - g_{rs,i})$$

$$g_{si,r} = \frac{\partial g_{si}}{\partial x^r},\ g_{ri,s} = \frac{\partial g_{ri}}{\partial x^s},\ g_{rs,i} = \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^i}$$