ΣΥΝΟΛΑ

Σημείωση. Γράφουμε "ανν" αντί του "αν και μόνον αν".

1. Προλεγόμενα. Σε ότι ακολουθεί, ο αναγνώστης θα έρθει σε επαφή με έννοιες από την Μαθηματική Λογική, την Θεωρία Συνόλων, και την Άλγεβρα. Σύμφωνα με την Πλατωνική αντίληψη του Κόσμου, οι έννοιες αυτές θεωρούμε ότι προϋπάρχουν και ότι δεν είναι κενές περιεχομένου. Μία ***οντότης*** για μας εδώ, είναι το περιεχόμενο μιάς έννοιας. Το ενδιαφέρον μας θα επικεντρώνεται στις σχέσεις που αναπτύσσονται ανάμεσα στις οντότητες που θεωρούμε. Έτσι, τα ερωτήματα που θέτουμε, είναι του τύπου "τι ιδιότητες έχει κάτι" και όχι του τύπου "τι είναι κάτι". για παράδειγμα, δεν θέτουμε το ερώτημα "τι είναι η μονάς" αλλά "τι ιδιότητες θα πρέπει να έχει κάποια οντότης, για να την ονομάσουμε μονάδα". Τις οντότητες τις σημειώνουμε με σύμβολα. Προσοχή όμως! Το ίδιο σύμβολο χρησιμοποιείται συχνά για να σημειώσει διαφορετικές οντότητες.
Ενδιαφερόμεθα συνεπώς, για τον προσδιορισμό σχέσεων μεταξύ συμβόλων, των οποίων την ύπαρξη δεχόμεθα, και για την εξαγωγή συμπερασμάτων, τα οποία θα αφορούν τα σύμβολά μας, και μόνον αυτά, και τα οποία συμπεράσματα θα στηρίζονται στις παραπάνω σχέσεις και στην αποδεκτή λογική. Το σύνολο των αρχικά χρησιμοποιουμένων συμβόλων και σχέσεων καλείται ***Αξιωματικό σύστημα.*** Εφόσον στα χρησιμοποιούμενα σύμβολα επισυνάπτουμε οικείες έννοιες θα λέμε ότι, το σύνολο αυτών των εννοιών, αποτελεί ένα ***μοντέλο*** το οποίο αναπαριστά το αξιωματικό μας σύστημα. Επειδή, τώρα, με ορισμένα μοντέλα έχουμε μεγάλη οικειότητα, τα σύμβολα του αξιωματικού μας συστήματος λαβαίνουν ονομασίες, που εμπνέονται από το ιδιαίτερο αυτό μοντέλο.
Ένα αξιωματικό σύστημα πρέπει να είναι:
α) ***Συμβατό.*** Μέσα σ' αυτό, δηλαδή, δεν υπάρχει ζεύγος αντιφατικών προτάσεων, που να μπορούν και οι δύο να εξαχθούν με την αποδεκτή λογική, από τα αξιώματα του συστήματος.
β) ***Ανεξάρτητο***. Τούτο σημαίνει, ότι το σύνολο των αρχικών σχέσεων, που καλούνται και ***αξιώματα (= αιτήματα)*** του συστήματος, δεν παρουσιάζουν πλεονασμούς. Κανένα δηλαδή αξίωμα δεν προκύπτει, με την αποδεκτή λογική, από τα υπόλοιπα.
γ) ***Πλήρες***. Τούτο σημαίνει ότι, για κάθε σχέση που γράφεται για τα σύμβολά μας, είμαστε σε θέση να αποφανθούμε αν και κατά πόσον η σχέση αυτή συνάγεται από προτάσεις του αξιωματικού μας συστήματος.
Ερχόμαστε, τώρα, στην έννοια "σύνολο". Δεχόμεθα τα παρακάτω ως προς την δυνατότητά μας να θεωρούμε "σύνολα". Τα "σύνολά μας" ταξινομούνται σε "επίπεδα". Μηδενικό επίπεδο: Περιέχει τις οντότητες. Πρώτο επίπεδο: Περιέχει συλλογές από οντότητες. Δεύτερο επίπεδο: Περιέχει συλλογές από αντικείμενα που ανήκουν είτε στο πρώτο, είτε στο μηδενικό, είτε και στα δύο προηγούμενα επίπεδα. Τρίτο επίπεδο: Περιέχει συλλογές στοιχείων, που ανήκουν είτε στο δεύτερο, είτε στο πρώτο, είτε στο μηδενικό επίπεδο, είτε σε οιονδήποτε συνδυασμό απ' τα προηγούμενα. Τα επίπεδα κατά τον τρόπο αυτόν αυξάνουν.
Σύνολο καλείται το στοιχείο του τυχόντος k-επιπέδου. ***Κλάσης*** καλείται ότι δεν είναι σύνολο. Συνέπεια αυτής της ταξινομήσεως, είναι ότι το σύνολο όλων των συνόλων είναι κλάσης, και όχι σύνολο.

Ιστορική σημείωση. Η ταξινόμησης αυτή των συνόλων, έγινε από τον Russell στο Principia Mathematica για να αποφύγει την ανάπτυξη παραδόξων ορισμένου τύπου (βλέπε Χρονικό, στο τέλος της ενότητας αυτής). Η κατασκευή αυτή των συνόλων, είναι γνωστή ως cumulative theory of types ή ως cumulative type structure.

2. Το αξιωματικό σύστημα των Zermelo-Fraenkel. Τις οντότητες του μηδενικού επιπέδου θα τις καλούμε ***στοιχεία*** και θα τις συμβολίζουμε με μικρά γράμματα. Τις οντότητες του πρώτου επιπέδου θα τις καλούμε ***σύνολα*** και θα τις συμβολίζουμε, συνήθως, με κεφαλαία γράμματα. Οντότητες του δευτέρου επιπέδου θα συμβολίζονται με κεφαλαία καλλιγραφικά γράμματα.

Εισάγουμε, τώρα, μια συμβολική γλώσσα, με την βοήθεια της οποίας θα χειριζόμαστε τα στοιχεία και τα σύνολα.
α) $\alpha \in A$, διάβαζε, “το α είναι ένα στοιχείο του Α”. $\alpha \notin A$, διάβαζε, “το α δεν ανήκει στο Α”.
β) $\forall$, διάβαζε, “για κάθε”. $\exists$, διάβαζε, “υπάρχει”. : , διάβαζε, “τέτοιο ώστε”.
γ) $\rightarrow$, (ή $\Rightarrow$), διάβαζε “συνεπάγεται”. $\leftrightarrow$ (ή $\Leftrightarrow$) διάβαζε “διπλή συνεπαγωγή”.
δ) $\wedge$, διάβαζε “και”. $\vee$, διάβαζε “είτε”. ! , διάβαζε “ένα και μόνον ένα”.
Οποιοσδήποτε λογικός συνδυασμός των παραπάνω συμβόλων, αποτελεί μία λογική πρόταση φ.
Μία πρόταση, που αφορά την οντότητα x, την συμβολίζουμε με το $\varphi(x)$. Με $\neg\varphi(x)$, ή $\varphi(x)'$ ή $\sim\varphi(x)$ συμβολίζεται η άρνησης της λογικής προτάσεως $\varphi(x)$.
Αν θέλουμε να δηλώσουμε ότι το σύνολο Α αποτελείται από τα στοιχεία α, β, κ.ο.κ., γράφουμε $A = \{\alpha, \beta\}$, κ.ο.κ. Αν τα α, β, κ.ο.κ. είναι στοιχεία, δηλαδή οντότητες του μηδενικού επιπέδου, τότε το $\{\alpha, \beta\}$ είναι μία οντότης του πρώτου επιπέδου. Ιδιαίτερα, στο πρώτο επίπεδο ανήκουν τα σύνολα της μορφής $\{\alpha\}$. Εξ’ ορισμού είναι, $\{\alpha, \alpha\} = \{\alpha\}$. Το δεύτερο επίπεδο είναι δυνατόν, σύμφωνα με την παραπάνω εκτεθείσα θεωρία των τύπων, να περιέχει κάποιο συνδυασμό από οντότητες του τύπου α, β, είτε $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$, είτε $\{\alpha, \beta\}$, είτε $\{\alpha\}$, $\{\alpha, \beta\}$.
Το σύνολο λοιπόν $\{\alpha, \{\alpha\}, \{\alpha, \beta\}\}$ είναι μία οντότης του δεύτερου επιπέδου.

Α1. Αξίωμα κενού συνόλου. Υπάρχει ένα σύνολο, χωρίς στοιχεία. Το σύνολο αυτό το συμβολίζουν με το $\varnothing$, και καλείται ***κενό*** σύνολο. Κάνοντας χρήση της παραπάνω “γλώσσας”, το αξίωμα αυτό είναι δυνατόν να γραφεί και ως εξής: $\exists\varnothing\forall x(x\notin\varnothing)$. Εξ’ ορισμού το $\varnothing$ περιέχεται σε κάθε σύνολο.

Α2. Δυνατότητα σχηματισμού υποσυνόλων. Έστω Ε κάποιο σύνολο, κάποιου επιπέδου, το οποίο από δω και στο εξής θα θεωρούμε ότι αυτό περιέχει τις οντότητες με τις οποίες πρόκειται να ασχοληθούμε. Ένα υποσύνολο τότε Χ του Ε, ορίζεται από μια λογική πρόταση φ. Έχουμε, δηλαδή, ότι $\exists X\forall z(z\in X \leftrightarrow z\in E \wedge \varphi(z))$. Ένα υποσύνολο που ορίζεται από την $\varphi(z)$, θα το συμβολίζουμε απλά ως $X = \{z \mid \varphi(z)\}$.
Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $A \subseteq B$, για να δηλώσουμε ότι το Α ορίζεται ως εξής:

$$A = \{z \mid z\in B\}.$$ Γράφουμε και $B \supseteq A$.

Α3. Τα σύνολα Α και Β ταυτίζονται, γράφουμε $A = B$, αν και μόνον αν, αποτελούνται από τα ίδια στοιχεία.
Χρησιμοποιώντας την συμβολική μας γλώσσα, το Α3 γράφεται και ως εξής:
$\forall z(z\in X \leftrightarrow z\in Y) \rightarrow X = Y$. Ισχύει φανερά και η $X = Y \rightarrow \forall z(z\in X \leftrightarrow z\in Y)$.
Ισχύει, λοιπόν, ότι $\{\alpha, \beta\} = \{\beta, \alpha\}$.
για να αποδείξουμε ότι δύο σύνολα Α και Β ταυτίζονται, αρκεί να δείχνουμε αμφότερες τις σχέσεις $A \subseteq B$ και $A \supseteq B$. Γράφουμε $A \neq B$, αν δεν έχουμε $A = B$.
Αν $A \subseteq B$, αλλά $A \neq B$, γράφουμε $A \subset B$.

Α4. Σύμφωνα με την θεωρία των τύπων, το σύνολο των υποσυνόλων ενός συνόλου Χ, είναι σύνολο. Το συμβολίζουμε με το $X = P(X)$. Το σύνολο όλων των συνόλων, δεν είναι σύνολο.

Α5. Δυνατότητα ενώσεως και τομής δύο συνόλων. Το αξίωμα αυτό εξασφαλίζει ότι τα $A\cup B$ και $A\cap B$ είναι σύνολα. Αυτά ορίζονται ως εξής:

$$A\cup B = \{z \mid z\in A \vee z\in B\} \text{ και } A\cap B = \{z \mid z\in A \wedge z\in B\}.$$

Σημειώνουμε την δυνατότητα θεωρήσεως συνόλων της μορφής $W = \{\{z\}\}$. Επειδή τα z, $\{z\}$ και $\{\{z\}\}$ ανήκουν σε διαφορετικά επίπεδα, το αξίωμα αυτό μας δίδει την δυνατότητα να θεωρούμε κάθε φορά το κατάλληλο επίπεδο για το σύνολο Ε.

Α6. Αξίωμα αντικαταστάσεως. Σύνολα σχηματίζονται και ως εξής:
$X = \{x \mid \exists z!(z\in E \wedge \varphi(x,z))\}$. Το αξίωμα αυτό, μας δίδει την δυνατότητα να αντιστοιχίζουμε το πολύ ένα z σε κάθε x, μέσω κάποιας λογικής προτάσεως φ.

Ιστορική σημείωση. Τα παραπάνω αξιώματα, τα οποία ουσιαστικά καθορίζουν τα “επιτρεπτά” σύνολα, διαμορφώθηκαν από τους Zermelo (1908) - Fraenkel (1922) - Skolem (1930).

Α7. Αξίωμα της επιλογής. Έστω S τυχόν μη κενό σύνολο, και P(S) το σύνολο των υποσυνόλων του. Μπορούμε να θεωρούμε τότε το σύνολο $C = \{z \mid \exists! Z(Z\in P(S) \wedge z\in Z)\}$.
Το C αποτελείται δηλαδή, από στοιχεία z, για τα οποία είμαστε βέβαιοι, ότι υπάρχει ένα και μόνο υποσύνολο Z του M, που να το περιέχει.

3. Άλγεβρα των Συνόλων. Στις παρακάτω σχέσεις, τα χρησιμοποιούμενα σύνολα, είναι όλα υποσύνολα του E.

1) Για τα σύνολα Α, Β, Γ ισχύουν ότι:

α) $A \subseteq A$ β) $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \rightarrow A = B$ γ) $A \subseteq B \wedge B \subseteq \Gamma \rightarrow A \subseteq \Gamma$.

2) για κάθε σύνολο S ισχύει ότι:

α) $\varnothing \subseteq S$ β) $S \subseteq \varnothing$ αν και μόνον αν $S = \varnothing$.

3) $\{x\} \subseteq S$ αν και μόνον αν $x\in S$.

4) Για τα σύνολα Α, Β, Γ ισχύουν ότι:

α) $A\cup A = A = A\cap A$.
β) $A\cup B = B\cup A$ και $A\cap B = B\cap A$.
γ) $A\cup(B\cup\Gamma) = (A\cup B)\cup\Gamma = A\cup B\cup\Gamma$ και $A\cap(B\cap\Gamma) = (A\cap B)\cap\Gamma = A\cap B\cap\Gamma$.
δ) $A\cup(B\cap\Gamma) = (A\cup B)\cap(A\cup\Gamma)$ και $A\cap(B\cup\Gamma) = (A\cap B)\cup(A\cap\Gamma)$.
ε) $A' \subseteq A \wedge B' \subseteq B \rightarrow A'\cup B' \subseteq A\cup B$ και $A' \subseteq A \wedge B' \subseteq B \rightarrow A'\cap B' \subseteq A\cap B$.
στ) $A\cap B \subseteq A \subseteq A\cup B$
ζ) $A\cap B = A \leftrightarrow A \subseteq B$ και $A\cup B = A \leftrightarrow B \subseteq A$.
η) $A\cup\varnothing = A\cup\varnothing = A$ και $A\cap\varnothing = \varnothing\cap A = A$
θ) $A\cup B = \varnothing \rightarrow A = B = \varnothing$.

5) Ορίζεται το ***συμπλήρωμα*** του Β ως προς το Α από την σχέση: $A^c = \{x\in A \wedge x\notin B\}$. Γράφουμε και $A^c = A-B$.

για τα σύνολα Α, Β, Γ ισχύουν ότι:

α) $A-B \subseteq A$.
β) $A-B = A \leftrightarrow A\cap B = \varnothing$.
γ) $A-B = \varnothing \leftrightarrow A \subseteq B$.
δ) $A-B = A-(A\cap B)$ και $A\cap B = A-(A-B)$.
ε) $(A\cup B)-\Gamma = (A-\Gamma)\cup(B-\Gamma)$.
στ) $(A\cap B)-\Gamma = (A-\Gamma)\cap(B-\Gamma) = (A\cap B)-(A\cap\Gamma) = A\cap(B-\Gamma)$.
ζ) $A-(B\cup\Gamma) = (A-B)\cap(A-\Gamma) = (A-B)-\Gamma$.
η) $A-(B\cap\Gamma) = (A-B)\cup(A-\Gamma)$.

6) Για το ***συμπλήρωμα*** A^c του Α ως προς το Ε έχουμε τις σχέσεις,

α) $E^c = \varnothing$ και $\varnothing^c = E$. β) $(A^c)^c = A$. γ) $A \cup A^c = E$.

δ) $A \cap A^c = \varnothing$. ε) $A - B = A \cap B^c$.

στ) $B^c \subseteq A^c \rightarrow A \subseteq B$ και $A \subseteq B \rightarrow B^c \subseteq A^c$

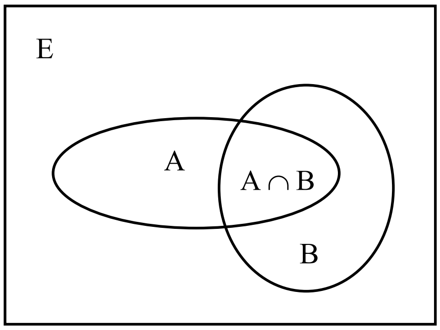
7) Νόμοι του ***de Morgan***. α) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

και β) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

8) Η ***συμμετρική διαφορά*** Δ δύο συνόλων Α και Β ορίζεται από την σχέση

$$A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

Όλες οι παραπάνω σχέσεις ανάμεσα στα σύνολα, απεικονίζονται γραφικά, στο διάγραμμα του Venn:



4. Δυϊκές σχέσεις. Έστω τα σύνολα A και B. Το ***διατεταγμένο ζεύγος*** (α, β) όπου $\alpha\in A$ και $\beta\in B$ ορίζεται ως το σύνολο $(\alpha, \beta) = \{\alpha, \{\alpha, \beta\}\}$. Φανερά, $(\alpha, \beta) \neq (\beta, \alpha)$.
Το ***καρτεσιανό γινόμενο*** $A\times B$ ορίζεται ως το σύνολο $\{(\alpha, \beta) \mid \alpha\in A \wedge \beta\in B\}$.

Παραδείγματα. 1) για κάθε σύνολο S ισχύει ότι, $\varnothing\times S = S\times\varnothing = \varnothing$.
Αντίστροφα, αν $A\times B = \varnothing$, τότε είτε $A = \varnothing$, είτε $B = \varnothing$.
2) $\{\alpha\}\times\{\beta\} = \{(\alpha, \beta)\}$.
3) Αν $A \subseteq \Gamma$ και $B \subseteq \Delta$, τότε και $A\times B \subseteq \Gamma\times\Delta$.
4) $A\times(B\cup\Gamma) = (A\times B)\cup(A\times\Gamma)$.
5) $A\times(B\cap\Gamma) = (A\times B)\cap(A\times\Gamma)$.

Ένα υποσύνολο $R \subseteq A\times B$ καλείται ***δυϊκή σχέση*** εκ του A εις το B. Ιδιαίτερα ενδιαφερόμεθα για την περίπτωση που είναι B = A, οπότε η R καλείται ***δυϊκή σχέση*** επί του A. Θα λέμε ότι η R αληθεύει για το στοιχείο $(\alpha, \beta)\in A\times B$, αν και μόνον αν $(\alpha, \beta)\in R$.
Αντί του $(\alpha, \beta)\in R$ γράφουμε απλά, αRβ.

Συνώνυμα: δυϊκή σχέση = διμελής σχέση = δυαδική σχέση.

Παραδείγματα. 1) Το $\varnothing$ ως υποσύνολο του $A\times B$ ορίζει την κενή δυϊκή σχέση.
2) Το $A\times B$ ως υποσύνολο του εαυτού του ορίζει την ***τετριμμένοι*** δυϊκή σχέση. 3) Έστω R μία δυϊκή σχέση εκ του A εις το B και A΄, B΄ υποσύνολα των A και B αντίστοιχα. Το υποσύνολο $R' = R\cap(A'\times B')$ καλείται περιορισμός της R επί του $A'\times B'$.

Η ***αντίστροφος σχέσης*** της δυϊκής σχέσεως R ορίζεται ως το σύνολο
$$R^{-1} = \{(\beta, \alpha) \mid (\alpha, \beta)\in R\}.$$

Παραδείγματα. 1) $\varnothing^{-1} = \varnothing$ 2) $\left(R^{-1}\right)^{-1} = R$
3) Αν έχουμε δύο δυϊκές σχέσεις Q και R επί το A, τότε ισχύουν :
α) $Q^{-1} = R^{-1}$ αν και μόνον αν $Q = R$ και
β) $Q^{-1} \subseteq R^{-1}$ αν και μόνον αν $Q \subseteq R$.

5. Σχέση ισοδυναμίας. Μία δυϊκή σχέση καλείται ***σχέση ισοδυναμίας*** επί του A, αν και μόνον αν, αυτή είναι ***αυτοπαθής*** (ή ***ανακλαστική***), ***συμμετρική*** και ***μεταβατική***. Δηλαδή, αν και μόνον αν, $\forall\alpha, \beta\in A$, $\alpha R\alpha$, $\alpha R\beta \to \beta R\alpha$ και $\alpha R\beta \wedge \beta R\gamma \to \alpha R\gamma$. Την σχέση ισοδυναμίας την δηλώνουμε με το "≈". Η σχέση ισοδυναμίας "≈" λέγεται ***σχέση ισότητας*** "=" αν και μόνον αν, ισχύει επιπλέον ότι, $\forall\alpha\in A\ \exists!\beta\in A \to (\alpha, \beta)\in R$.
Έστω ότι, μας δίδεται το μη κενό σύνολο A, και μία σχέση ισοδυναμίας R έπ' αυτού. Τότε, με το τυχόν στοιχείο α του A, θεωρούμε και όλα τα ισοδύναμα προς αυτό στοιχεία. Αυτά, αποτελούν το σύνολο, (λέμε την ***κλάση)*** C_α. Φανερά, $C_\alpha \neq \varnothing$ μία και $\alpha \in C_\alpha$ αφού $\alpha \approx \alpha$.
Είναι λοιπόν $x \in C_\alpha$, αν και μόνον αν, $x \approx \alpha$. Παρατηρούμε ότι, το σύνολο A, μερίζεται σε

τάξεις ισοδυνάμων στοιχείων. Μερίζεται δηλαδή σε υποσύνολα C_α, C_β, κλπ., τέτοια ώστε, να έχουν ανά δύο τομή κενή, και η ένωση όλων να είναι το Α.
Πράγματι, αν $C_\alpha \cap C_\beta \neq \varnothing$, και $\gamma \in C_\alpha \cap C_\beta$, τότε, $\gamma \in C_\alpha$ και $\gamma \in C_\beta$. Για κάθε $\alpha \in C_\alpha$ είναι όμως, $\alpha \approx \gamma$ και επειδή το γ είναι και στοιχείο του C_β, $\gamma \approx \beta$. Άρα και $\alpha \approx \beta$, οπότε, $\alpha \in C_\beta$ μια και αυτό, περιέχει όλα τα ισοδύναμα προς το β στοιχεία.
Δείξαμε έτσι ότι, $C_\alpha \subseteq C_\beta$.
Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και η $C_\alpha \supseteq C_\beta$. Άρα είναι $C_\alpha = C_\beta$.
Δεν μπορούμε λοιπόν, να έχουμε διαφορετικές κλάσεις, με τομή μη κενή.
Ξεκινάμε λοιπόν, από το τυχόν στοιχείο α του Α. Σχηματίζουμε την κλάση C_α. Αν αυτή δεν ταυτίζεται με το Α, λαβαίνουμε το στοιχείο $\beta \in A$ με $\beta \notin C_\alpha$ και θεωρούμε όλα τα ισοδύναμα προς αυτό στοιχεία. Αυτά, φανερά, δεν θα ανήκουν στο C_α, και αποτελούν την C_β. Αν $C_\alpha \cup C_\beta \neq A$, λαβαίνουμε εκείνο το στοιχείο γ του Α, που δεν ανήκει στην προηγούμενη ένωση, κ.ο.κ. Με τον τρόπο αυτό, επιτυγχάνουμε τον μερισμό του Α.

Σύνολο Πηλίκο ονομάζουμε το σύνολο εκείνο, που έχει σαν στοιχεία του, τις κλάσεις ισοδυναμίας του Α. Το συμβολίζουμε με A/R.

6. Συναρτησιακή σχέση. Μία δυϊκή σχέση $F \subseteq A \times B$ καλείται ***συναρτησιακή*** σχέση εκ του Α εις το Β, ή απλά ***συνάρτηση*** ή ***απεικόνιση*** με ***πεδίον ορισμού*** το Α και ***πεδίον τιμών*** το Β, αν και μόνον αν $\forall x \in A(\exists! y \in B \rightarrow (x, y) \in F)$. Συμβολίζουμε με f(x) το μοναδικό αυτό y, για το οποίο $(x, y) \in F$, και γράφουμε y = f(x). Το y καλείται ***τιμή*** ή ***εικόνα*** του x δια της f. Χρησιμοποιούμε και τον συμβολισμό $f: A \rightarrow B$ ή τον $x \mapsto y$. Στην περίπτωση που το σύνολο τιμών Υ της f είναι διάφορο του Β η f καλείται ***εντός.*** Αν όμως είναι Υ = Β η f καλείται ***επί.*** Η f καλείται ***ένα-ένα*** αν και μόνον αν και η F^{-1} είναι συνάρτηση.
Λόγω των αξιωμάτων Α6 και Α7 μπορούμε να θεωρούμε ***συναρτήσεις επιλογής***. Μπορούμε, δηλαδή, να θεωρούμε την $F: P(S) \rightarrow S$ η οποία ορίζει μία αντιστοιχία, που στο τυχόν υποσύνολο $A \in P(S)$ αντιστοιχεί το στοιχείο $\alpha \in A$. Πάντα, $\forall F$, $F(\{\varnothing\}) = \varnothing$. Έχουμε, δηλαδή, $\forall A \in P(S)$, $F(A) = \alpha \in A$, όπου $A \neq \varnothing$.
Το F(P(S)) είναι λοιπόν ένα σύνολο, για το οποίο είμαστε βέβαιοι, ότι κάθε στοιχείο του, ανήκει σε ένα και μόνο υποσύνολο, (στοιχείο) του P(S).

Παραδείγματα. 1) Η σχέση ισότητας I_A επί του Α, είναι μία απεικόνιση ένα-ένα του Α επί το Α. Αυτή καλείται ***ταυτοτική απεικόνιση*** του Α.
2) Η κενή σχέση είναι συνάρτηση, αν και μόνον αν $A = \varnothing$.
3) Η σχέση $F = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in \{y\}\} = A \times \{y\}$ είναι μία συνάρτηση, η οποία καλείται ***σταθερά*** επί του Α.
4) Έστω $\mathbb{N}_m = \{1, 2, \ldots, m\} \subset \mathbb{N}$, όπου $\mathbb{N}$ το σύνολο των φυσικών αριθμών. Κάθε σύνολο S, το οποίο απεικονίζεται ένα-ένα επί του υποσύνολου $\mathbb{N}_m$ του $\mathbb{N}$, καλείται ***πεπερασμένο*** σύνολο.

Συναρτήσεις = απεικονίσεις = μετασχηματισμοί, κλπ. Με τον όρο "συνάρτηση από το σύνολο Α στο σύνολο Β" καλύπτουμε εκείνον τον μηχανισμό, που ορίζει την συναρτησιακή σχέση επί του $A \times B$. Και τον μηχανισμό αυτόν, τον παριστάνουμε με f, g, κλπ. Ώστε, για να μπορούμε να λέμε ότι έχουμε μία συνάρτηση, θα πρέπει να πληρούνται τα ακόλουθα: 1) Να έχουν δοθεί δύο σύνολα Α και Β ($\neq \varnothing$, χωρίς να αποκλείουμε Β = Α). 2) Να γνωρίζουμε, για κάθε $x \in A$, το μοναδικό $y \in B$, που αντιστοιχεί μέσω κάποιου συγκεκριμένου μηχανισμού, σ' αυτό. 3) Για να είναι καλά ορισμένη η f, θα πρέπει να αποδείξουμε την μοναδικότητα του f(x). Θα πρέπει δηλαδή, να αποδείξουμε ότι, η σχέση $f(x_1) \neq f(x_2)$ $x_1 \neq x_2$. Θεωρούμε και το σύνολο $f^{-1}(B') = \{x \in A \mid f(x) \in B' \subseteq B\}$, που καλείται, αντίστροφη εικόνα του συνόλου Β΄. Στην περίπτωση που, το $f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(y)$ είναι μονοσύνολο, ορίζεται η συνάρτηση $f^{-1}: B \to A$, που καλείται, ***αντίστροφη συνάρτηση*** της f.

Με $f \mid A$ δηλώνουμε το γεγονός ότι, η f ορίζεται πάνω στο A. Ο ***περιορισμός*** g της f επί του υποσυνόλου A ⊂ X, είναι εκείνη η g: A → Y, για την οποία ισχύει ότι g(x) = f(x), ∀x∈A. Συνήθως, τον περιορισμό της f τον συμβολίζουμε με το ίδιο σύμβολο (δηλαδή το f). Στην περίπτωση αυτή, η f λέγεται και ***επέκταση*** της g.

Injective (εναίσιμος) καλείται μία ένα-ένα απεικόνιση f:U → V**.** Αν δηλαδή,

$$\forall x_1, x_2 \in U, f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2 .$$

Surjective καλείται κάθε επί απεικόνιση. ***Bijective*** καλείται η f, ανν είναι ένα-ένα και επί. ***Αυτομορφισμοί*** καλούνται οι απεικονίσεις ενός συνόλου επί τον εαυτό του. Αν οι απεικονίσεις αυτές είναι και ένα-ένα, τότε ονομάζονται ***μεταθέσεις***.

Φανερά, η f^{-1} είναι συνάρτηση, ανν η f είναι ένα-ένα. Θεωρούμε ∀y∈f(U) το σύνολο f^{-1}(y). Είναι, $\bigcup_{y \in f(U)} f^{-1}(y) = U$ και για $y_1 \neq y_2, f^{-1}(y_1) \cap f^{-1}(y_2) = \varnothing$.

Το σύνολο U, μερίζεται συνεπώς από τα υποσύνολα f^{-1}(y), και η f εισάγει στο U την σχέση ισοδυναμίας R: $x_1, x_2 \in R \leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$

Το σύνολο $f^{-1}(V_1)$, όπου $V_1 \subseteq f(U)$ ορίζεται ως το σύνολο

$$f^{-1}(V_1) = \{x \in U \mid f(x) \in V_1\}.$$

Το σύνολο $f^{-1}(V_1)$ υπάρχει, ανεξάρτητα από το αν η f είναι ένα-ένα ή όχι.

Έστω η f: X → Y και A, A_i, i∈I, υποσύνολα του X και B, B_j, j∈J υποσύνολα του Y. Ισχύουν οι σχέσεις : i) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$.

ii) $f(f^{-1}(B)) \subseteq f(B)$. iii) $f^{-1}(B) = f^{-1}(B \cap f(X))$

iv) $f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$ v) $f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i)$

vi) $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i)$ vii) $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(A_i)$

Θεωρούμε τις απεικονίσεις f: U → V και g: f(U) → W. Μπορούμε να ορίσουμε την απεικόνιση fg: U → W από την σχέση, ∀x∈U, x(fg) = (xf)g = g(f(x)). H h = fg καλείται ***γινόμενο*** ή ***σύνθεση*** των f και g. Για να δηλώσουμε την σύνθεση των συναρτήσεων, χρησιμοποιούμε τα ***αντιμεταθετικά διαγράμματα:***

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & V \arrow[d, "g"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Το γινόμενο δύο συναρτήσεων, δεν ορίζεται βέβαια πάντοτε, πολύ δε περισσότερο, δεν ισχύει πάντα ότι gf = fg. Οπότε σημειώνουμε πάντως στα παρακάτω την σύνθεση δύο συναρτήσεων, θα υποθέτουμε, χωρίς να το λέμε, ότι αυτή ορίζεται.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "fg"'] & V \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "gh"] & \\ & W \arrow[r, "h"'] & Z \end{tikzcd}$$

Για τρεις απεικονίσεις που συντίθενται, ισχύει ο προσεταιριστικός νόμος. Είναι δηλαδή, (fg)h = f(gh), ως προκύπτει από το διάγραμμα που εμφανίζεται παραπλεύρως.

Η σύνθεση ένα προς ένα απεικονίσεων, είναι, φανερά ένα προς ένα απεικόνιση.

Θεωρούμε, τώρα, ένα σύνολο E, και μία σχέση ισοδυναμίας R πάνω σ' αυτό. Στη συνέχεια, θεωρούμε και το σύνολο πηλίκο E/R. Ορίζεται τότε, η συνάρτηση p του E επί το E/R από την σχέση, x $\mapsto C_x$ όπου x∈E και C_x ∈E/R η κλάση ισοδυναμίας στην οποία το x ανήκει. Η p είναι καλά ορισμένη, μια και όπως δείξαμε (βλ. σελ. 2) δεν υπάρχουν κλάσεις ισοδυναμίας με κοινά στοιχεία. Υποθέτουμε ακόμα, ότι έχουμε και κάποιο άλλο σύνολο S, και την απεικόνιση f: E → S, τέτοια ώστε, η σχέση (x,y)∈R → f(x) = f(y).

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & E/R \arrow[d, "g"] \\ & S \end{tikzcd}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ. Υπάρχει η g: $E/R \to S$ και είναι μοναδική, έτσι ώστε, το δίπλα διάγραμμα, να καθίσταται αντιμεταθετικό. Επιπλέον, αν f surjection, η g είναι bijection.

Απόδειξη. Θα πρέπει να δείξουμε ότι, $f = pg$. Πράγματι, από υπόθεση, η f απεικονίζει όλα τα ισοδύναμα στοιχεία του E, σε ένα στοιχείο $s \in S$. Αν λοιπόν ορίσουμε την g έτσι ώστε $C_x \mapsto s = f(x)$, το πιο πάνω διάγραμμα καθίσταται αντιμεταθετικό. Η g είναι ένα-ένα, γιατί αν είχαμε ότι $C_x \mapsto s$ και $C_y \mapsto s$ με $C_x \neq C_y$, οπότε και το x δεν θα είναι ισοδύναμο του y, τότε θα έπρεπε λόγω του τρόπου με τον οποίον ορίστηκε η f, να έχουμε και $f(x) \neq f(y)$, πράγμα αδύνατον, μία και
$f = pg$. Δηλαδή, $g(p(x)) = g(p(y)) = s$ ανν $x \approx y$.

7. Εσωτερικές πράξεις - Δομές. Μία απεικόνιση f: $A \times A \to A$ ($A \neq \emptyset$) καλείται ***εσωτερική πράξη*** επί του A. Αντί να σημειώνουμε με το $f(\alpha,\beta)$ την εικόνα του στοιχείου $(\alpha,\beta) \in A \times A$, γράφουμε $\alpha f \beta$. Στην γραφή αυτή, αντί του συμβόλου f, που δηλώνει την πράξη μας, χρησιμοποιούμε σύμβολα, ως τα "+" (πρόσθεση), "$\circ$" (πολλαπλασιασμός), ή "$*$". Συνήθως, το πολλαπλασιαστικό σύμβολο ανάμεσα σε δύο στοιχεία του A, παραλείπεται. Το $(A,*)$ καλείται ***δομή μιάς εσωτερικής πράξεως***.
Μία εσωτερική πράξη λέγεται ***προσεταιριστική***, αν και μόνον αν, $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ οπότε γράφουμε απλά $\alpha\beta\gamma$, για κάθε $\alpha,\beta,\gamma \in A$.
Ομαδοειδές καλείται μία δομή μιάς εσωτερικής πράξεως.
Ημιομάδα καλείται μία δομή μιάς προσεταιριστική εσωτερικής πράξεως.
Ένα στοιχείο $e \in A$, αν υπάρχει, και για το οποίο ισχύει ότι $\forall \alpha \in A$, $e\alpha = \alpha$, καλείται ***αριστερά μοναδιαίο στοιχείο*** του A. Φανερός είναι ο ορισμός του ***δεξιά μοναδιαίου στοιχείου***. ***Ουδέτερο*** στοιχείο του A είναι το $e \in A$, ανν είναι ταυτόχρονα αριστερά και δεξιά μοναδιαίο στοιχείο. Συμβολίζουμε το e με το 1 ή το 0, όταν βέβαια δεν υπάρχει η πιθανότητα συγχύσεως του ουδετέρου στοιχείου e με τον αριθμό 1, ή το 0. Μία ημιομάδα με ουδέτερο στοιχείο, την καλούμε επίσης και ***ημιομάδα με μονάδα***. ***Αριστερά αντίστροφο*** στοιχείο, του τυχόντος στοιχείου α μιάς ημιομάδας με ουδέτερο στοιχείο, καλείται το στοιχείο α^{-1} για το οποίο ισχύει ότι, $\alpha^{-1}\alpha = e$. Ανάλογα ορίζεται το ***δεξιά αντίστροφο*** στοιχείο. Στην περίπτωση, που το α^{-1} είναι και αριστερά και δεξιά αντίστροφο στοιχείο του α, καλείται απλά ***αντίστροφο*** στοιχείο του α. Θέτουμε $\alpha^n = \alpha\alpha^{n-1}$. Ισχύει ότι, $\alpha^n\alpha^m = \alpha^{n+m} = \alpha^m\alpha^n$.

Μορφισμοί ή ***ομομορφισμοί*** καλούνται γενικώς, οι συναρτήσεις, που διατηρούν την δομή του πεδίου ορισμού τους. Αν δηλαδή $\varphi : A \to B$ ένας μορφισμός της δομής $(A,*)$ επί την δομή $(B,\bullet)$, ισχύει τότε το αντιμεταθετικό διάγραμμα :

$$\begin{tikzcd} A \times A \ni (a,b) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\varphi"'] & a * b \arrow[d, "\varphi"'] \\ \varphi(A) \times \varphi(A) \ni (\varphi(a),\varphi(b)) \arrow[r, mapsto] & \varphi(a) \bullet \varphi(b) \end{tikzcd}$$

Έχουμε συνεπώς, την ισότητα: $\varphi(a * b) = \varphi(a) \bullet \varphi(b)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Η απεικόνιση λογάριθμος $\log \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ των θετικών πραγματικών αριθμών εντός του συνόλου των πραγματικών αριθμών, είναι ένας μορφισμός της δομής $(\mathbb{R}_+,\cdot)$ εντός της δομής $(\mathbb{R},+)$ και, πράγματι, ισχύει ότι, $\log(ab) = \log a + \log b$. Ο πολλαπλασιασμός συνεπώς δύο αριθμών, αντικαθίσταται από την πρόσθεση των λογαρίθμων τους. Με την λογική αυτή, λειτουργεί ο λογαριθμικός κανών.

Επιμορφισμοί, λέγονται οι μορφισμοί $f: A \to B$, που είναι επί, δηλαδή, f(A) = B. ***Ενδομορφισμοί,*** οι μορφισμοί f, που είναι εντός, δηλαδή, f(A) ⊂ B. ***Μονομορφισμοί,*** καλούνται οι μορφισμοί, που είναι ένα-ένα απεικονίσεις. ***Ισομορφισμοί,*** καλούνται οι επιμορφισμοί που, είναι επιπλέον και μονομορφισμοί (είναι δηλαδή, bijective).

Πρόταση. Αν $\varphi : A \to B$ ισομορφισμός, ισχύουν τότε οι παρακάτω σχέσεις:

1) Η απεικόνιση $\varphi^{-1} : B \to A$ είναι και αυτή ισομορφισμός. Αφού η φ είναι ένα – ένα και επί και η φ^{-1} είναι ένα – ένα και επί. Συνεπώς, για τα τυχόντα $b_1, b_2 \in B$ υπάρχουν μοναδικά $a_1, a_2 \in A$, τέτοια ώστε, $\varphi(a_1) = b_1$, $\varphi(a_2) = b_2$. Όμως, $\varphi(a_1 a_2) = \varphi(a_1)\varphi(a_2) = b_1 b_2$ άρα και, $\varphi^{-1}(b_1 b_2) = a_1 a_2 = \varphi^{-1}(b_1)\varphi^{-1}(b_2)$

2) Η σύνθεση δύο ισομορφισμών είναι ισομορφισμός. Πράγματι, αφού οι απεικονίσεις $\varphi_1 : A \to B$, $\varphi_2 : B \to \Gamma$ είναι ένα – ένα και επί, και η $\varphi_2\varphi_1 = \varphi_3 : A \to \Gamma$ θα είναι ένα – ένα και επί. Έστω τα $a_1, a_2 \in A$. Είναι τότε,

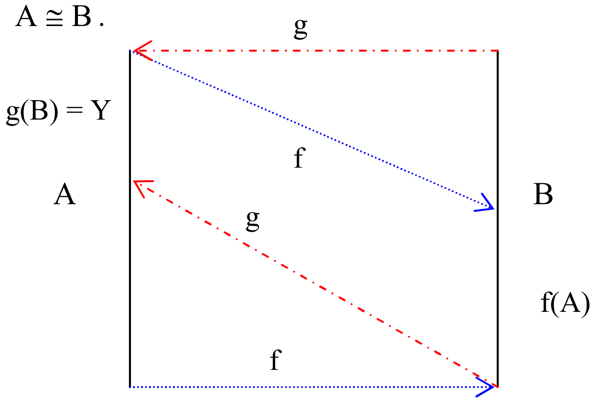
$$\varphi_2\varphi_1(a_1a_2) = \varphi_2(\varphi_1(a_1a_2)) = \varphi_2(\varphi_1(a_1)\varphi_1(a_2)) =$$
$$\varphi_2(\varphi_1(a_1))\varphi_2(\varphi_1(a_2)) = \varphi_2\varphi_1(a_1)\varphi_2\varphi_1(a_2)$$

3) Αν η δομή Α έχει μοναδιαίο στοιχείο e, το $\varphi(e)$ είναι μοναδιαίο στοιχείο της δομής Β.
Απόδειξη. Έστω ότι $\varphi(e) = b$, και $y = \varphi(x)$. Τότε και, $by = \varphi(e)\varphi(x) = \varphi(ex) = \varphi(x) = y$.

4) Αν η δομή Α έχει αντίστροφο στοιχείο a^{-1} του στοιχείου a, τότε και, $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$.
Απόδειξη. $\varphi(e) = \varphi(a^{-1}a) = \varphi(a^{-1})\varphi(a) = b$. Το $\varphi(a^{-1})$ είναι συνεπώς το αντίστροφο στοιχείο του $\varphi(a)$.

8. Το θεώρημα των Cantor – Bernstein. Το αξίωμα A_3 (σελ. 2) ορίζει πότε δύο σύνολα Α και Β ταυτίζονται. Μέσω των ένα-ένα και επί συναρτήσεων, ορίζουμε πότε δύο σύνολα είναι ισοδύναμα. Γράφουμε $A \cong B$ και λέμε ότι το σύνολο Α είναι ισοδύναμο με το σύνολο Β, ανν υπάρχει bijection $g: A \to B$. Φανερά η σχέση "≅" όπως ορίσθηκε, είναι μία σχέση ισοδυναμίας. Ισχύει επιπλέον το

ΘΕΩΡΗΜΑ των Cantor-Bernstein. Δίδονται δύο μη κενά σύνολα Α και Β, για τα οποία υπάρχουν συναρτήσεις ένα-ένα και εντός, (injections) $f: A \to B$ και $g: B \to A$. Είναι, τότε, $A \cong B$.



Απόδειξη. Έχουμε ότι, $f(A) \subset B$ και $g(B) \subset A$. Θέτουμε $Y = g(B)$. Η συνάρτηση $s = g(f(A)) : A \to A$ ορίζεται, και είναι ένα-ένα και εντός, και επιπλέον, $s(A) \subseteq Y \subset A$. Το θεώρημα θα έχει αποδειχθεί, αν ορίσουμε μια ένα-ένα και επί συνάρτηση $\sigma : A \to B$.

Θέτουμε $Z = B - f(A)$ και $S = g(Z) \cup s(A) \cup s^2(A) \cup \ldots$. Την συνάρτηση σ την ορίζουμε ως εξής:

$$\sigma(x) = \begin{cases} f(x) & \text{για } x \in S \\ f(s(x)) & \text{για } x \notin S \end{cases}$$

α) Η σ είναι επί..
Είναι $A = S \cup (A - S)$, και συνεπώς, $\sigma(A) = \sigma(S) \cup \sigma(A - S) = f(S) \cup f(A - S)$.

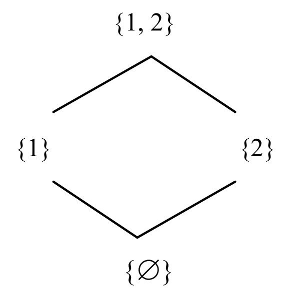
Όμως, $f(S) = f(g(Z)) \cup f(s(A)) \cup f(s^2(A)) \cup \ldots$, άρα και, $f(S) = f(g(Z)) \cup s(S)$.
Άρα και $\sigma(A) = f(g(Z)) \cup s(S) \cup f(A - S) = f(g(Z)) \cup f(A) = B$.
β) Η σ είναι ένα-ένα. Επειδή όλες οι συναρτήσεις που χρησιμοποιήσαμε είναι ένα-ένα, αρκεί να δείξουμε ότι, $\sigma(S) \cap \sigma(A - S) = \varnothing$.
Είναι, όμως, $\sigma(S) = f(S)$ και $\sigma(A - S) = f(A - S) = f(A) - f(S)$

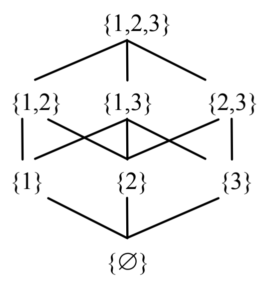
Φανερά, δύο σύνολα που ταυτίζονται, είναι ισοδύναμα. Κατόπιν τούτου, και του προηγουμένου θεωρήματος, δικαιούμεθα να γράφουμε απλά "=" αντί του "≅" για να δηλώσουμε την ισότητα ή την ισοδυναμία δύο συνόλων.

Παρατήρηση. Υπάρχουν σύνολα, τα οποία είναι ισοδύναμα προς κάποιο υποσύνολό τους. Παράδειγμα το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών. Η σχέση $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \mapsto 2n$ είναι μία bijection του συνόλου $\mathbb{N}$ στο υποσύνολό του που περιλαμβάνει τους αρτίους φυσικούς. Η ιδιότης αυτή μάλιστα, χαρακτηρίζει τα **άπειρα σύνολα.**

9. Σχέσεις διατάξεως. Μία δυϊκή σχέση καλείται σχέση διατάξεως επί του Α, ανν, αυτή είναι ***αυτοπαθής*** (ή ***ανακλαστική***), ***αντισυμμετρική*** και ***μεταβατική***. Δηλαδή, αν και μόνον αν, $\forall \alpha, \beta \in A$, $\alpha R \alpha$, $\alpha R \beta \wedge \beta R \alpha \to \alpha = \beta$ και $\alpha R \beta \wedge \beta R \gamma \to \alpha R \gamma$. Την σχέση διατάξεως την δηλώνουμε με το " ≤ ". Γράφουμε $\alpha < \beta$, αν και μόνον αν $\alpha \leq \beta$ και $\alpha \neq \beta$. Χρησιμοποιούμε επίσης και τον συμβολισμό " ≥" και ">" με το προφανές νόημα. Δύο στοιχεία, που ανήκουν στην R λέγονται συγκρίσιμα.
Αν για τα $\alpha, \beta \in A$ ισχύει ότι είτε $(\alpha, \beta) \in R$ είτε $(\beta, \alpha) \in R$, τότε η σχέση διατάξεως R λέγεται ***ολική***. Αν η R είναι ολική, ισχύει ότι $R \cup R^{-1} = A \times A$. Κάθε ολικά διατεταγμένο υποσύνολο ενός συνόλου καλείται ***άλυσσος***.
Το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών είναι άλυσσος.
Την σχέση διατάξεως την απεικονίζουμε με ένα επίπεδο διάγραμμα, θέτοντας το αριστερά του "≤ " ευρισκόμενο στοιχείο κάτω από το δεξιά του "≤ " ευρισκόμενο στοιχείο, και συνδέοντας τα δύο αυτά στοιχεία με ένα ευθύγραμμο τμήμα. Υποτίθεται, βέβαια, ότι για την "≤" του διαγράμματος, ισχύει ότι, αν $x \leq z < y$, τότε $z = x$. (Διάγραμμα του Hasse).
Μία άλλη μέθοδος αναπαραστήσεως μιας σχέσης διατάξεως επί ενός συνόλου, είναι μέσω της κατασκευής του ***συνημμένου πίνακος*** (adjacency matrix). Ο πίνακας αυτός περιέχει το στοιχείο $r = 0$ ή το $r = 1$, ανάλογα με το αν τα στοιχεία που γραμμής / κολώνας που ορίζουν την θέση του r ανήκουν ή όχι στην εν λόγω διάταξη.

Παραδείγματα. Στο σύνολο των υποσυνόλων ενός συνόλου, η σχέση "⊆" αποτελεί μιά σχέση διατάξεως πάνω σ' αυτό. Το σύνολο {1, 2} έχει σαν σύνολο υποσυνόλων το {∅, {1}, {2}, {1, 2}}. Επίσης, το σύνολο {1, 2, 3} έχει σαν σύνολο υποσυνόλων το {∅, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {2, 3}, {1, 3}, {1, 2, 3}}. Τα διαγράμματα της σχέσεως "⊆" πάνω στα δύο αυτά σύνολα είναι τα παρακάτω.





Το υποσύνολο {∅, {1}, {1,2}, {1,2,3}} αποτελεί μία (πεπερασμένη) άλυσσο του P({1,2,3}).
Ο συνημμένος πίνακας που ορίζει η σχέση διατάξεως "⊆" στο σύνολο των υποσυνόλων του {1, 2, 3} είναι

	$\varnothing$	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1,3}	{2, 3}	{1,2,3}
$\varnothing$	1	1	1	1	1	1	1	1
{1}	0	1	0	0	1	1	0	1
{2}	0	0	1	0	1	0	1	1
{3}	0	0	0	1	0	1	1	1
{1, 2}	0	0	0	0	1	0	0	1
{1,3}	0	0	0	0	0	1	0	1
{2, 3}	0	0	0	0	0	0	1	1
{1,2,3}	0	0	0	0	0	0	0	1

ο πίνακας $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Έστω P και Q σχέσεις διατάξεως επί των συνόλων A και B αντίστοιχα, και
f: A $\to$ B μία απεικόνιση εκ του A εις το B. Θα λέμε ότι η f ***διατηρεί την διάταξη*** αν και μόνον αν, $\forall(\alpha, \beta)\in P \to (f(\alpha), f(\beta))\in Q$. Ένας ***ισομορφισμός*** της διάταξης θα λέγεται η f, αν αυτή είναι ένα-ένα και επί, διατηρεί την διάταξη, και η f^{-1} διατηρεί την διάταξη.

Παραδείγματα. 1) Μία συνάρτηση που διατηρεί την διάταξη, μετασχηματίζει αλύσσους σε αλύσσους. Μία συνάρτηση που διατηρεί την διάταξη και ορίζεται πάνω σε μία άλυσσο είναι ισομορφισμός, αν είναι ένα-ένα. Μία άλυσσος με διάταξη την "$\leq$ " λέγεται ***αύξουσα***. Με διάταξη την " $\geq$" λέγεται ***φθίνουσα***.

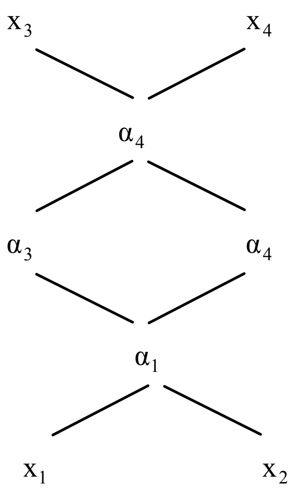
2) Κάθε $A \subseteq S$ που έχει ισόμορφο εικόνα το $\mathbb{N}_m = \{1, 2, \ldots, m\}$, είναι μία ***πεπερασμένη*** άλυσσος. Κάθε $A \subseteq S$ που έχει ισόμορφο εικόνα το $\mathbb{N}$ είναι μία άλυσσος.

10. Φράγματα. Αξεπέραστα στοιχεία. Θεωρούμε ένα σύνολο S και A κάποιο υποσύνολό του. Υποθέτουμε ότι το S έχει την διάταξη "$\leq$ ". Ένα στοιχείο $x\in S$ λέγεται ***άνω φράγμα*** του A, αν και μόνον αν, $\forall\alpha\in A$, $\alpha \leq x$. Το x καλείται ***κάτω φράγμα*** του S, ανν $\forall\alpha\in A$, $x \leq \alpha$. Στην περίπτωση, που $A = \varnothing$, το $x\in S$ είναι και άνω και κάτω φράγμα του A.
Κάθε άνω φράγμα x του A ως προς την "$\leq$ " είναι κάτω φράγμα ως προς την " $\geq$". για κάθε πρόταση, που αφορά την "$\leq$ " και τα κάτω φράγματα, έχουμε μία "δυϊκή" πρόταση, που αφορά την " $\geq$" και τα άνω φράγματα.
Ένα άνω φράγμα του A, είναι άνω φράγμα και κάθε υποσυνόλου του A. (Ανάλογα ισχύουν για τα κάτω φράγματα). Μία συνάρτηση που διατηρεί την διάταξη, μεταφέρει τα άνω (αντ. κάτω) φράγματα σε άνω (αντ. κάτω) φράγματα.
Το πολύ ένα στοιχείο του A είναι δυνατόν να είναι άνω φράγμα του A. Πράγματι, αν τα στοιχεία α_i, $\alpha_j\in A$ ήταν και τα δύο άνω φράγματα του A, τότε θα ίσχυαν αμφότερες οι σχέσεις $\alpha_i \leq \alpha_j$ και $\alpha_j \leq \alpha_i$. Άρα αναγκαίως είναι, $\alpha_i = \alpha_j$. Το μοναδικό αυτό στοιχείο του A, καλείται ***μέγιστο*** στοιχείο του A. Ανάλογα, έχουμε και τον ορισμό του μοναδικού ***ελαχίστου*** στοιχείου του A.

Αν το Α είναι φραγμένο, και το σύνολο των άνω φραγμάτων του έχει στοιχείο ελάχιστο, τότε το στοιχείο αυτό, καλείται ***ανώτερο πέρας*** του Α. Το συμβολίζουμε με supA. Αν το σύνολο των κάτω φραγμάτων του Α έχει στοιχείο μέγιστο, το στοιχείο αυτό καλείται ***κατώτερο πέρας*** του Α. Το συμβολίζουμε με infA. Αν το Β είναι κάποιο υποσύνολο του Α και τα supA, supB υπάρχουν, τότε supB $\leq$ supA.
Οι παρακάτω σχέσεις είναι ισοδύναμες: α) $x \leq y$. β) $\sup\{x,y\} = y$. γ) $\inf\{x,y\} = x$.

Ένα στοιχείο α του $A \subseteq S$ λέμε ότι είναι ***αξεπέραστο προς τα επάνω*** εν Α, αν δεν υπάρχει στοιχείο του Α που είναι > του α. Ανάλογα έχουμε τα ***αξεπέραστα προς τα κάτω*** στοιχεία του Α.

Παραδείγματα. 1) Έστω $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ με την διάταξη που εμφανίζεται στο παρακάτω διάγραμμα. $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \subset S$. Τα στοιχεία x_3, x_4 είναι άνω φράγματα του Α, που δεν ανήκουν στο Α. Το α_4 είναι άνω φράγμα του Α, που ανήκει στο Α. Τα στοιχεία x_1, x_2 είναι κάτω φράγματα του Α, που δεν ανήκουν στο Α. Το α_1 είναι κάτω φράγμα του Α, που ανήκει στο Α. Το υποσύνολο $X_1 = \{x_1, x_2\}$ δεν έχει κάτω φράγμα. Το υποσύνολο $X_2 = \{x_3, x_4\}$ δεν έχει άνω φράγμα. Το α_4 είναι το μέγιστο στοιχείο του Α και το α_1 το ελάχιστο στοιχείο του Α.



Το σύνολο $\{\alpha_4, x_3, x_4\}$ είναι σύνολο άνω φραγμάτων του Α και έχει ελάχιστο στοιχείο το α_4. Είναι λοιπόν, $\sup A = \alpha_4$.
Όμοια, $\inf A = \alpha_1$. Εδώ, τα sup και inf του Α είναι και στοιχεία του Α. Αυτό όμως δεν συμβαίνει πάντοτε.
Αν $A_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, τότε τα στοιχεία α_2, α_3 είναι αξεπέραστα προς τα επάνω στοιχεία του Α. Το α_1 είναι στοιχείο αξεπέραστο προς τα κάτω.

2) Ένα υποσύνολο $\mathbb{N}_m \subset \mathbb{N}$, έχει μέγιστο στοιχείο, το m.

3) Ένα στοιχείο $\alpha \in A$ είναι αξεπέραστο προς τα επάνω, αν και μόνον αν, $\forall x \in A$, $\alpha \leq x \rightarrow \alpha = x$. Αν το Α έχει ένα μοναδικό στοιχείο αξεπέραστο προς τα επάνω, τότε αυτό είναι και το μέγιστο στοιχείο του Α. Αν το $x \in B \subseteq A$ είναι αξεπέραστο προς τα επάνω στοιχείο του Α, είναι τότε, και αξεπέραστο στοιχείο του Β. Ένας ισομορφισμός της διατάξεως μετασχηματίζει αξεπέραστα στοιχεία σε αξεπέραστα στοιχεία.

Πρόταση. Κάθε διατεταγμένο πεπερασμένο μη κενό σύνολο S, έχει στοιχεία αξεπέραστα προς τα επάνω.
Απόδειξη. Αν $S = \{x\}$, το x είναι και στοιχείο αξεπέραστο προς τα επάνω του S. Έστω τώρα, ότι το S έχει m+1 στοιχεία, και ότι η πρόταση ισχύει για το υποσύνολο εκείνο Α του S, που έχει m το πλήθος στοιχεία. Έστω $x \in S$. Αν το x είναι αξεπέραστο προς τα επάνω εν S, δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Έστω, λοιπόν, ότι το x δεν είναι αξεπέραστο προς τα επάνω εν S, και $A = S - \{x\}$. Υπάρχουν τότε στοιχεία α εν S, $\alpha \neq x$, με $\alpha > x$. Όμως, $\alpha \in A$, και το Α από υπόθεση έχει στοιχεία αξεπέραστα προς τα επάνω. Υπάρχουν, λοιπόν, στοιχεία $\alpha_i \in A$, τέτοια ώστε, $\forall \alpha \in A$, $\alpha < \alpha_i$. Άρα και $x < \alpha_i$. Όμως, $\alpha_i \in S$, και η προηγούμενη ανισότητα δείχνει ότι, τα α_i είναι και αξεπέραστα στοιχεία του S. Κακώς, λοιπόν, υποθέσαμε ότι το S δεν έχει αξεπέραστα στοιχεία προς τα επάνω.

Αν το Α είναι μία άλυσσος, τότε αν έχει στοιχείο αξεπέραστο προς τα επάνω, αυτό θα είναι και μέγιστο στοιχείο του Α.

Πόρισμα. Κάθε μη κενή πεπερασμένη άλυσσος, έχει μέγιστο στοιχείο.

Πρόταση. Κάθε άλυσσος με m στοιχεία, είναι ισόμορφος ως προς την διάταξη, με κάποιο $\mathbb{N}_m$.

Απόδειξη. Αν m = 1, δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε.
Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για m = m–1, και έστω μία άλυσσος A με m στοιχεία. Έστω α το μέγιστο στοιχείο της A. Η άλυσσος A–{α} έχει m–1 το πλήθος στοιχεία. Άρα αυτή είναι ισόμορφος του $\mathbb{N}_{m-1}$, μέσω κάποιου ισομορφισμού φ. Θέτουμε $\alpha \mapsto m+1$. Η απεικόνιση φ΄, τώρα, η οποία επί του A–{α} συμπίπτει με τον ισομορφισμό φ και έχει $\varphi'(\alpha) = m+1$, ορίζει τον ζητούμενο ισομορφισμό.

11. Συνθήκες μεγίστου-ελαχίστου.

Θεώρημα. Έστω S διατεταγμένο σύνολο. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες. α) Υπάρχει μη κενό υποσύνολο του S, που να είναι αύξουσα άλυσσος. β) Υπάρχει μη κενό υποσύνολο του S, που δεν έχει αξεπέραστα προς τα άνω στοιχεία.

Απόδειξη. Έστω ότι ισχύει η β). Ότι, δηλαδή, το μη κενό υποσύνολο A του S δεν έχει αξεπέραστα προς τα άνω στοιχεία. Θεωρούμε την συνάρτηση επιλογής F, που ορίζεται πάνω στο P(S), και έστω ότι $F(A) = \alpha_1$, $\alpha_1 \in A$. Επειδή το A δεν έχει στοιχεία αξεπέραστα προς τα επάνω, το σύνολο $A_1 = \{x \mid x\in A \wedge \alpha_1 < x\}$ είναι σίγουρα μη κενό. Έστω $F(A_1) = \alpha_2$, $\alpha_2 \in A_1$, και για τους ίδιους λόγους, το $A_2 = \{x \mid x\in A_1 \wedge \alpha_2 < x\}$ είναι μη κενό. Η διαδικασία αυτή ορίζει το σύνολο $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$, που εκ κατασκευής, είναι μία αύξουσα άλυσσος. Άρα η β) → α).

Έστω ότι το μη κενό υποσύνολο A του S είναι μία αύξουσα άλυσσος. Είναι τότε ισόμορφο του $\mathbb{N}$. Άρα δεν έχει αξεπέραστα προς τα επάνω στοιχεία. Άρα η α) → β).

Πόρισμα. Έστω S διατεταγμένο σύνολο. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες. α) Δεν υπάρχει μη κενό υποσύνολο του S, που να είναι αύξουσα άλυσσος.
Ή: "Κάθε αύξουσα άλυσσος του S είναι πεπερασμένη".
β) Κάθε μη κενό υποσύνολο του S, έχει αξεπέραστα προς τα άνω στοιχεία.
α΄) Δεν υπάρχει μη κενό υποσύνολο του S, που να είναι φθίνουσα άλυσσος.
Ή: "Κάθε φθίνουσα άλυσσος του S είναι πεπερασμένη" .
β΄) Κάθε μη κενό υποσύνολο του S, έχει αξεπέραστα προς τα κάτω στοιχεία.

Οι προτάσεις του πορίσματος αυτού, είναι η άρνησης των προτάσεων του προηγουμένου θεωρήματος. Η α) καλείται ***συνθήκη της αυξούσης αλύσσου***. (Η α΄) καλείται ***συνθήκη της φθινούσης αλύσσου***.) Η β) καλείται ***συνθήκη του μεγίστου***. (Η β΄) καλείται ***συνθήκη του ελαχίστου***.)

Πόρισμα. Αν το S πληροί μία από τις παραπάνω συνθήκες, και κάθε υποσύνολό του θα την πληροί.

Παράδειγμα. Το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών, πληροί την συνθήκη του ελαχίστου.

Αρχή της επαγωγής. Έστω ότι το διατεταγμένο σύνολο S έχει τις ιδιότητες:
α) Όλα τα αξεπέραστα προς τα κάτω στοιχεία του (εφ' όσον υπάρχουν) πληρούν την πρόταση *φ*. β) Αν η *φ* πληρούται από κάθε $x < \alpha$, πληρούται και από το $\alpha\in S$.
Συμπέρασμα. Η *φ* πληρούται από όλα τα στοιχεία του S.

Θεώρημα. Η συνθήκη του ελαχίστου (β΄), η συνθήκη της φθίνουσας αλύσσου (α΄) και η συνθήκη της επαγωγής (γ), είναι προτάσεις ισοδύναμες.
Έχουμε δείξει την ισοδυναμία (α΄) ↔ (β΄). Θα δείξουμε την (β΄) → (γ) και στην συνέχεια, την (γ) → (α΄).
Απόδειξη. α) Η συνθήκη της επαγωγής έπεται από την συνθήκη του ελαχίστου.
Έστω διατεταγμένο σύνολο S, το οποίο πληροί την συνθήκη του ελαχίστου, και τις προϋποθέσεις της επαγωγής. Έστω ότι η *φ* δεν ισχύει για όλα τα στοιχεία του S. Θεωρούμε, εκείνο το υποσύνολο A του S, που είναι βέβαια $\neq \emptyset$, για το οποίο δεν ισχύει η *φ*. Αυτό έχει ένα

αξεπέραστο προς τα κάτω στοιχείο. Από υπόθεση όμως, για το στοιχείο αυτό ισχύει η φ. Άτοπο. Άρα $A = \emptyset$, δηλαδή, η φ ισχύει για όλα τα στοιχεία του S.

β) Η συνθήκη της φθίνουσας αλύσσου, έπεται από την αρχή της επαγωγής. Έστω διατεταγμένο σύνολο S, το οποίο πληροί την αρχή της επαγωγής. Λαβαίνουμε ως φ την πρόταση (α΄): Κάθε φθίνουσα άλυσσος του S είναι πεπερασμένη.
Αρκεί να δείξουμε ότι, η φ πληροί τις προϋποθέσεις της επαγωγής. Πράγματι, τα αξεπέραστα προς τα κάτω στοιχεία του S, αποτελούν από μόνα τους πεπερασμένες αλύσσους. εξ' άλλου, αν η φ πληρούται από το $x < \alpha$, πληρούται και από το α, μιά και το $\{x, \alpha\}$ αποτελεί πεπερασμένη άλυσσο. Ισχύει, λοιπόν η φ παντού εν S.

12. Καλή διάταξης. Λήμμα Zorn. Ένα ολικά διατεταγμένο σύνολο, το οποίο πληροί την συνθήκη του ελαχίστου καλείται ***καλά διατεταγμένο.*** Το σύνολο $\mathbb{N}$, όπως και κάθε ισόμορφη εικόνα του, είναι, λοιπόν, ένα καλά διατεταγμένο σύνολο.
Έστω S διατεταγμένο σύνολο και A τυχόν υποσύνολό του. Θα καλούμε το A ***αρχικό τμήμα,*** ή απλά ***τμήμα,*** αν και μόνον αν, $\forall \alpha \in A \wedge x \in S\ (x \leq \alpha \rightarrow x \in A)$.

Λήμμα. Έστω καλά διατεταγμένο σύνολο A, και $C \subset A$ ένα τμήμα. Υπάρχει τότε κάποιο $\alpha \in A$, τέτοιο ώστε $C = \{x \mid x \in A \wedge x < \alpha\}$.
Απόδειξη. Αρκεί να λάβουμε α = το ελάχιστο στοιχείο του $A - C$.

Λήμμα. Έστω $\mathcal{A}$ ένα σύνολο από καλά διατεταγμένα σύνολα. Αν $A \in \mathcal{A}$, με "$\leq_A$" συμβολίζουμε την καλή διάταξη του A. Έστω ότι, για κάθε A, $B \in \mathcal{A}$, είτε το A είναι ένα τμήμα του B ως προς τον περιορισμό της "$\leq_B$" είτε αντίστροφα. Υπάρχει τότε, μία διάταξη "$\leq^*$" επί του συνόλου $A^* = \bigcup_{\mathcal{A}} A$, τέτοια ώστε:

α) Το A^* είναι καλά διατεταγμένο ως προς την "$\leq^*$".
β) Ο περιορισμός της "$\leq^*$" πάνω σε κάθε $A \in \mathcal{A}$, συμπίπτει με την "$\leq_A$".
γ) Κάθε $A \in \mathcal{A}$, είναι ένα τμήμα του A^*.

Απόδειξη. Έστω τα α, $\beta \in A^*$, με $\alpha \in A$, $\beta \in B$, όπου A, $B \in \mathcal{A}$, και το A είναι τμήμα του B. Οιαδήποτε, συνεπώς, δύο τμήματα του $\mathcal{A}$, ευρίσκονται στο ίδιο σύνολο B. Επιπλέον, αν αμφότερα τα α, $\beta \in C$, $C \in \mathcal{A}$, τότε η "$\leq_C$" είναι ο περιορισμός της "$\leq_B$" επί του C. Μπορούμε, συνεπώς, να ορίσουμε την "$\leq^*$" ως εξής: $\forall \alpha, \beta \in B$, $\alpha \leq^* \beta \leftrightarrow \alpha \leq_B \beta$. Η "$\leq^*$" διατάσει καλώς το A^*, και συμπίπτει με την "$\leq_A$" για κάθε $A \in \mathcal{A}$.
Έστω $x \in A$, και $y \in A^*$, τέτοιο ώστε, $y \leq^* x$. Και πάλι, τα x, y είναι δυνατόν να θεωρηθεί ότι ανήκουν σε κάποιο $B \in \mathcal{A}$, τέτοιο ώστε, το A να είναι τμήμα του B. Άρα $y \leq_B x$, και επειδή το A τμήμα, $y \in A$. Άρα το A τμήμα του A^*.
Θα δείξουμε ότι, (γ) $\rightarrow$ (α). Έστω $T \subseteq A^*$, μιά ισόμορφη εικόνα του $\mathbb{N}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $T = \mathbb{N}$, δηλαδή, ότι $A^* - T \neq \emptyset$. Το $A^* - T$ είναι τμήμα. Αν λοιπόν $\alpha \in A^* - T$, τότε, λόγω κατασκευής του $(A^*, \leq^*)$ το α άνω φράγμα του $\mathbb{N}$. Άτοπο.

Το τυχόν σύνολο $\mathcal{A}$, είναι δυνατόν να θεωρηθεί ως σύνολο A^*. Το σύνολο A^*, καλά διατεταγμένο με την διάταξη "$\leq^*$", καλείται ***μεγίστη άλυσσος***.

Κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις, είναι ισοδύναμος προς το αξίωμα της επιλογής.

Θεώρημα του Zermelo. Κάθε σύνολο μπορεί να διαταχθεί καλά.
Θεώρημα του Hausdorff. Κάθε άλυσσος διατεταγμένου συνόλου S, περιέχεται σε μία μεγίστη άλυσσο.
Θεώρημα των Kuratowski-Zorn. Αν κάθε άλυσσος του S είναι άνω φραγμένη, τότε κάθε στοιχείο του S, είναι και στοιχείο μιάς μεγίστης αλύσσου.

Αξίωμα επιλογής → Θεώρημα Zermelo

Απόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση επιλογής F: P(S)−{∅} → S.

Το σύνολο f(P(S)−{∅}) είναι τέτοιο ώστε, κάθε α = f(A)∈f(P(S)−{∅}) να περιέχεται σε ένα και μόνο υποσύνολο A∈P(S)−{∅}. Θα λέμε το μη κενό υποσύνολο A του S ***διαφοροποιημένο από το*** α, αν μπορεί να διαταχθεί καλά κατά τέτοιο τρόπο, ώστε ∀α∈A το α = f(S−A΄) όπου A΄ ένα τμήμα του A ως προς την διάταξη, που διατάσει καλά το A. Τέτοια υποσύνολα του S υπάρχουν. Είναι για παράδειγμα όλα τα μονοσύνολα του S. Έστω A_1 και A_2 δύο διαφοροποιημένα από το α υποσύνολα του S. Αμφότερα έχουν το α κοινό στοιχείο και συνεπώς έχουν ένα τμήμα κοινό. Η ένωση Γ όλων των κοινών τμημάτων των συνόλων αυτών, είναι κοινό τμήμα αυτών. Θα δείξουμε ότι, η ένωση αυτή, συμπίπτει με το A_1 και το A_2. Πράγματι, αν η ένωση αυτή Γ ήταν έστω διαφορετική από το A_1, τότε το στοιχείο f(S−Γ) θα προσδιόριζε εν A_1 ένα τμήμα, που θα περιείχε το Γ. Άτοπο. Τα σύνολα συνεπώς A_1 και A_2 είναι έτσι ώστε, το ένα να είναι τμήμα του άλλου. Θεωρούμε, τώρα, την ένωση όλων των διαφοροποιημένων συνόλων του S. Αυτή είναι ένα διαφοροποιημένο σύνολο Λ. Πράγματι, αν α, β∈Λ με α∈A, β∈B, τα A, B ⊆ Λ, τότε αμφότερα τα α, β, κείνται στο μεγαλύτερο από τα A, B, έστω το A. Θέτοντας β ≤ α εν Λ αν και μόνον αν β ≤ α εν Λ, επεκτείνουμε την καλή διάταξη εν Λ. Τέλος, με κάθε α∈Λ, το α περιέχεται σε κάποιο διαφοροποιημένο υποσύνολο A, και προσδιορίζει εν Λ και εν A το ίδιο τμήμα A΄, όπου
α = f(S−A΄). Το Λ τέλος ταυτίζεται με το S, μιά και σε άλλη περίπτωση, θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε ένα διαφοροποιημένο σύνολο εν S μεγαλύτερο από το Λ, πράγμα άτοπο.

Θεώρημα Zermelo → Θεώρημα Hausdorff.

Απόδειξη. Το τυχόν σύνολο A, είναι δυνατόν να θεωρηθεί ότι αποτελείται από υποσύνολα A, κάθε ένα από τα οποία, λόγω του θεωρήματος του Zermelo, διατάσσεται καλά από κάποια διάταξη “$\le_A$”. Από το λήμμα όμως, έπεται ότι, το A είναι δυνατόν να θεωρηθεί ως μία μεγίστη άλυσσος A^*, με διάταξη την “$\le^*$”.

Θεώρημα Hausdorff → Θεώρημα Kuratowski-Zorn.

Απόδειξη. Έστω S ένα διατεταγμένο σύνολο, του οποίου κάθε άλυσσος έχει άνω φράγμα. Έστω το στοιχείο α∈S. Η άλυσσος {α} περιέχεται από υπόθεση, σε μία μεγίστη άλυσσο C. Αν c άνω φράγμα της C, τότε α ≤ c. Το c είναι και αξεπέραστο προς τα επάνω στοιχείο του S. Η C ∪ {c} είναι άλυσσος περιέχουσα την C. Άτοπο. Άρα c∈C, αλλά και κάθε x∈S με x ≤ c, ανήκει στο C, μιά και κάθε υποσύνολο του C είναι τμήμα.

Θεώρημα Kuratowski-Zorn → Αξίωμα της επιλογής.

Απόδειξη. Έστω A τυχόν σύνολο. Υπάρχουν υποσύνολα A του A, πάνω στα οποία είναι δυνατόν να ορισθεί μία συνάρτηση επιλογής. Π.χ. τα μονοσύνολα του A. Θεωρούμε όλα τα τέτοιου τύπου υποσύνολα του A, και έστω Φ όλες οι δυνατές συναρτήσεις επιλογής, που ορίζονται πάνω σ' αυτά. Το σύνολο Φ διατάσσεται ως εξής: $F_1 \le F_2$, αν και μόνον αν, $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$ όπου F_1, F_2 συναρτήσεις επιλογής, που ορίζονται πάνω σε σύνολα υποσυνόλων Σ_1, Σ_2 του A. Έστω τυχούσα άλυσσος Γ μέσα στο σύνολο Φ. Αν F_α τα στοιχεία της Γ, και Σ_α τα σύνολα επί των οποίων ορίζονται οι F_α, θεωρούμε το Σ = $\bigcup_\alpha \Sigma_\alpha$, και πάνω σ' αυτό, ορίζουμε τη F, η οποία συμπίπτει με κάθε μία F_α επί κάθε ενός F_α. Φανερά F∈Φ, και είναι άνω φράγμα της Γ. Από υπόθεση, η Γ περιέχεται σε μεγίστη άλυσσο. Αν, τώρα, το A−Σ ≠ ∅, πάνω σ' αυτό, είναι δυνατόν να ορίσουμε μία συνάρτηση F_β, έτσι ώστε, F_β(A−Σ)∈A−Σ Όμως, στην περίπτωση αυτή, η Γ ∪{ F_β } θα ήταν μία άλυσσος που θα περιείχε την μεγίστη άλυσσο Γ. Άτοπο.

Βιβλιογραφία. “General Algebra”, A.G. Kurosh, έκδοση Chelsea, σελίς 26.

13. Σύντομο χρονικό της Θεωρίας συνόλων. Η θεωρία συνόλων ξεκίνησε με τις εργασίες του Georg Cantor το 1894. (Υπάρχουν στην βιβλιοθήκη, μεταφρασμένες στα αγγλικά, στις εκδόσεις Dover, με τίτλο Contributions to the foundation of the Theory of Transfinite Numbers).
Η πρώτη αξιωματική θεμελίωση της θεωρίας των συνόλων δόθηκε από τον Zermelo το 1908. Στα αξιώματα αυτά, περιλαμβάνεται και το αξίωμα της επιλογής. Η τελική μορφή των αξιωμάτων αυτών δόθηκε από τους Fraenkel και Scolem το 1922.
Η εισαγωγή των αξιωμάτων αυτών από τον Zermelo, έγινε στην προσπάθειά του να αντιμετωπίσει τις αντινομίες που προέκυψαν μέσα στην θεωρία των συνόλων, και που ήταν γνωστές ήδη από το 1879 (αντινομία Burali-Forti). Η αντινομία αυτή μελετήθηκε από τον Russell, από τον οποίο και διατυπώθηκε στην παρακάτω μορφή: Όπως είδαμε, υπάρχουν σύνολα, τα οποία είναι ισοδύναμα προς κάποιο υποσύνολό τους. Ας θεωρήσουμε εμείς, το "σύνολο" όλων των συνόλων, (το παριστάνουμε με S), που δεν είναι ισοδύναμα προς κάποιο υποσύνολό τους. Μπορούμε άραγε να θεωρούμε ένα τέτοιο σύνολο; Η απάντηση είναι αρνητική. Πράγματι, το S είτε θα είναι ένα σύνολο που είναι ισοδύναμο προς κάποιο υποσύνολό του, είτε δεν θα είναι κάποιο τέτοιο σύνολο. Στην α) περίπτωση, που το S είναι ισοδύναμο προς κάποιο υποσύνολό του, η σχέση $S \subseteq S$ οδηγεί σε άτοπο, μια και το S είναι εξ ορισμού το σύνολο όλων των συνόλων, που δεν είναι ισοδύναμα προς κάποιο υποσύνολό τους. Στην περίπτωση β), που το S είναι ένα σύνολο που δεν είναι ισοδύναμο προς κανένα υποσύνολό του, οδηγούμεθα και πάλι σε άτοπο, μια και το S θα έπρεπε να περιέχεται στο S, λόγω ακριβώς του τρόπου με τον οποίο ορίσαμε το S.
Οι Russell και Whitehead παρατήρησαν ότι ο ορισμός των συνόλων εκείνων που οδηγούν σε αντινομίες, καταστρατηγεί την αρχή του "Φαύλου Κύκλου". Σύμφωνα με την αρχή αυτή, ένα στοιχείο, του οποίου ο ορισμός απαιτεί το σύνολο των στοιχείων ενός συνόλου, δεν είναι δυνατόν να ανήκει στο σύνολο. Οι Russell και Whitehead για να αποφύγουν την αρχή αυτή, επινόησαν την Θεωρία των Τύπων, η οποία εκτίθεται εν εκτάσει στο σύγγραμμά τους Principia Mathematica.

Βιβλιογραφία. N. Bourbaki, Éléments de Mathématique. Théorie des Ensembles, Chapitre 4.
Jean Dieudonné, Abregé d'Histoire des Mathématiques.

14. Πληθάριθμος συνόλου. Παραδεχόμεθα ότι τα σύμβολα 1, 2, κλπ. συμβολίζουν σύνολα που περιέχουν ένα, δύο, κλπ. Αντικείμενα. $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ το σύνολο των φυσικών αριθμών.

Ορισμός. Ονομάζουμε ένα σύνολο A ***αριθμήσιμο*** ανν υπάρχει αντιστοιχία s ένα – ένα και επί ανάμεσα σ' αυτό και το $\mathbb{N}$. ***Πεπερασμένο*** καλείται το A ανν υπάρχει αντιστοιχία s ένα – ένα και εντός του $\mathbb{N}$. Την εικόνα του συνόλου A, συνήθως, την γράφουμε υπό την μορφή ***ακολουθίας*** $(a_i)_{i\in I}$, $I \subseteq \mathbb{N}$ Το ***πολύ αριθμήσιμο***, ανν είναι ή πεπερασμένο ή αριθμήσιμο. Ο πληθάριθμος ενός αριθμησίμου συνόλου είναι ο αριθμός που αντιστοιχεί στο πλήθος των στοιχείων του συνόλου. Συμβολίζεται με το $P(A)$. Αν το σύνολο A έχει ν το πλήθος στοιχεία, είναι, τότε, $P(A) = \nu$.

Πρόταση. Για τα σύνολα A και B, ισχύει η σχέση, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ και $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$. Για μια ακολουθία πεπερασμένων συνόλων A_i, $i \in \mathbb{N}$, ισχύει η σχέση $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots$

και η $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cup A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cup A_j \cup A_k) - \dots$

Λήμμα 1. Κάθε μη κενό υποσύνολο αριθμησίμου συνόλου είναι το πολύ αριθμήσιμο.
Απόδειξη. Αφού το σύνολο είναι αριθμήσιμο, μπορεί να γραφεί σαν ακολουθία. Φανερά, κάθε υποσύνολό του μπορεί να γραφεί σαν υπακολουθία αυτής της ακολουθίας. Άρα, είναι ή πεπερασμένο ή αριθμήσιμο.
Λήμμα 2. Το $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο.
Απόδειξη. (G. Cantor). Παριστάνουμε με (μ,ν) το τυχόν στοιχείο του $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.Δίνουμε στο μ+ν, διαδοχικά, τις τιμές 2, 3, ... Γιά κάθε φυσικό n ≥ 2, το μ (αντ. ν) μπορεί να πάρει, το πολύ, n-1 διαφορετικές τιμές. Άρα, η ως προς (μ,ν) εξίσωση μ+ν = n έχει πεπερασμένο πλήθος λύσεων˙ που, επομένως, το σύνολό τους μπορεί να γραφεί σαν μιά πεπερασμένη ακολουθία. Από αυτό έπεται, με τελεία επαγωγή, ότι, το σύνολο των $(\mu,\nu)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ μπορεί να γραφτή σαν άπειρη ακολουθία˙ και, επομένως, είναι αριθμήσιμο.

Σχόλιο. Διατυπώσαμε την απόδειξη του G. Cantor με τρόπο, που να υπογραμμίζεται το ότι είναι "κατασκευαστική", δηλαδή, μετά από κάποιες συμφωνίες ως προς τις υπ' όψη πεπερασμένες ακολουθίες, μπορούμε, για κάθε (μ,ν), να βρίσκουμε με ποιόν όρο της τελικής (άπειρης) ακολουθίας αυτό συμπίπτει.

Πορίσματα των παραπάνω δύο λημμάτων είναι τα επόμενα κλασικά αποτελέσματα (G. Cantor).

Ορολογία. Μιά οικογένεια $(\alpha_i)_{i\in I}$ καλείται αριθμήσιμη όταν, και μόνον όταν, το I είναι αριθμήσιμο. Αντ. για το, "το πολύ αριθμήσιμο".

Λήμμα 3. Η ένωση μιάς το πολύ αριθμήσιμης ακολουθίας από το πολύ αριθμήσιμα σύνολα είναι το πολύ αριθμήσιμη.
Απόδειξη. Λόγω του Λήμματος 1, αρκεί να αποδείξουμε το Λήμμα 3 για μιά αριθμήσιμη ένωση από αριθμήσιμα σύνολα. Τώρα, αφού η οικογένεια είναι αριθμήσιμη, μπορεί να γραφεί σαν ακολουθία˙ επίσης, και το καθένα από τα σύνολα αυτά. Άρα, το σύνολο των στοιχείων της ενώσεως μπορεί να γραφτή σαν $\{\alpha_\mu,\alpha_\nu)\}$, όπου $(\mu,\nu)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Τώρα, η αντιστοίχηση του (α_μ,α_ν) στο (μ,ν) εγκαθιστά, φανερά, μιά αντιστοιχία 1-1 ανάμεσα στην ένωση, που θεωρούμε, και το $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Άρα, η ένωση αυτή αποτελεί αριθμήσιμο σύνολο.

Πόρισμα. Το σύνολο $\mathbb{Q}=\left\{\dfrac{\mu}{\nu},\ \ \mu,\nu\in\mathbb{N}\right\}$ των ρητών αριθμών είναι αριθμήσιμο.

Είναι όλα τα σύνολα αριθμήσιμα; Όχι, καθώς απέδειξε ο G. Cantor.

Λήμμα 4. Το σύνολο των απείρων ακολουθιών από δύο διαφορετικά γράμματα δεν είναι αριθμήσιμο.
Απόδειξη. Ας είναι α και β αυτά τα γράμματα. Έστω ότι το υπ' όψη σύνολο είναι αριθμήσιμο. Τότε, μπορεί να γραφεί σαν ακολουθία $A_1, A_2, \ldots$˙ όπου:

A_1 η ακολουθία $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots$ όπου $\alpha_{1,j}=\alpha$ είτε $\alpha_{1,j}=\beta$

A_2 η ακολουθία $\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots$ όπου $\alpha_{2,j}=\alpha$ είτε $\alpha_{2,j}=\beta$

. . . .

Για να φτάσουμε σε άτοπο, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει άπειρη ακολουθία από τα γράμματα α και β που δεν συμπίπτει με καμιά από τις $A_1, A_2, \ldots$. Φανερά, μιά τέτοια ακολουθία είναι η $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$, που ορίζεται έτσι: Για κάθε φυσικό ν ≥ 1, $\gamma_\nu \neq \alpha_{\nu\nu}$˙ δηλαδή,
αν $\alpha_{\nu\nu}=\alpha$, $\gamma_\nu=\beta$ και αν $\alpha_{\nu\nu}=\beta$, $\gamma_\nu=\alpha$. Με τον τρόπο που ορίστηκε η $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$, διαφέρει από την A_ν, τουλάχιστον ως προς τον ν-οστό όρο της˙ και αυτό για κάθε φυσικό ν ≥ 1. Επομένως, το υπ' όψη σύνολο δεν είναι αριθμήσιμο.

Σχόλιο. Ο λόγος που αρχίσαμε με αυτό το αποτέλεσμα, είναι πως δείχνει *καθαρά* ότι η μη αριθμησιμότητα οφείλεται στην απειρία των αυθαιρέτων εκλογών τιμών α ή β και όχι σε λόγους "αριθμο-θεωρητικού" κλπ. τύπου.

Πόρισμα. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι μη αριθμήσιμο.
Απόδειξη. Λαβαίνουμε πιο πάνω α = 0 και β = 1 και τους εκφράζουμε, στο δυαδικό σύστημα.