ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

Θεωρία συνόλων – Πληθάριθμοι

Τα αντικείμενα που θίγονται εδώ, αναπτύσσονται αναλυτικά στα κεφάλαια πρώτο, έβδομο και όγδοο του βιβλίου του Σ.Π. Ζερβού *"Καθολική Άλγεβρα - Ι. Από τα σύνολα και την τοπολογία ώς την καθολική άλγεβρα και την θεωρητική πληροφορική."* (Αθήνα, 1994, Εκδόσεις Μ. Καρδαμίτσα, Ιπποκράτους. Στις παραπομπές σ' αυτό, το αναφέρουμε με το γράμμα Ζ.

Διατακτικοί αριθμοί. Γιά μία συστηματική παρουσίαση της καντοριανής θεωρίας των πληθαρίθμων και των διατακτικών αριθμών, παραπέμπουμε στο έβδομο κεφάλαιο του Ζ. Στο όγδοο κεφάλαιο του Ζ, προσπαθούμε να εξηγήσουμε με τρόπο, γενικά κατάνοητό, βασικές ιδέες στα θέματα της *θεμελιώσεως* της θεωρίας συνόλων (και έτσι, έμμεσα, όλων των Μαθηματικών). Νομίζω ότι ξεκαθαρίζονται σ' αυτό θέματα γιά τις αξιωματικές θεωρίες συνόλων περισσότερο απ' ότι γίνεται, συνήθως (γιά το *γενικό* μαθηματικό κοινό).

Εδώ, είμαστε συνοπτικοί. Χρησιμοποιούμε το μοντέλλο της καντοριανής θεωρίας συνόλων γιά οποιαδήποτε αξιωματική θεωρία τύπου John von Neumann· "πρακτικοποιώντας" την κεντρική ιδέα του να χρησιμοποιούμε *"κλάσεις"* και *"σύνολα"* (= "μικρές") κλάσεις.

Κλάση, θα ονομάζουμε κάθε σύνολο αντικειμένων της σκέψης που ικανοποιεί τα εξής: 1) Ο ορισμός του δεν περικλείει λογική αντίφαση. 2) Τα στοιχεία του είναι όλα διαφορετικά το ένα από το άλλο.

Επιτρέπεται: Να θεωρούμε ενώσεις και τομές οικογενειών από κλάσεις, με σύνολα δεικτών, σύνολα.

Δεν επιτρέπεται: Να χρησιμοποιούμε, άμεσα ή έμμεσα, την έννοια *"κλάση των υποκλάσεων μιάς κλάσης* Α" εφ' όσον δεν έχουμε εξασφαλίσει ότι η Α είναι ό,τι θα ονομάσουμε, πιό κάτω, *"σύνολο"*.

Παραδείγματα από κλάσεις που δεν είναι "σύνολα": 1) Η κλάση όλων των αντικειμένων της σκέψης. 2) Η κλάση όλων των συνόλων που το καθένα τους έχει από δύο αντικείμενα της σκέψης. 3) Η κλάση όλων των συνόλων που το καθένα τους έχει ένα πεπερασμένο πλήθος αντικειμένων της σκέψης.

Την ορολογία γιά σύνολα που αναφέραμε στο πρώτο κεφάλαιο, με εξαίρεση το απαγορευμένο πιά "σύνολο των μερών", την μετάφερουμε αυτούσια στις κλάσεις. Προσθέτουμε την επόμενη ορολογία (κλασική γιά σύνολα, την εισήγαγε ο G. Cantor): Μιά ολικώς διατεταγμένη κλάση καλείται *καλώς διατεταγμένη* (**συντομογραφία** κ.δ.) όταν, και μόνον όταν, κάθε μη κενή υποκλάση της έχη αρχικό στοιχείο.

Παραδείγματα: 1) Το **N**.
2) Η κλάση 1, 2, 3, . . . , 1´, 2´, 3´, . . . 1´´, 2´´, 3´´, ...
3) Η κλάση, όπου η διαδικασία που ορίζει την 2) επαναλαμβάνεται *χωρίς να σταματά ποτέ.* (Εδώ, εκφραζόμαστε "απλοϊκά", προκειμένου να φανή η ιδέα του πράγματος).

Τα παραδείγματα 1) και 2) απ' την μιά μεριά και το 3) απ' την άλλη, διαφέρουν, *ριζικά,* στο εξής: *Δεν υπάρχει τρόπος να σταματήση πουθενά, δεξιά,* η διαδοχή στο 3). Γι' αυτό, δεν μπορεί να χρησιμοποιηθή η κλάση αυτή σαν "σύνολο".

Παρατήρηση (που, δυστυχώς, δεν γίνεται στα περισσότερα διεθνή συγγράμματα Λογικής και Θεωρίας Συνόλων). Οι "χωρίς σταματημό" *καλώς διατεταγμένες κλάσεις* έχουν τις εξής πολύ καλές ιδιότητες:
1. Είναι, ως προς την διάταξή τους, όλες ισόμορφες μεταξύ τους.
2. Γιά κάθε στοιχείο α μιάς τέτοιας κλάσης, η κλάση όλων των $\leq$ α στοιχείων του αποτελεί "σύνολο".
3. Σε μία τέτοια κλάση (στην οποία, φανερά, μεταφέρονται οι έννοιες "κατώτερο φράγμα", "ανώτερο φράγμα", "κατώτερο πέρας" και "ανώτερο πέρας"), ισχύει το θεώρημα του Bolzano και εφαρμόζεται, σ' αυτό η κατά Kurepa πλήρωση.

Σημείωση. Όσο ξέρω, η παρατήρηση αυτή 3 έγινε, γιά πρώτη φορά, γραπτά, στο Z. Την είχα κάνει, προφορικά, στα μαθήματά μου στο Πανεπιστήμιομιο Αθηνών, το 1991.

Αναλογία. Η "χωρίς σταματημό" καλώς διατεταγμένη κλάση είναι ως προς τα "σύνολα" ό,τι το **N** ως προς τα πεπερασμένα σύνολα.

Διαφορά. Το **N** άφηνε, όμως, τα περιθώρια σ' έναν μεγαλοφυά πνευματικό επαναστάτη σαν τον G. Cantor να θεωρήση ότι, *μετά* απ' όλους τους φυσικούς αριθμούς, μπορούμε να γράψουμε κι άλλα στοιχεία, προεκτείνοντας το **N** σαν *καλώς διατεταγμένο σύνολο πιά*, με *μερική* συντήρηση ιδιοτήτων του. Η "χωρίς σταματημό" κ.δ. κλάση *έχει καταργήσει, από πρώτα, κάθε τέτοια δυνατότητα, γι' αυτήν·* γιατί, έχει, *εκ των προτέρων*, συμπεριλάβει και *όλες τις δυνατές προεκτάσεις.*

Σημείωση. Το να λεχθούν αυτά *αυστηρά,* είναι λιγώτερο απλό απ' όσο φαίνεται. Εδώ, όμως, μας ενδιαφέρει να τονίσουμε τις *ιδέες* των πραγμάτων.

Χρησιμοποιήσαμε κι όλας τον όρο "σύνολο", χωρίς να τον έχουμε ορίσει. Θα τον ορίσουμε, τώρα, με τον ίδιο *απλουστευτικό* τρόπο (που, σε καμμιά περίπτωση, δεν αντικαθιστά τον αυστηρό ορισμό).

Θεωρούμε την ακολουθία: **N**, P(**N**), P(P(**N**)), ... Καλούμε A_1 την ένωσή της και την προεκτείνουμε με την ακολουθία A_1, $P(A_1)$, $P(P(A_1))$, ... Θεωρούμε την ένωση της κ.δ. κλάσης **N**, P(**N**), . . . , A_1, $P(A_1)$, . . . και την καλούμε A_2· κ.ο.κ. Όταν εξαντληθούν τα A_ν (ν φυσικός), ορίζουμε τις ενώσεις B_ν, κ.ο.κ. Χρησιμοποιούμε ένα αλφάβητο *που δεν τελειώνει ποτέ.* Ορίζεται έτσι, μιά κ.δ. κλάση, "χωρίς σταματημό".

Ορισμός. *"Σύνολο",* ονομάζουμε κάθε κλάση, *γιά την οποία υπάρχει αντιστοιχία* 1-1 *ανάμεσα σ' αυτήν και σε υποκλάση μέλους (= στοιχείου) της παραπάνω κ.δ. κλάσης.*

Παρατήρηση. Ο ορισμός αυτός είναι, φανερά, λογικά συμβιβαστός με την ιδιότητα 2 στην προηγούμενη παρατήρηση.

Ερχόμαστε, τώρα, σε μερικούς κλασικούς ορισμούς και μερικά κλασικά θεωρήματα του G. Cantor. (Γράφουμε, πάντα, G. Cantor, γιατί, την ίδια εποχή, υπήρχε στην Γερμανία και ο μεγάλος ιστορικός των μαθηματικών Moritz Cantor.)

Συμβολισμός. $\mathbf{N}^* = \mathbf{N}\backslash\{0\}$.

Ορισμός. Ονομάζουμε ένα σύνολο A *αριθμήσιμο* όταν, και μόνον όταν, υπάρχη αντιστοιχία 1-1 ανάμεσα σ' αυτό και το $\mathbf{N}^*$΄*το πολύ αριθμήσιμο*, αν, και μόνον αν, είναι ή πεπερασμένο ή αριθμήσιμο.

Οι αποδείξεις γιά το ότι διάφορα αξιόλογα σύνολα είναι αριθμήσιμα, στηρίζονται όλες σε δύο λήμματα.

Λήμμα 1. *Κάθε μη κενό υποσύνολο αριθμησίμου συνόλου είναι το πολύ αριθμήσιμο.*
Απόδειξη. Αφού το σύνολο είναι αριθμήσιμο, μπορεί να γραφτή σαν ακολουθία. Φανερά, κάθε υποσύνολό του μπορεί να γραφτή σαν υπακολουθία αυτής της ακολουθίας. Άρα, είναι ή πεπερασμένο ή αριθμήσιμο.

Λήμμα 2. *Το* $\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*$ *είναι αριθμήσιμο.*
Απόδειξη. (G. Cantor). Παριστάνουμε με (μ,ν) το τυχόν στοιχείο του $\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*$**.** (Οι μ, ν, φυσικοί > 0). Δίνουμε στο μ+ν, διαδοχικά, τις τιμές 2, 3, ... Γιά κάθε φυσικό $\tau \geq 2$, το μ (αντ. ν) μπορεί να πάρη, το πολύ, τ-1 διαφορετικές τιμές. Άρα, η ως προς (μ,ν) εξίσωση μ+ν = τ έχει πεπερασμένο πλήθος λύσεων· που, επομένως, το σύνολό τους μπορεί να γραφτή σαν μιά πεπερασμένη ακολουθία. Από αυτό έπεται, με τελεία επαγωγή, ότι, το σύνολο των $(\mu,\nu)\in \mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*$ μπορεί να γραφτή σαν άπειρη ακολουθία· και, επομέ-νως, είναι αριθμήσιμο. ο.ε.δ.

Σχόλιο. Διατυπώσαμε την απόδειξη του G. Cantor με τρόπο, που να υπογραμμίζεται το ότι είναι "κατασκευαστική"· δηλαδή, μετά από κάποιες συμφωνίες ως προς τις υπ' όψη πεπερασμένες ακολουθίες, μπορούμε, γιά κάθε (μ,ν), να βρίσκουμε με ποιόν όρο της τελικής (άπειρης) ακολουθίας αυτό συμπίπτει.

Πορίσματα των παραπάνω δύο λημμάτων είναι τα επόμενα κλασικά αποτελέσματα (G. Cantor).

Ορολογία. Μιά οικογένεια $(\alpha_i)_{i\in I}$ καλείται *αριθμήσιμη* όταν, και μόνον όταν, το I είναι αριθμήσιμο. Αντ. γιά το, "το πολύ αριθμήσιμο".

Λήμμα3. *Η ένωση μιάς το πολύ αριθμήσιμης ακολουθίας από το πολύ αριθμήσιμα σύνολα είναι το πολύ αριθμήσιμη.*
Απόδειξη. Λόγω του Λήμματος 1, αρκεί να αποδείξουμε το Λήμμα 3 γιά μιά αριθμήσιμη ένωση από αριθμήσιμα σύνολα. Τώρα, αφού η οικογένεια είναι αριθμήσιμη, μπορεί να γραφτή σαν ακολουθία· επίσης, και το καθένα από τα σύνολα αυτά. Άρα, το σύνολο των στοιχείων της ενώσεως μπορεί να γραφτή σαν $\{\alpha_\mu,\alpha_\nu)\}$, όπου $(\mu,\nu)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*$. Τώρα, η αντιστοίχιση του (α_μ,α_ν) στο (μ,ν) εγκαθιστά, φανερά, μιά αντιστοιχία 1-1 ανάμεσα στην ένωση, που θεωρούμε, και το $\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*$. Άρα, η ένωση αυτή αποτελεί αριθμήσιμο σύνολο. ο.ε.δ.

Θεώρημα Α.1. *Το σύνολο* **Q** *των ρητών αριθμών είναι αριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Η αντιστοίχιση του $\dfrac{\mu}{\nu}$ στο (μ,ν) εγκαθιστά μιά αντιστοιχία 1-1 ανάμεσα στο σύνολο των > 0 ρητών, το $\mathbf{Q}^*\setminus\{0\}$, και το $\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*$. Άρα το $\mathbf{Q}^*\setminus\{0\}$ είναι αριθμήσιμο και, επομένως, μπορεί να γραφτή σαν ακολουθία $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$. Τώρα, η ακολουθία
$0, \alpha_1, -\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_2, \ldots$ έχει σαν σύνολο στοιχείων της το **Q**. ο.ε.δ.

Ορισμός. *Αλγεβρικός αριθμός* καλείται κάθε ρίζα αλγεβρικής εξισώσεως με *συντελεστές ακεραίους αριθμούς* (δηλαδή, στοιχεία του **Z**).

Λήμμα 4. *Γιά κάθε φυσικό* $\mu \geq 2$, *το* $\mathbf{N}^{*\mu}$ *είναι αριθμήσιμο.*
Απόδειξη. Με τελεία επαγωγή, από το Λήμμα 2.

Πόρισμα. *Γιά κάθε φυσικό* $\mu \geq 1$, *το σύνολο των αλγεβρικών εξισώσεων βαθμού* $\leq \mu$, *με ακέραιους συντελεστές, είναι αριθμήσιμο.*
Απόδειξη. Ας είναι $\alpha_0 x^\mu + \ldots + \alpha_\mu = 0$ η τυχαία τέτοια εξίσωση. Το σύνολο αυτό είναι, φανερά, άπειρο υποσύνολο συνόλου σε αντιστοιχία 1-1 με το καρτεσιανό γινόμενο $\mathbf{Z}^\mu$, που κι αυτό, είναι σε αντιστοιχία 1-1 με το $\mathbf{N}^{*\mu}$. Άρα, είναι αριθμήσιμο. ο.ε.δ.

Θεώρημα Α.2. *Το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών είναι αριθμήσιμο.*
Απόδειξη. Άμεσο πόρισμα του Λήμματος 3 και του τελευταίου πορίσματος.

Σχόλιο. Όλες οι αποδείξεις αριθμησιμότητας που είδαμε είναι "κατασκευαστικές"· ενώ ο ορισμός αριθμησίμου συνόλου, που δώσαμε, δεν είναι. Εξηγούμε περί τίνος πρόκειται. Σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε, γιά να αποδείξουμε ότι ένα σύνολο είναι αριθμήσιμο, *αρκούσε* ν' αποδείξουμε ότι η υπόθεση ότι δεν είναι, οδηγεί σε άτοπο (απόδειξη "υπαρξιστική", μη "κατασκευαστική"). Όμως, οι (εμπνευσμένες από την σκέψη του G. Cantor) αποδείξεις *αριθμησιμότητας* είναι όλες "κατασκευαστικές" (που, *όταν τις διαθέτουμε,* όλοι τις προτιμούν από τις "υπαρξιστικές"). Δηλαδή, αποδείξαμε πιό πάνω ότι διάφορα αξιόλογα σύνολα όχι μόνον είναι αριθμήσιμα αλλά είναι και *εμπραγμάτως* (στα γαλλικά, effectivement) αριθμήσιμα.

Ιστορική σημείωση. Η διάκριση ανάμεσα σε "αριθμήσιμα" και "εμπραγμάτως αριθμήσιμα" σύνολα οφείλεται στον μεγάλο Γάλλο μαθηματικό και στοχαστή Emile Borel. Στην Ελλάδα, την έφερε ο *Παναγιώτης Ζερβός,* που μετάφρασε και τον όρο "effectivement" σε "εμπραγμάτως". Σήμερα, η διάκριση αυτή έχει ξαναγίνει επίκαιρη.

Είναι όλα τα σύνολα αριθμήσιμα; Όχι, καθώς απέδειξε ο G. Cantor. Θα μας εμπνέει και πάλι η σκέψη του αλλά θα ακολουθήσουμε μιά κάπως διαφορετική διάταξη, στην παρουσίαση των απότελεσμάτων (κάποτε, και με αναδιατυπώσεις αποδείξεων).

Προκαταρκτική παρατήρηση 1. Οι αποδείξεις θα είναι, τώρα, *όλες* "υπαρξιστικές"· δηλαδή, με "εις άτοπον απαγωγήν" (την θεμελιώδη αυτή ανακάλυψη των αρχαίων Ελλήνων).

Προκαταρκτική παρατήρηση 2. Αν ένα σύνολο δεν είναι αριθμήσιμο, και κάθε σύνολο που το περιέχει δεν είναι. (**Απόδειξη.** Προφανής συνέπεια του Λήμματος 1).

Λήμμα 5. *Το σύνολο των απείρων ακολουθιών από δύο διαφορετικά γράμματα δεν είναι αριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Ας είναι α και β αυτά τα γράμματα. Εστω ότι το υπ' όψη σύνολο είναι αριθμήσιμο. Τότε, μπορεί να γραφτή σαν ακολουθία A_1, A_2, . . . · όπου:

A_1 η ακολουθία α_{11}, α_{12}, . . .
A_2 η ακολουθία α_{21}, α_{22}, . . .
. . .   .

Γιά να φτάσουμε σε άτοπο, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει άπειρη ακολουθία από τα γράμματα α και β που δεν συμπίπτει με καμμιά από τις A_1, A_2, ... Φανερά, μιά τέτοια ακολουθία είναι η γ_1, γ_2, . . . , που ορίζεται έτσι: Γιά κάθε φυσικό $\nu \geq 1$, $\gamma_\nu \neq \alpha_{\nu\nu}$· δηλαδή,
αν $\alpha_{\nu\nu} = \alpha$, $\gamma_\nu = \beta$ και αν $\alpha_{\nu\nu} = \beta$, $\gamma_\nu = \alpha$. Με τον τρόπο που ορίστηκε η γ_1, γ_2, . . . , διαφέρει από την A_ν, τουλάχιστον ως προς τον ν-οστό όρο της· και αυτό γιά κάθε φυσικό $\nu \geq 1$. Επομένως, το υπ' όψη σύνολο δεν είναι αριθμήσιμο. ο.ε.δ.

Σχόλιο. Ο λόγος που αρχίσαμε με αυτό το αποτέλεσμα, είναι πως δείχνει *καθαρά* ότι η μη αριθμησιμότητα οφείλεται *στην απειρία των αυθαιρέτων εκλογών τιμών* α *ή* β και όχι σε λόγους "αριθμο-θεωρητικού" κλπ. τύπου.

Πόρισμα. *Το σύνολο των πραγματικών αριθμών που είναι* ≥ 0 *και* ≤ 1 *είναι μη αριθμήσιμο.*
Απόδειξη. Λαβαίνουμε πιο πάνω $\alpha = 0$ και $\beta = 1$ και τους εκφράζουμε, με τον ατέρμονα τρόπο, στο δυαδικό σύστημα. □

Πόρισμα 2. *Το σύνολο των απείρων ακολουθιών από δέκα διαφο-ρετικά γράμματα δεν είναι αριθμήσιμο.*
Απόδειξη. Άμεση συνέπεια της προκαταρκτικής παρατηρήσεως 2 και του Λήμματος 5. Λεπτομερώς: Αν αυτό ήταν αριθμήσιμο, θα ήταν, σύμφωνα με το Λήμμα 1, και το υποσύνολό του που αποτελούν οι ακολουθίες από ορισμένα δύο απ' αυτά τα γράμματα. Αδύνατον, σύμφωνα με το Λήμμα 5. □

Παρατήρηση. Αν σαν τέτοια γράμματα, πάρουμε τα ψηφία
0, 1, 2, . . . , 9, έχουμε σαν αποτέλεσμα ότι, το σύνολο των ≥ 0 και ≤ 1 πραγματικών αριθμών, εκφρασμένων με τον ατέρμονα τρόπο στο δεκαδικό σύστημα αριθμήσεως, δεν είναι αριθμήσιμο· δηλαδή, το Πόρισμα 1.

Ιστορική σημείωση. Γιά τους έτσι εκφρασμένους πραγματικούς, είσήγαγε ο G. Cantor την αποδεικτική μέθοδο που εφαρμόσαμε στο Λήμμα 5. Ονομάζεται "μέθοδος της δευτέρας διαγωνίου του Cantor".

Πόρισμα 3. *Το σύνολο* **R** *των πραγματικών αριθμών δεν είναι αριθμήσιμο.*

Πρίν προχωρήσουμε, παραθέτουμε την επόμενη Σημείωση, που αναφέρεται σε μερικά από τα δυσκολώτερα προβλήματα των κλασικών μαθηματικών, και, παράλληλα, δείχνει τι υπηρεσίες πρόσφερε και προσφέρει σ' αυτά μιά τόσο "αφηρημένη" θεωρία σαν την θεωρία συνόλων.

Σημείωση. Όταν μας δώσουν έναν πραγματικό αριθμό σαν *όριο* μιάς (ακολουθίας) σειράς πραγματικών αριθμών κλπ., είναι, συχνά, πολύ δύσκολο να διαπιστώσουμε αν είναι ρητός ή όχι, ή αλγεβρικός ή όχι. (Υπενθύμιση **ορολογίας:** Οι μη αλγεβρικοί αριθμοί καλούνται *υπερβατικοί*.) Θα δούμε, σε λίγο, δύο τέτοια παραδείγματα. Παρατηρούμε, όμως, τώρα, τα εξής: Ότι, ενώ έχουμε τέτοια άγνοια, συχνά, στο θέμα αυτό, τα παραπάνω θεωρήματα του G. Cantor αποδεικνύουν ότι *το σύνολο των πραγματικών υπερβατικών αριθμών δεν είναι αριθμήσιμο.* Έτσι, οι "πολλοί" πραγματικοί αριθμοί είναι οι υπερβατικοί, όχι οι αλγεβρικοί !

Παραδείγματα πραγματικών αριθμών, γιά τους οποίους *δεν ξέρουμε αν είναι ρητοί ή όχι.* 1) Ο μεγαλοφυής Leonard Euler θεώρησε το όριο της ακολουθίας με γενικό όρο

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{\nu}-\log\nu\,.$$

Το όριο αυτό υπάρχει και είναι πεπερασμένος αριθμός. Ονομάζεται "σταθερά του Euler". Κανένας δεν κατόρθωσε, ώς σήμερα, ν' αποδείξη αν είναι ρητός ή όχι . . . .
2) Και πάλι ο Euler μελέτησε την σειρά

$$1+\frac{1}{2^{\nu}}+\frac{1}{3^{\nu}}+\cdots\ .$$

Ξέρουμε ότι, γιά ρ πραγματικό > 1, η σειρά $1+\frac{1}{2^{\rho}}+\frac{1}{3^{\rho}}+\cdots$ συγκλίνει. (Βλ. Παναγιώτου Ζερβού, Απειροστικός Λογισμός σελ. 94). Τώρα, γιά ν άρτιο, ο Euler απέδειξε ότι το άθροισμα της σειράς είναι αριθμός ασύμμετρος (= άρρητος). Όμως, ώς το 1978, κανείς δεν είχε κατορθώσει να βρή τι γίνεται γιά ν περιττό > 1. Τότε, έπειτα από εικοσάχρονη προσπάθεια, ο Roger Apery, απέδειξε ότι, γιά ν = 3, έχουμε, και πάλι, ότι το άθροισμα της σειράς αυτής είναι αριθμός ασύμμετρος. Με το αποτέλεσμά του αυτό, που το βρήκε στο τέλος της ακαδημαϊκής σταδιοδρομίας του, ο Apery καθιερώθηκε σαν μεγάλος αριθμοθεωρητικός. Δύσκολη και πολυσύνθετη η απόδειξη του Apery, χρησιμοποιεί αποκλειστικά κλασικά μαθηματικά. Κατέπληξε τον κόσμο.

Ιστορική σημείωση. Ο Roger Apery ήτανε γιός Έλληνα, που, στα δεκατέσσερα χρόνια του, μετανάστευσε στην Γαλλία και, επειδή πολέμησε, σαν Γάλλος στρατιώτης, το 1914-18, απέκτησε την Γαλλική υπηκοότητα. Η μητέρα του ήτανε φλαμανδικής κατά-γωγής. Όμως, ο ίδιος ήτανε, πολιτιστικά και συνειδησιακά, Γάλλος· φίλος, βέβαια της Ελλάδας. Το 1978 οργανώσαμε στην Αθήνα Διεθνές Συμπόσιο Θεωρίας Αριθμών προς τιμήν του. (Η οικογένεια Απερή, στην Καλλιθέα Αθηνών, είναι συγγενική του). Γιά το πόσο βοηθάει έναν τόπο η πνευματική λάμψη τέκνων του, αναφέρω τα εξής: Στα μάτια διεθνών μαθηματικών κορυφών, "αναβαθμίστηκε" η Ελλάδα, άμα άκουσαν ότι ο Apery ήταν ελληνικής καταγωγής.

Διαπιστώσαμε, πιο πάνω, πόσα αξιόλογα σύνολα μπορούσανε να τεθούν σε αντιστοιχία 1-1 με το $\mathbf{N}^*$. Όταν το έδειξε ο G. Cantor γιά το **Q**, κατέπληξε τον κόσμο.

Ακόμα πιο εκπληκτικά είναι τα αποτελέσματα γιά το μη αριθμήσιμο σύνολο **R** των πραγματικών αριθμών. Ας είναι τα [α,β] και [γ,δ] δύο διαστήματα της πραγματικής ευθείας, με α < β και
γ < δ. Αρκεί να τα τοποθετήσουμε (= μεταφέρουμε) σε παράλληλες, μη συμπίπτουσες, ευθείες του επιπέδου $\mathbf{R}^2$ και να φέρουμε τις ευθείες αδ και βγ, που, αναγκαία, τέμνονται. Από το σημείο τομής τους O, φέρουμε στο $\mathbf{R}^2$ μία τέμνουσα. Όταν το επί του [α,β] άκρο της, το διαγράφη, το επί του [γ,δ] άκρο της διαγράφει, με την αντίθετη φορά, το [γ,δ]. Η "κινουμένη" αυτή τέμνουσα εγκαθιστά μιά αντιστοιχία 1-1

ανάμεσα στο [α,β] και το [γ,δ]. **Σημείωση.** Το "κινουμένη" κλπ. λέχθηκαν γιά λόγους παραστατικότητας. Η αντιστοίχηση αυτή είναι απόλυτα αυστηρή και στηρίζεται στον ισομορφισμό του επιπέδου Ευκλείδη -Hilbert με το καρτεσιανό.

Θέλουμε να αποδείξουμε, τώρα, ότι υπάρχει αντιστοιχία 1-1 ανάμεσα στο [0, 1] και την ημιευθεία [0, →[. Η κλασική απόδειξη γι' αυτό, είναι η επόμενη:

Συμβολισμός: [0, 1] ~ [0, →[.

Αποδεικνύουμε, πρώτα, το βασικό, **Λήμμα 6**. [0, 1] ~ [0, →[.

Παρατηρούμε ότι, [0, 1] = $\{0\} \cup \bigcup\limits_{\nu\in N} \left]\frac{1}{2^{\nu+1}}, \frac{1}{2^{\nu}}\right]$ και

[0, 1[= $\{0\} \cup \bigcup\limits_{\nu\in N} \left[\frac{1}{2^{\nu+1}}, \frac{1}{2^{\nu}}\right[$.

Αρκεί, λοιπόν, να οριστούν αμφεικονίσεις $\left]\frac{1}{2^{\nu+1}}, \frac{1}{2^{\nu}}\right] \to \left[\frac{1}{2^{\nu+1}}, \frac{1}{2^{\nu}}\right[$. Αυτό, όμως, είναι εύκολο. Αρκεί να θέσουμε $y = \frac{3}{2^{\nu+1}} - x$ · γιατί, η απεικόνιση αυτή είναι φανερά 1-1 και *αυστηρώς φθίνουσα* και αντιστοιχίζει το $\frac{1}{2^{\nu+1}} + \varepsilon$ στο $\frac{1}{2^{\nu}} - \varepsilon$ και το $\frac{1}{2^{\nu}}$ στο $\frac{1}{2^{\nu+1}}$ · επομένως, είναι *αμφεικόνιση* του $\left]\frac{1}{2^{\nu+1}}, \frac{1}{2^{\nu}}\right]$ στο $\left[\frac{1}{2^{\nu+1}}, \frac{1}{2^{\nu}}\right[$. Έτσι, [0, 1] ~ [0, →[. ο.ε.δ.

Πόρισμα 1΄. [0, 1] ~ [0, →[.

Πόρισμα 2΄. [0, 1[~]0, 1[.

Απόδειξη.]0, 1] = $\left]0, \frac{1}{2}\right] \bigcup \left]\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right] \bigcup \left]\frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right] \bigcup \cdots$

$$[0, 1[\; = \left[0,\frac{1}{2}\right[\bigcup\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right[\bigcup\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4},\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right[\bigcup\cdots$$

Τώρα, από το Λήμμα, $\left]0,\frac{1}{2}\right] \sim \left[0,\frac{1}{2}\right[$.

Εξ' άλλου, γενικά, $]\alpha,\beta] \sim [\alpha,\beta[$, καθώς αποδεικνύει, αυστηρά, η γεωμετρική κατασκευή που, ήδη, χρησιμοποιήσαμε γιά να δείξουμε ότι $[\alpha,\beta] \sim [\gamma,\delta]$. □

Παρατήρηση στο Λήμμα 6. Η παραπάνω απόδειξη στηρίζεται στην επόμενη γενικώτερη ιδέα: Ας είναι τα γ και δ > γ πραγματικοί αριθμοί - σημεία του **R** και η $x_1, x_2, \ldots$ μιά αυστηρά φθίνουσα ακολουθία σημείων του διαστήματος $]\gamma,\delta[$, με $\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}}\, x_\nu = \gamma$.

Αντιστοιχίζουμε στο γ τον εαυτό του. Γιά τα διαστήματα $]x_{\nu+1}, x_\nu]$ και $[x_{\nu+1}, x_\nu[$, θεωρούμε την μεταξύ τους αντιστοιχία 1-1, που εγκαθίσταται με την αυστηρά γεωμετρική κατασκευή, που έγινε στην παραπάνω απόδειξη, με $\alpha = x_{\nu+1}$ και $\beta = x_\nu$. Τώρα, το *καίριο,* γιά την απόδειξη αυτή, είναι ότι $\underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}}\, x_{\nu+1} = \underset{\nu\to\infty}{\text{ορ}}\, x_\nu$.

Έτσι, $[\gamma,\delta] = \{\gamma\} \cup \bigcup\,]x_{\nu+1}, x_\nu]$,

$[\gamma,\delta[\; = \{\gamma\} \cup \bigcup\, [x_{\nu+1}, x_\nu[$ με $\nu = 1, 2, \ldots$ και $x_1 = \delta$.

Σχόλιο. Καθώς στην παρατήρηση έχουν μείνει μόνον τα λογικώς απαραίτητα γιά την απόδειξη, έχει γίνει ξεκάθαρη η ιδέα της και έτσι έχει αληθινό μαθηματικό όφελος γιά τον αναγνώστη. Τα τεχνάσματα λησμονιούνται, οι ιδέες μένουν. Τα προβλήματα διδακτικής, *διεθνώς*, δεν οφείλονται σε δήθεν έλλειψη παιδαγωγικών γνώσεων αλλά στο ότι, με το άγχος της εποχής, οι διδάσκοντες δεν διαθέτουν τον χρόνο να φθάσουν, *οι ίδιοι*, στις *ιδέες*.

Γιά κάθε δύο μη κενά σύνολα A, B, ο G. Cantor έδωσε τους εξής θεμελιώδεις ορισμούς: 1. *Ο πληθάριθμος του* A *είναι ίσος με τον πληθάριθμο του* B *όταν, και μόνον όταν,* A ~ B (δηλαδή, υπάρχη αντιστοιχία 1-1 ανάμεσα στο A και το B). 2. *Ο πληθάριθμος του* A *είναι* $\leq$ *από τον πληθάριθμο του* B όταν, και μόνον όταν, υπάρχη υποσύνολο B_1 του B, με $A \sim B_1$. 3. *Ο πληθάριθμος του* A *είναι* < *από τον πληθάριθμο του* B όταν, και μόνον όταν, είναι $\leq$ απ' αυτόν, δεν ισχύει, όμως, και το αντίστροφο.

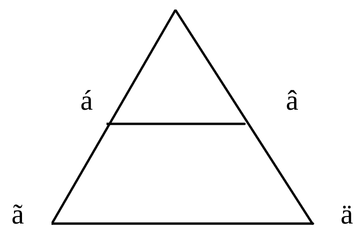
Σημείωση. Δεν ορίσαμε, εδώ, έννοια πληθαρίθμου· ορίσαμε, μόνον, τις σχέσεις του ~ και $\leq$ μεταξύ πληθαρίθμων. Αυτές οι σχέσεις είναι που μας ενδιαφέρουν. Αργότερα, βέβαια, θα δώσουμε και κάποιον ορισμό πληθαρίθμου, οφειλόμενο, ουσιαστικά, στον John von Neumann.

Η έννοια ~ είναι, φανερά, σχέση ισοδυναμίας. Τώρα, γιά την παραπάνω $\leq$. η ανακλαστικότητα και η μεταβατικότητά της είναι προφανείς. Όχι και η αντισυμμετρία. Πριν έρθουμε σ' αυτήν, αναφέρουμε τους συνηθισμένους συμβολισμούς γιά τους πληθαρίθμους.

Γιά τον πληθάριθμο του A, χρησιμοποιούνται διάφοροι συμβολισμοί: $|A|$ *(χωρίς καμμία σχέση με τον συμβολισμό γιά την απόλυτη τιμή),* cardA (στα γαλλικά και τ' αγγλικά, cardinal = πληθάριθμος), $\overline{\overline{A}}$, ... Εδώ, θα χρησιμοποιούμε το $|A|$. Το ότι η $\leq$ μεταξύ πληθαρίθμων είναι *αντισυμμετρική*, έπεται από το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα. Cantor - Bernstein (άλλη ονομασία Schröder - Bernstein). *Γιά δύο μη κενά σύνολα* A, B, *αν υπάρχη αμφεικόνιση του* A *σε υποσύνολο του* B *και του* B *σε υποσύνολο του* A, *θα υπάρχη και αμφεικόνιση του* A *στο* B. Γιά την απόδειξη βλ. Z, σελ. 156-158. **Ιστορικό.** Το θεμελιώδες αυτό θεώρημα υπήρξε εικασία του G. Cantor, που την απέδειξε, με ωραιότατο και πολυδύναμο τρόπο (που εκτίθεται στο Z, σελ. 156-158), ο αντάξιος συνεχιστής του G. Cantor, μεγάλος συνολοθεωρητικός F. Bernstein (1878-1956). Τον ίδιο καιρό, ανεξάρτητα απ' αυτόν, έδωσε μία απόδειξη που της έμοιαζε ο επίσης μεγάλος συνολοθεωρητικός E. Schröder (1841-1902). Καίριο ρόλο παίζει, στην απόδειξη, το εξής **λήμμα**, το οποίο, στην πράξη, χρησιμοποιείται περισσότερο και από το ίδιο το θεώρημα: *Αν* A, B *και* Γ*μη κενά σύνολα, με* $A \subseteq B \subseteq \Gamma$, *και* $A \sim \Gamma$, *τότε, θα ισχύη και ότι* $A \sim B \sim \Gamma$. **Μιά εφαρμογή του:** Θέλουμε να δείξουμε ότι, *αν* A

σύνολο με $|A| = c$ *και* D *αριθμήσιμο σύνολο, τότε,* $|A \cup D| = c$.
Απόδειξη. Καθώς είδαμε πιο πάνω, το τυχόν ευθύγραμμο τμήμα έχει πληθάριθμο c. Παίρνουμε, λοιπόν, ένα τέτοιο τμήμα $[\alpha,\beta]$ $(\beta \neq \alpha)$. Αναγκαία, $A \sim [\alpha,\beta]$. Παίρνουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα $[\gamma,\delta] \supset [\alpha,\beta]$. Τα τοποθετούμε όπως στο σχήμα (ότι κάνουμε είναι εντελώς αυστηρό)· και παίρνουμε ένα αριθμήσιμο υποσύνολο σημείων D_1 του $[\gamma,\delta]$. Αναγκαία, $D_1 \sim D$. Φανερά,



$[\alpha,\beta] \subset [\alpha,\beta] \cup D_1 \subset [\gamma,\delta]$. Τώρα, αφού $[\alpha,\beta] \sim [\gamma,\delta]$, από το λήμμα έπεται ότι και
$[\alpha,\beta] \sim [\alpha,\beta] \cup D_1$.
Άρα, $|A| = |A \cup D| = c$. ο.ε.δ.

Προσοχή ! *Χωρίς το θεώρημα* Cantor - Bernstein, *δεν θα είχαμε εξασφαλίσει ότι η* $\leq$ *μεταξύ πληθαρίθμων είναι διάταξη.*

Αναδιατύπωση του 5.4, που προσφέρεται σε γενίκευση. Θεωρήσαμε, εκεί, το σύνολο των απείρων ακολουθιών από τα γράμματα α και β (≠ α). Από τους ορισμούς, η κάθε τέτοια ακολουθία είναι μιά συνάρτηση $\mathbf{N}^* \to \{\alpha,\beta\}$. Γιά να είμαστε παραστατικοί, μπορούμε να θεωρήσουμε τα διάφορα στοιχεία του πεδίου ορισμού $\mathbf{N}^*$, σαν θέσεις. Σε κάθε τέτοια θέση, θα βρίσκεται το α ή το β. Αν, τώρα, συνέβαινε να είναι το σύνολο των υπ' όψη συναρτήσεων αριθμήσιμο, θα είχαμε, σχηματικά την εικόνα:

$$\mathbf{N}^* \begin{cases} \circ \ \mapsto \ \circ \ \circ \ \circ \ \cdots \ \mathbf{N}^* & \text{θέσεις} \\ \circ \ \mapsto \ \circ \ \circ \ \circ \ \cdots \ \mathbf{N}^* & \\ \circ \ \mapsto \ \circ \ \circ \ \circ \ \cdots \ \mathbf{N}^* & \text{- » -} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \ \vdots \ \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \text{- » -} \end{cases}$$

Τα βέλη $\mapsto$ παριστάνουν μία αμφεικόνιση φ του $\mathbf{N}^*$ στο σύνολο των συναρτήσεων $\mathbf{N}^* \to \{\alpha,\beta\}$

$\nu \mapsto$ θέση 1, θέση 2, θέση 3, . . .

Μέσα στις θέσεις, που αντιστοιχίζονται έτσι στο ν, είναι και η θέ-ση ν. Σ' αυτήν, θα βρίσκεται ή το α ή το β. Έστω π.χ. ότι είναι

$$\begin{array}{ll} & \quad\ \alpha \qquad\ \ \alpha \qquad\ \ \beta \qquad\ \ \alpha \qquad\ \ \beta \\ (\nu \in \mathbf{N}^*) & \nu \mapsto \text{θέση 1, θέση 2, θέση 3, θέση 4, θέση 5, . . .} \end{array}$$

Αν διατηρήσουμε ή αλλάξουμε το καθένα απ' αυτά τα α και β (αλλάξουμε = εναλλάξουμε τα α και β), λαβαίνουμε, πάλι, μιά συνάρτηση $\mathbf{N}^* \to \{\alpha,\beta\}$, που, από την υπόθεση, *πρέπει* να βρίσκεται στον δεξιά απ' τα $\mapsto$ "κατάλογο". *Αν* δεν βρίσκεται, θα έχουμε *άτοπο*· και, επομένως, *κακώς* θα έχουμε κάνει την υπόθεση ότι υπάρχει *αμφεικόνιση* φ. Τώρα, γιά να μην βρίσκεται μιά τέτοια συνάρτηση στον "κατάλογο", αρκεί να μην μπορή να συμπέση με καμμιά του καταλόγου· και, γι αυτό, *αρκεί να διαφέρη, γιά κάθε* ν, *στην* ν-*οστή θέση*. Θεωρούμε, λοιπόν, την εξής συνάρτηση $\mathbf{N}^* \to \{\alpha,\beta\}$: Γιά κάθε ν, στην ν-οστή θέση, διαφέρει από το φ(ν)· αν, σ' αυτό, βρίσκεται α, έχει β· και, αντιστρόφως. Συμπληρώθηκε, έτσι, η απόδειξη.

Άμεση γενίκευση της παραπάνω αποδείξεως. Αν όπου $\mathbf{N}^*$ θέσουμε το *τυχόν μη κενό σύνολο* Χ, ο παραπάνω αποδεικτικός συλλογισμός *εξακολουθεί να ισχύη*. Δηλαδή: *Δεν υπάρχει αμφεικόνιση του* Χ *στο σύνολο των συναρτήσεων* $X\to \{\alpha,\beta\}$ ($\beta \neq \alpha$). Ας αντιστοιχήσουμε, τώρα, σε κάθε συνάρτηση $X\to \{\alpha,\beta\}$, το σύνολο των στοιχείων του Χ, όπου η συνάρτηση αυτή παίρνει την τιμή α. Ορίζεται, έτσι, μιά αντιστοιχία 1-1 ανάμεσα στο σύνολο των συναρτήσεων αυτών και στο P(X). Επομένως, *δεν υπάρχει αμφεικόνιση του* Χ *στο* P(X). Τώρα, υπάρχει, φανερά, αμφεικόνιση του Χ στο σύνολο των μονοσυνόλων $\{x\}$, όπου $x\in X$· επομένως, του Χ σε υποσύνολο του P(X). Άρα, $|X| < |P(X)|$. (G. Cantor).

Πρόθεση του G. Cantor ήταν να επεκτείνη, με τους πληθαρίθμους, στα άπειρα σύνολα, την έννοια του φυσικού αριθμού, *σαν αριθμού πλήθους*. Επομένως, γιά *πεπερασμένο* σύνολο Α, με ν στοιχεία, $|A| = \nu$. Τότε, το τελευταίο θεώρημα παίρνει την μορφή
$\nu < 2^\nu$.

Σχόλιο. Καθώς είδαμε, οι βαθιές αιτίες μερικών κλασικών θεωρημάτων της Συνδυαστικής γιά *πεπερασμένα* σύνολα βρίσκονται στα αντίστοιχα θεωρήματα γιά *τυχόντα* σύνολα.

Πόρισμα του παραπάνω θεωρήματος. *Υπάρχει απειρία διαφορετικών μεταξύ τους πληθαρίθμων απείρων συνόλων.*

Γενικός ορισμός των πληθαρίθμων. Ο Frege όρισε σαν *πληθάριθμο ενός συνόλου* Α την κλάση όλων των συνόλων Β, με
Α ~ Β. Ο ορισμός αυτός εμπεριέχει τους λογικούς κινδύνους που συνεπάγεται η χρήση του όρου κλάση, σ' αυτή την περίπτωση. Ο John von Neumann ονομάζει *πληθάριθμο του* Α ένα συγκεκριμένο μέλος αυτής της κλάσης. Θα το δούμε αυτό, σε λίγο, καλύτερα.

Ο ορισμός αυτός του Frege (που, βέβαια, κι αυτός δεν θα υπήρχε χωρίς την διαισθητική μεγαλοφυά αφαίρεση της εννοίας του πλήθους από τον G. Cantor), πάντως, θα επιτρέψη, αργότερα, σ' έναν John vov Neumann να φτάση σε έναν σωστό και "επιχειρη-σιακό" ορισμό των πληθαρίθμων. Αυτόν, θα τον δούμε σε λίγο.

Μία κλασική, απλή, αλλά πολύτιμη παρατήρηση: *Αν από ένα μη αριθμήσιμο σύνολο* Β *αφαιρέσουμε ένα αριθμήσιμο σύνολο* Α, *το* Β\Α *είναι, κι αυτό, μη αριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Με εις άτοπον απαγωγή. Έστω ότι το Β\Α ήταν αριθμήσιμο. Τότε, θα ήταν και το Α ∪ (Β\Α), δηλαδή το Α. Άτοπο.

Μια άλλη πολύτιμη απλή παρατήρηση. Αν το Α είναι αριθμήσιμο, |**R**\A| = |**R**| (δηλαδή, υπάρχει αντιστοιχία 1-1 ανάμεσα στο **R**\A και στο **R**.

Απόδειξη. Καθώς έχουμε αποδείξει, αν α και β > α τυχόντες πραγματικοί αριθμοί,]α, β[~ **R**. Θεωρούμε, τώρα, τα σύνολα]0, 1[,]1, 2[,]0, 2[, **R** και ένα, οποιοδήποτε, αριθμήσιμο υποσύνολο Α΄ του [1, 2[. Φανερά,]0, 1[⊂]0, 2[\A΄⊂ **R**\A ⊂ **R**.
Οι αντιστοιχίες 1-1]0, 2[~ **R** και Α΄ ~ Α δείχνουν ότι και
]0, 2[\A΄ ~ **R**\A. Εξ άλλου,]0, 1[~ **R**.
Έτσι, τελικά,]0, 1[⊂ **R**\A ⊂ **R** και]0, 1[~ **R**.
Τώρα, απ' ότι είδαμε στο θεώρημα Cantor - Bernstein, έπεται ότι, |**R**\A| = |**R**|.

Το γιατί οι κλασικές αυτές απλές παρατηρήσεις είναι πολύτιμες, θα το δούμε αμέσως. Να, τώρα, πώς σκεφτόταν ο G. Cantor. Έλεγε (με δικά μας λόγια): Θεωρούμε το **R** που, *αποδεδειγμένα,* δεν είναι αριθμήσιμο. Αρχίζουμε να παίρνουμε, από ένα, κάθε φορά, στοιχείο του (το πάρσιμο αυτό είναι νοερό, όχι υλικό). Του αφαιρούμε, έτσι ένα αριθμήσιμο σύνολο, π.χ. τους πραγματικούς αλγεβρικούς αριθμούς. Αφού το **R** δεν είναι αριθμήσιμο, δεν εξαντλείται μ' αυτούς. Κάνουμε την ίδια δουλειά με τους υπόλοιπους, παίρνοντας ένα, ακόμα, αναγκαία αριθμήσιμο (αφού παίρνουμε τα στοιχεία του ένα, ένα κλπ.), σύνολο˙ κ.ο.κ. Όσο και να προχωρούμε έτσι, το αφαιρούμενο από το **R** σύνολο είναι, πάντα, αριθμήσιμο. Ερχόμαστε, τώρα, στο κρίσιμο σημείο. Λέει, τώρα, ο G Cantor. *Όταν εξαντληθή η δυνατότητα να προχωρούμε με αριθμήσιμα σύνολα, εμφανίζεται το πρώτο μη αριθμήσιμο σύνολο.* (Καλεί, μάλιστα, τον πληθάριθμο του αριθμησίμου $\aleph_0$, και του συνόλου αυτού $\aleph_1$.) Η θεώρηση αυτή είναι διαισθητικά μεγαλοφυής, όχι, όμως, και μαθηματικά εντελώς διαυγής. Ας προσπαθήσουμε να νιώσουμε τι γίνεται. Αξιοποιώντας την τελευταία παρατήρηση, βλέπουμε ότι, αφού η αφαίρεση από το **R** αριθμησίμου συνόλου δεν αλλάζει τον πληθάριθμό του, θα συναντήσουμε σύνολα με τον πληθάριθμο |**R**| πριν, στην αφαιρετική πορεία μας, φθάσουμε στο **R**. Ας δεχτούμε, γιά δύο λεπτά, τον τρόπο σκέψης του G. Cantor. Αυτός είναι: (όσο μένουμε στους φυσικούς, σε κάθε βήμα μας (πάρσιμο στοιχείου του **R**) αλλάζει ο πληθάριθμος του αφαιρουμένου συνόλου˙ Γιατί, ν < ν+1. Όταν φτάσουμε στην αφαίρεση του **N**, έχουμε νέα αλλαγή πληθαρίθμου˙ ν < |**N**|.

Συμβολισμός. (Το θυμίζουμε): |**N**| = $\aleph_0$.

Τώρα, όσο προχωρούμε με *διαδοχική* αφαίρεση *αριθμησίμων* συνόλων, ο πληθάριθμος των αφαιρουμένων συνόλων μένει $\aleph_0$. Όμως, $\aleph_0$ < |**R**|. Άρα, στην αφηρημένη πορεία μιάς διαδοχικής εξαντλήσεως των στοιχείων του **R**, "κάπου" πρέπει να εμφανιστή, σαν πληθάριθμος του αφαιρουμένου συνόλου, ο $\aleph_1$. Καθώς, τώρα, η πορεία αυτή δεν μπορεί να θεωρηθή ούτε "αριθμησίμως κατασκευαστική", χρειάζεται να σκεφτούμε κάποιον άλλο τρόπο γιά να *την στηρίξη λογικά.* Τον τρόπο αυτόν τον σκέφτηκε, ουσιαστικά, ο E. Zermelo (το 1904-1908). Τονίζουμε πρώτα, πρώτα, πως ο Zermelo αναφέρεται *αποκλειστικά* σε ότι ονομάσαμε *σύνολα, όχι σε κλάσεις - μη σύνολα* (είχε ο ίδιος φτάσει στον "περιορισμό" της καντοριανής εννοίας του συνόλου από τότε. Η ουσιαστικώτερη πρωτοτυπία του John von Neumann είναι πως είδε ότι μπορούμε να κάνουμε μερικά πράγματα και με τις κλάσεις μη-σύνολα.) Τώρα, γι' αυτά, ο Zermelo εγκαταλείπει την καντοριανή πορεία "να αφαιρούμε το ένα στοιχείο μετά το άλλο", και, γιά να εκφραστούμε απλουστευτικά, θεωρεί *όλα* τα μη κενά υποσύνολα ενός δοσμένου μη κενού συνόλου E που επιδέχεται "δεκτή" *καλή διάταξη*. Από εκεί, με καθόλου τετριμμένη λογική διαδικασία, φτάνει στο περιώνυμο θεώρημά του (εικασία του G. Cantor), ότι *κάθε μη κενό σύνολο μπορεί να διαταχθή καλώς.*

Από την σκοπιά της *θεμελιώσεως,* δύο είναι τα καίρια σημεία στην απόδειξη του Zermelo. 1) Ότι η απόδειξή του είναι με εις άτοπον απαγωγή˙ αλλά, από τους αρχαίους Έλληνες και ύστερα, αδιάκοπα κάνουμε αποδείξεις με εις άτοπον απαγωγή. Χρήσιμο είναι, όμως, στην παρούσα συγκεκριμένη περίπτωση, να τονίσουμε *τι* αποδεικνύουμε: Ότι, *αν υπάρχη μη κενό σύνολο που δεν μπορεί να διαταχθή καλώς, θα έχουμε άτοπο.* 2) Υποθέτουμε ότι ισχύει το (γενικό) *Αξίωμα της Επιλογής.* Αυτό λέει: Αν το I σύνολο μη κενό και τα $A_i (i \in I)$ σύνολα μη κενά, ανά δύο ξένα μεταξύ τους (= με κενή, την τομή τους), τότε, *υπάρχει* ένα σύνολο E που έχει *ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε* A_i $(i \in I)$.

Όταν το I είναι πεπερασμένο ή υπάρχη κάποιος "νόμος" που *καθορίζει* την επιλογή στοιχείου από το A_i $(i \in I)$, *τότε* το αξίωμα αυτό *αποδεικνύεται* και, επομένως, γίνεται *θεώρημα*˙ στην γενική περίπτωση, όχι.

Σημείωση. Το αξίωμα αυτό, το χρησιμοποιούσαν, χωρίς, ακόμη, να το συνειδητοποιούν, σε αποδείξεις βασικών θεωρημάτων του Απειροστικού Λογισμού (αυτών που έχουν τοπολογική υφή). Βλ. σχετικά την ωραία μελέτη του Ν. Κριτικού, που έχουμε παραθέσει στο τέλος του Ζ.

Σε πρώτη όψη, το παραπάνω αξίωμα φαίνεται "αυτονόητο". Όμως, τα *εντελώς διαφορετικά ισοδύναμά του* δείχνουν πόσο ισχυρό είναι, αυτό το αξίωμα. Βλ. σχετικά Ζ, κεφάλαια έβδομο και όγδοο. Εδώ, μας αρκεί το εξής *θεώρημα,* που ισχύει μέσα σε όλες τις "λογικές" αξιωματικές θεωρίες συνόλων: *Το θεώρημα της Καλής Διατάξεως και το γενικό αξίωμα της επιλογής είναι (λογικά) ισοδύναμα.*

Ας γυρίσουμε στην καντοριανή θεωρία συνόλων. Μιλώντας σε μη εντελώς αυστηρή γλώσσα, μπορούμε να αποδείξουμε ότι, και εκεί, τα δύο αυτά αξιώματα είναι (λογικά) ισοδύναμα.

Συμπέρασμα. Το Αξίωμα της Επιλογής έχει στην Θεωρία Συνόλων την θέση που έχει στην Ευκλείδειο Γεωμετρία το Αίτημα των Παραλλήλων.

Όταν οικοδομούμε τα Μαθηματικά επάνω σε μία αξιωματική θεωρία συνόλων, έχουμε δύο δυνατότητες: Μαθηματικά με το Αξίωμα της Επιλογής και Μαθηματικά χωρίς αυτό· ακριβώς, όπως είχαμε ευκλείδεια και μη ευκλείδειες γεωμετρίες. (Βλ., γενικά, Z).

Ας ξαναγυρίσουμε, τώρα, στο θέμα του ορισμού των πληθαρίθμων. Υπενθυμίζουμε, γιά μεταγενέστερη χρήση, ότι αναφέραμε (χωρίς να το αποδείξουμε, εδώ) το θεώρημα, ότι όλες *οι καλώς διατεταγμένες κλάσεις χωρίς σταματημό είναι ισόμορφες,* ως προς *τις αντίστοιχες διατάξεις τους.*

Ο G. Cantor ενδιαφερότανε να επεκτείνη την έννοια του φυσικού αριθμού και σαν αριθμού που μας λέει *την θέση* ενός στοιχείου στην συνηθισμένη ολική διάταξη ($1 < 2 < 3 \ldots$). Όρισε, έτσι, τους *διατακτικούς αριθμούς.*

$1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, 2\omega, 2\omega+1, 2\omega+2, \ldots, \omega^2, \omega^2+1, \ldots$

το νόημα είναι: Το ω αντιστοιχεί στο $\mathbf{N}^*$, το ω+1 σε σύνολο της μορφής $\{1, 2, 3, \ldots, 1'\}$, το ω+2, στο $\{1, 2, 3, \ldots, 1', 2'\}$ κ.ο.κ.· σύνολα, όλα, φανερά αριθμήσιμα. Τώρα, *μετά την εξάντληση των δυνατοτήτων της αριθμήσιμης πορείας,* τοποθετείται ο διατακτικός αριθμός που αντιστοιχεί στο πρώτο μη αριθμήσιμο σύνολο που συναντούμε.

Γενικός ορισμός. Κάθε διατακτικός αριθμός, που είναι ο πρώτος με τον οποίο μεγαλώνει, σ' αυτήν την διαδικασία, ο πληθάριθμος, ονομάζεται *αρχικός* διατακτικός αριθμός.

Αξιοποιώντας τις προσφορές του Zermelo και του von Neumann, ας τα κάνουμε αυτά σωστά.

Γιά τα άπειρα σύνολα που δεν έχουν οριστή με "νόμους" κλπ., το μόνο που μας εξασφαλίζει την δυνατότητα να διαταχθούν καλώς είναι το Αξίωμα της Επιλογής. Λόγω της ισοδυναμίας του με το θεώρημα της Καλής Διατάξεως του Zermelo, μπορούσαμε, απ' την αρχή, να δεχτούμε το θεώρημα αυτό σαν *αξίωμα.* Δεν το κάνουμε, μόνο γιατί μας φαίνεται πιό φυσιολογική, σαν γενική υπόθεση, το Αξίωμα της Επιλογής. Πάντως, από δώ και πέρα, όταν μιλάμε γιά *μη αριθμήσιμα* κ.δ. σύνολα, θα εννοούμε: με βάση το θεώρημα του Zermelo. Εμπνεόμενος από την καντοριανή πορεία ορισμού των διατακτικών αριθμών, ο von Neumann, τους όρισε έτσι (δίνουμε, *απλουστευτικά*, την ιδέα): Διατακτικός αριθμός του κενού συνόλου είναι το $\varnothing$· μονοσυνόλου, είναι το $\{\varnothing\}$· του δισυνόλου, είναι το $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$· κ.ο.κ. Του **N**, το σύνολο $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing,\{\varnothing\}\}, \ldots\}$. Γενικά, *κάθε σύνολο, σ' αυτήν την διαδικασία, έχει σαν στοιχεία του όλα τα προηγούμενα σύνολα*. Η κ.δ. κλάση, που δημιουργείται έτσι, είναι *ισόμορφη,* με την κ.δ. κλάση 0, 1, 2, . . . , ω, ω+1, . . . του G. Cantor. Και οι δυό αυτές μπορούν και υπάρχουν, γιατί δεχθήκαμε το Αξίωμα της Επιλογής και, επομένως, και το θεώρημα του Zermelo. Τους έτσι ορισμένους (ισοδύναμα: G. Cantor ή von Neumann), *αρχικούς* διατακτικούς αριθμούς ονομάζει ο John von Neumann, *πληθαρίθμους.* Το ουσιαστικό είναι, καθώς είπαμε, ότι επιλέγει ένα συγκεκριμένο στοιχείο από κάθε κλάση του Frege. Ο ορισμός αυτός των πληθαρίθμων είναι πολύ "επιχειρησιακός". Γιά την αριθμητική των πληθαρίθμων και των διατακτικών αριθμών, παραπέμπουμε στο έβδομο κεφάλαιο του Z.

Σχόλιο. Στα καλώς διατεταγμένα σύνολα, η νοητική εικόνα που μπορεί να σχηματίση ο άνθρωπος εκφράζεται με τα αριθμήσιμα σύνολα. Γιά μη αριθμήσιμο κ.δ. σύνολο, το μόνο που μπορούμε, αντικειμενικά, να πούμε είναι ότι *δεν μπορούν να εξαντληθούν με αριθμήσιμες διαδικασίες.* Αυτή την κατάσταση εκφράζει, ο G. Cantor, όταν λέει, ουσιαστικά, τα εξής: Μετά την εξάντληση των δυνατοτήτων της αριθμήσιμης διαδικασίας, έχουμε το *πρώτο* μη αριθμήσιμο κ.δ. σύνολο - αντ. τον πρώτο διατακτικό αριθμό με μη αριθμήσιμο πληθάριθμο· αυτόν, που τον ονόμασε $\aleph_1$. Τα μόνα, (βασικά) αντικειμενικά δεδομένα που έχουμε γιά τον $\aleph_1$, είναι ότι υπάρχουν μη αριθμήσιμα σύνολα (π.χ. το **R**) και ότι, εφ' όσον δεχθούμε το Αξίωμα της Επιλογής, κάθε μη κενό σύνολο μπορεί να διαταχθή καλώς· δεδομένα, που στηρίζονται σε "υπαρξιστικές" αποδείξεις με εις άτοπον απαγωγή, χωρίς ούτε υποψία "κατά-σκευαστικότητας". Το θεώρημα του Zermelo είναι θεμελιώδες, γιατί είναι το *μόνο που στηρίζει λογικά* (έστω και εντελώς "υπαρξιστικά") *την δυνατότητα μεταβάσεως με κ.δ. πορεία από το αριθμή-σιμο στο μη* *αριθμήσιμο*. Τα ίδια, βέβαια, και γιά την κ.δ. πορεία προς ολο ένα μεγαλύτερους πληθαρίθμους.

Σημείωση. Το "υπαρξιστικά" δεν έχει καμία σχέση με την φιλοσοφία του υπαρξισμού.

Το πιο φημισμένο πρόβλημα της θεωρίας συνόλων. Στην καντοριανή θεωρία, στα θεωρήματα που διαθέτουμε γιά *άπειρα* υποσύνολα του **R**, αυτά είναι *ή αριθμήσιμα ή σε αντιστοιχία* 1-1 *με το* **R**. Γεννήθηκε, έτσι, στον G. Cantor, το ερώτημα: μήπως, *υποχρεωτικά* αυτό ισχύει γιά *όλα* τα υποσύνολα του **R**; Ο G. Cantor διατύπωσε την εικασία ότι, ναι, έτσι είναι. Αυτή ονομάστηκε *Εικασία του συνεχούς* και, αντ., *Πρόβλημα του συνεχούς*. Παρά τις τεράστιες προσπάθειες κορυφαίων ερευνητών της *καντοριανής* θεωρίας συνόλων, δεν κατορθώθηκε να αποδειχθή αυτή η εικασία ή η αντίθεσή της. Βρέθηκαν, μόνον, διάφορα λογικά ισοδύναμα μ' αυτήν. Μάλιστα, προπολεμικά, ο κορυφαίος Πολωνός συνολοθε-ωρητικός W. Sierpinski έβγαλε και μιά μονογραφία αποκλειστικά γιά της έρευνες στο θέμα αυτό.

Με την "κοινή" λογική, εφαρμοσμένη στην καντοριανή θεωρία συνόλων, η οποία αναφέρεται σε *σύνολα από αντικείμενα* (της σκέψης), το πρόβλημα αυτό θα πρέπει να έχη απάντηση: *Ναι ή όχι*. Προσοχή όμως καθώς το είπαμε κιόλας, μόλις ξεπεράσουμε, πληθαριθμικά, τα αριθμήσιμα σύνολα, βρισκόμαστε μπροτά σε φαινόμενα καθόλου διαισθητικά, όπως την *λογική ισοδυναμία* του (με "αθώα" όψη) Αξιώματος της Επιλογής με πολύπλοκα θεωρήματα της θεωρίας συνόλων. Έχουμε, δηλαδή, σε ασυγκρίτως βαθύτερα θέματα, βέβαια, μιά αναλογία με τα φαινόμενα που παρουσιάστηκαν, όταν από τις κλασικές καμπύλες του επιπέδου περάσαμε στις "εψιλοντικά" ορισμένες συνεχείς συναρτήσεις $y = σ(x)$, που μπορούσαν π.χ. να έχουν σε κάθε διάστημα του πεδίου ορισμού τους, απειρία σημείων με τοπικό μέγιστο και τοπικό ελάχιστο· και που, βέβαια, δεν μπορούνε να παρασταθούνε γραφικά. Στα 1938-1939, ο κορυφαίος ερευνητής τη Λογικής **Kurt Gödel** απέδειξε τα εξής: Αν η αξιωματική θεωρία συνόλων Zermelo - Fraenkel δεν περικλείη λογική αντίφαση, *θα εξακολουθήση να μην περικλείη και όταν της προσθέσουμε, σαν πρόσθετο αξίωμα, το Αξίωμα της Επιλογής. Το ίδιο,* *αν στο έτσι επαυξημένο αξιωματικό σύστημα* Zermelo-Fraenkel *προσθέσουμε, σαν αξίωμα, την υπόθεση του συνεχούς.*

Στα 1963, ο τότε νεαρός αναλύστας (και "ερασιτεχνικά" ερευνητής της λογικής) Paul J. Cohen απέδειξε ότι: Αν η αξιωματική θεωρία Zermelo-Fraenkel δεν περικλείει *λογική αντίφαση, θα εξακολουθήση να μην περικλείη και όταν της προσθέσουμε, σαν πρόσθετο αξίωμα, την άρνηση του Αξιώματος της Επιλογής. Το ίδιο, αν της προσθέσουμε, σαν αξίωμα, μιά άρνηση της υποθέσεως του συνεχούς.* Έτσι και το Αξίωμα της Επιλογής και η Υπόθεση του συνεχούς είναι αξιώματα *λογικά ανεξάρτητα και το ένα απ' το άλλο και από το αξιωματικό σύστημα* Zermelo - Fraenkel.

Τα πέτυχε αυτά, ο P. J. Cohen, χάρις στην εισαγωγή απ' αυτόν μιάς νέας, ρηξικέλευθα πρωτότυπης και εξαιρετικά ισχυρής, αποδεικτικής μεθόδου, στην Λογική, του "Forcing". Μ' αυτήν και με διάφορες βελτιώσεις της, ικανοί Λογικοί, Συνολοθεωρητικοί, Γενικοτοπολόγοι, απ' όλον τον κόσμο, άρχισαν να αποδεικνύουν *θεωρήματα ανεξαρτησίας* γιά βασικά θέματα της θεωρίας συνόλων και της γενικής τοπολογίας, *πλήθος*. Ο *κορυφαίος* όμως, που άνοιξε τον δρόμο ήταν ο P. J. Cohen. Ας προσπαθήσουμε να καταλάβουμε περί τίνος πρόκειται. Η εικασία του συνεχούς είναι, $\aleph_1$ = ο πληθάριθμος c του **R** (= ο πληθάριθμος του συνόλου των απείρων ακολουθιών από δύο διαφορετικά γράμματα). Ο Gödel απέδειξε ότι, με την προϋπόθεση της μη αντιφατικότητας της θεωρίας Zermelo-Fraenkel, η υπόθεση $\aleph_1 = c$ δεν μπορεί να μας οδηγήση σε άτοπο. ο P. J. Cohen, ότι ούτε και η $\aleph_1 < c$ μπορεί να οδηγήση σε άτοπο.

Προσοχή, τώρα, στο εξής: Τα θεωρήματα αυτού του είδους αποδεικνύονται μέσα σε μοντέλλα. Δηλαδή, βρίσκουμε κάποιο μαθηματικό μοντέλλο, *μη από πρώτα συσχετισμένο με την υπ' όψη αξιωματική θεωρία συνόλων,* και δείχνουμε ότι, με *κατάλληλη* ερμηνεία του $\in$ (ή, αναλόγως, του $\subseteq$) αυτής της θεωρίας, τα αξιώματά της και το προστιθέμενο ικανοποιούνται όλα μαζί μέσα στο μοντέλλο. *Άρα, είναι, μεταξύ τους, συμβιβαστά.* Φανερά, ο Gödel και ο P. J. Cohen κινήθηκαν μέσα σε *διαφορετικά* μοντέλλα. Δηλαδή, *το αποτέλεσμα του* P. J. *Cohen δεν αφορά την καντοριανή θεωρία συνόλων.* Αφορά το *αξιωματικό* "ανάλογο" της, την θεωρία Zermelo-Fraenkel. Τι το κοινό έχουν οι δύο αυτές θεωρίες και τι το διαφορετικό; *Φορμαλιστικά, είναι ίδιες.* Και γι' αυτό, οι ερευ-νητές της δεν μπορούσαν να αποδείξουν ή να καταρρίψουν την υπόθεση του συνεχούς· γιατί, *ό,τι κάνανε μεταφέρεται, αυτούσιο, στην αξιωματική θεωρία,* όπου η υπόθεση του συνεχούς είναι ανεξάρτητη από τ' άλλα αξιώματα (όπως συνέβαινε με το Αίτημα των Παραλ-λήλων, στον Ευκλείδη). Η διαφορά έγκειται στην ίδια την *έννοια του συνόλου*. Το καντοριανό είναι σύνολο από *αντικείμενα* (της σκέψης) και, αν θα μπορούσε, με κάποιο τρόπο, να "αποκατασταθή" λογικά, θα έπρεπε, σύμφωνα, με την αντίστοιχη "κοινή" λογική μας, να ισχύη ή να μην ισχύη η Υπόθεση του συνεχούς. Όμως, από το *θεώρημα* Lowenheim - Skolem - Tarski ξέρουμε ότι τα "σύνολα" μιάς (λόγω του θεωρήματος αυτού, *μη κατηγορικής*) πρωτοβάθμιας αξιωματικής θεωρίας συνόλων (π.χ. της Zermelo-Fraenkel), θεωρού-μενα *όλα μαζί* και μαζί με το $\in$ (ή το $\subseteq$), επιδέχονται τις πιό διαφορετικές ερμηνείες. Είναι, "εκ γενετής" *έννοιες ασυγκρίτως και αδιόρθωτα ευρύτερες από την έννοια του συνόλου αντικει-μένων (της σκέψης).* Αυτή είναι, νομίζω, η αληθινή αιτία γιά απο-τελέσματα φαινομενικά παράδοξα, όπως το αποτέλεσμα των Gödel -Cohen. Το ερώτημα είναι, όμως: Υπάρχει τρόπος να αποκατασταθή η "πιό ανθρώπινη" καντοριανή διαίσθηση;

Μιά τέτοια προσπάθεια με μεγάλο βάθος και εμβέλεια, άρχισε πριν από κάπου 50 χρόνια ο μεγάλος μαθηματικός και στοχαστής Marc Krasner.

Ό,τι και να συμβή στο μέλλον, πάντως, οι τρόποι σκέψης και τα αποτελέσματα των "αξιωματικών συνολοθεωρητικών” έπαιξαν και παίζουν, γιά τα Μαθηματικά και τον, εν γένει, στοχασμό έναν ρόλο όχι μικρότερο απ' εκείνον που έπαιξε η αξιωματική του Ευκλείδη. Χαρακτηριστική είναι και η αντιστοιχία ρόλων ανάμεσα στο Αίτημα των Παραλλήλων και το Αξίωμα της Επιλογής (αντ. την Υπόθεση του συνεχούς).

Γιά περισσότερα και Βιβλιογραφία, παραπέμπουμε στο όγδοο κεφάλαιο του Ζ.