Οι πραγματικοί αριθμοί

1. Προλεγόμενα. Η ανάγκη απαρίθμησης αντικειμένων, οδήγησε στην εισαγωγή του συνόλου των φυσικών αριθμών. Η ανάγκη μέτρησης μεγεθών, οδήγησε στην εισαγωγή του συνόλου των ρητών αριθμών. Γεννήθηκαν τα προβλήματα: Για κάθε δοσμένο μέγεθος, υπάρχει μονάδα μέτρησης, ως προς την οποία , ο λόγος του μεγέθους προς αυτήν, να είναι ρητός αριθμός; Ως προς όλα τα ομοειδή μεγέθη υπάρχει μονάδα μέτρησης, ως προς την οποία ο λόγος κάθε μεγέθους να είναι ρητός αριθμός; Στην περίπτωση αυτή, τα μεγέθη καλούνται σύμμετρα. Στον Πυθαγόρα αποδίδεται η ανακάλυψη της υπάρξεως μη συμμέτρων μεγεθών. Πράγματι, αν λάβουμε ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο πλευράς 1, η υποτείνουσά του θα έχει μήκος x, με $x^2 = 2$. Όμως, η εξίσωση αυτή, δεν έχει λύση στο σύνολο των ρητών αριθμών, μια και αν $x = p/q$, με $(p,q) = 1$, τότε και $p^2 = 2q^2$, δηλαδή, ο p είναι άρτιος αριθμός $p = 2p_1$, οπότε, και $4p_1^2 = 2q^2$, άρα, και ο q άρτιος αριθμός, πράγμα που αντίκειται στην υπόθεσή μας ότι οι p και q είναι πρώτοι μεταξύ τους.
Την λύση του προβλήματος αυτού, έδωσε ο Εύδοξος ο Κνίδιος και περιλαμβάνεται στο V βιβλίο των "Στοιχείων ".

2. Πλήρωση των ρητών κατά Dedekind. Μερίζουμε το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ σε δύο "τάξεις", (δηλαδή, δύο μη κενά υποσύνολα), A και B, έτσι ώστε:
(α) $A \cup B = \mathbb{Q}$ και $A \cap B = \varnothing$ (συνθήκη μερισμού).
(β) Αν $a \in A$ και $b \in B$, τότε και $a < b$.
(γ) Αν $a \in A$ και $x \in \mathbb{Q}$ με $x \le a$, τότε και $x \in A$. Αν $b \in B$ και $x \in \mathbb{Q}$ με $x \ge b$, τότε και $x \in B$.
Το ζεύγος (A, B), για το οποίο ισχύουν τα παραπάνω, ονομάζεται ***τομή*** των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$.
Θα εργασθούμε, τώρα, με το σύνολο των θετικών ρητών. Ότι θα πούμε, επεκτείνεται άμεσα σε όλους τους ρητούς.
Σε κάθε $u \in \mathbb{Q}$ αντιστοιχίζουμε την εξής τομή (A, B): $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \le u\}$, $B = \mathbb{Q} - A$. Η αντιστοιχία αυτή είναι ένα προς ένα και καλείται ***ρητή τομή***. Στην ρητή αυτή τομή, το σύνολο A έχει στοιχείο μέγιστο, το u, ενώ το σύνολο B δεν έχει στοιχείο ελάχιστο. Πράγματι, αν το u' ελάχιστο στοιχείο του B, τότε $\exists w \in \mathbb{Q}$, π.χ. ο $(u' + w)/2$, τέτοιος ώστε $u < w < u'$. Τότε όμως, $w \in B$, πράγμα άτοπο.
Το σύνολο των ρητών, εμφανίζει και τομές, οι οποίες δεν είναι ρητές. Μία τέτοια τομή, είναι η εξής: $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$, $B = \mathbb{Q} - A$. Στην τομή αυτή, το σύνολο A δεν έχει στοιχείο μέγιστο, και το σύνολο B δεν έχει στοιχείο ελάχιστο. Για το πρώτο, αρκεί να προσδιορίσουμε έναν ρητό, π.χ. τον h, $0 < h < 1$, έτσι ώστε ο $p = a + h > a$ να ανήκει στο A, για κάθε $a \in A$. Θέλουμε, λοιπόν, να έχουμε $(a+h)^2 < 2$ (1).
Είναι, $(a+h)^2 = a^2 + 2ah + h^2 = a^2 + h(2a+h) < a^2 + (2a+h)$. Για να ισχύει λοιπόν η (1) αρκεί να λάβουμε $h \le (2 - a^2)/(1 + 2a)$. Το A δεν έχει, λοιπόν, στοιχείο μέγιστο.
Με τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να δείξουμε ότι, και το B δεν έχει στοιχείο ελάχιστο.
Τομές του τύπου αυτού, καλούνται ***άρρητες*** τομές.
Σε κάθε, τώρα, ρητή τομή, αντιστοιχίζουμε τον μοναδικό ρητό u που την προσδιορίζει. Σε κάθε άρρητη τομή, αντιστοιχίζουμε ένα νέο στοιχείο ξ, το οποίο και θα καλούμε ***ασύμμετρο*** ή ***άρρητο αριθμό***. Το σύνολο των ρητών και ασύμμετρων

αριθμών, καλούμε, σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών. Έχουμε, συνεπώς, την ένα προς ένα αντιστοιχία $\mathbb{R} \ni r \mapsto (A,B) \in P(\mathbb{Q}) \times P(\mathbb{Q})$, όπου $r \in \mathbb{R}$, και $A, B \subset \mathbb{Q}$.
Το σύνολο αυτό διατάσσεται ολικώς, αν θέσουμε $\forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$: (α) $r_1 = r_2 \leftrightarrow A_1 = A_2$. (β) $r_1 < r_2 \leftrightarrow A_1 \subset A_2$ και, τέλος, $r_1 > r_2 \leftrightarrow A_1 \supset A_2$.
Με τον τρόπο αυτό, η δομή $(\mathbb{Q}, <)$ εμβυθίζεται ισόμορφα μέσα στην $(\mathbb{R}, <)$.

Πόρισμα. Ανάμεσα σε δύο πραγματικούς αριθμούς, υπάρχει ένας τουλάχιστον ρητός.

Θεώρημα 1. Το σύνολο $\mathbb{R}$ εμφανίζει μόνο ρητές τομές.
Απόδειξη. Μερίζουμε το σύνολο $\mathbb{R}$ σε δύο τάξεις Α και Β. Θα δείξουμε ότι η τομή (Α,Β) είναι ρητή. Ότι, δηλαδή, είτε το σύνολο Α έχει στοιχείο μέγιστο, είτε το σύνολο Β έχει στοιχείο ελάχιστο. Με (A_ρ, B_ρ) συμβολίζουμε την τομή των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$, η οποία προσδιορίζεται από τα σύνολα $A_\rho = \mathbb{Q} \cap A$, $A_\rho \subset A$ και $B_\rho = \mathbb{Q} \cap B$, $B_\rho \subset B$. Αν η τομή αυτή είναι ρητή, δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Έστω, λοιπόν, ότι πρόκειται για άρρητη τομή. Προσδιορίζει, τότε, τον ασύμμετρο αριθμό ξ. Τότε, $\forall (a,b) \in A_\rho \times B_\rho$, $a < \xi < b$ (1). Εξ' άλλου, ο ξ ανήκει είτε στο Α, είτε στο Β. Έστω $\xi \in A$. Θα δείξουμε ότι ο ξ είναι μέγιστο στοιχείο του Α. Πράγματι, αν είχαμε και τον $\xi' \in A$ με $\xi' > \xi$, τότε, $\exists\ u \in \mathbb{Q}$, με $\xi > u > \xi'$. Άρα $u \in A_\rho$. Τούτο όμως, είναι αδύνατον, λόγω της (1).

Πόρισμα. Έστω (Α,Β) μία τομή του $\mathbb{R}$. Προσδιορίζεται, τότε, ένας και μόνον πραγματικός αριθμός ξ, έτσι ώστε $\forall (a,b) \in A_\rho \times B_\rho$, $a < \xi < b$.
Απόδειξη. Έστω ότι προσδιορίζονται δύο πραγματικοί αριθμοί α΄ και β΄. Είναι, τότε, α΄ < β΄. Η μοναδική δυνατότητα που έχουμε είναι, ο α΄ να είναι μέγιστο στοιχείο του Α, και ο β΄ ελάχιστο στοιχείο του Β. Έστω ο ρητός u, με α΄ < u < β΄. O u προσδιορίζει την τομή (A_ρ, B_ρ). Αν $u \in A_\rho$, ο α΄ δεν είναι μέγιστο στοιχείο του Α. Αν $u \in B_\rho$, ο β΄ δεν είναι ελάχιστο στοιχείο του Β. Άτοπον.

Ορισμός. ***Κάτω φραγμένο*** καλείται κάθε υποσύνολο Ε του $\mathbb{R}$, κάθε στοιχείο του οποίου είναι $\geq y$, $y \in \mathbb{R}$. Ο y καλείται ***κάτω φράγμα*** του Ε. ***Κάτω πέρας*** (infimum, συμβολικά $\inf E$) του συνόλου Ε καλείται εκείνος ο $\gamma \in \mathbb{R}$, για τον οποίον ισχύουν (α) το Ε φράσσεται κάτω από τον γ, και, (β) για κάθε x > γ, $x \in \mathbb{R}$, ο x δεν είναι άνω φράγμα του Ε. Ισοδύναμα μπορούμε να λέμε ότι, (α) δεν υπάρχει $x \in E$, με x < γ, και, (β) ανάμεσα στον $x = \gamma + \varepsilon$ και τον γ, υπάρχει ένα τουλάχιστον στοιχείο του Ε. Αντίστοιχα εισάγεται και ο ορισμός του ***άνω πέρατος***, (supremum, συμβολικά $\sup E$) του συνόλου Ε. Ο γ είναι, δηλαδή, άνω πέρας του Ε, αν και μόνον αν, (α) δεν υπάρχει $x \in E$, με x > γ, και, (β) ανάμεσα στον $x = \gamma - \varepsilon$ και τον γ, υπάρχει ένα τουλάχιστον στοιχείο του Ε. Φραγμένο είναι το Ε, αν είναι άνω και κάτω φραγμένο.

Θεώρημα 2. Κάθε κάτω φραγμένο υποσύνολο Ε του $\mathbb{R}$, έχει κάτω πέρας. (Αντίστοιχα, για άνω φραγμένα υποσύνολα Ε του $\mathbb{R}$).
Απόδειξη. Διαιρούμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών σε δύο τάξεις Α και Β. Στο σύνολο Α τοποθετούμε όλους τους $\alpha \in \mathbb{R}$, για τους οποίους δεν υπάρχει $x \in E$, με x < α. Η τάξη Α, λοιπόν, περιλαμβάνει και όλα τα κάτω φράγματα του Ε.

$B = R - A$. Η Β περιλαμβάνει, λοιπόν, κάθε $\alpha \in R$, για τον οποίο υπάρχει ένας τουλάχιστον $x \in E$, με x < β. Η Β περιλαμβάνει, βέβαια, και το Ε. Φανερά, κάθε $\alpha \in A$ είναι < από κάθε $\beta \in B$. Έστω γ ο πραγματικός αριθμός, που ορίζεται από την τομή (Α,Β). Θα δείξουμε ότι, $\gamma = \inf E$. Πράγματι, αν $\exists x \in E$, με x < γ, τότε, ανάμεσα στον x και τον γ θα υπήρχε και ένας $\beta \in B$, πράγμα άτοπον. Άρα, (α) κανένας $x \in E$ δεν είναι μικρότερος του γ. Θεωρούμε, τώρα, τον γ+ε. Είναι, $\gamma + \varepsilon \in B$. Άρα (β) ανάμεσα σ' αυτόν και τον γ, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x \in E$.

Επεκτείνουμε τις πράξεις που καθιστούν το Q σώμα και στο R, έτσι ώστε ο ισομορφισμός των δομών $(Q, \leq)$, $(R, \leq)$, να επεκταθεί κι αυτός, σε έναν ισομορφισμό ανάμεσα στα διατεταγμένα σώματα Q και R. Η επέκταση αυτή γίνεται εύκολα, αν παρατηρήσουμε ότι, αν $\xi_1 = (A_1, B_1)$, $\xi_2 = (A_2, B_2)$, και $A_1' \subseteq A_1$, $A_2' \subseteq A_2$, $B_1' \subseteq B_1$, $B_2' \subseteq B_2$, τα αντίστοιχα υποσύνολα των ρητών, τότε τα σύνολα $A' = A_1' + A_2'$, $B' = B_1' + B_2'$, (όπου ορίζουμε το Α + Β = {α + β με α∈Α και β∈Β}, αποτελούν τομές του συνόλου Q των ρητών. Στην περίπτωση, που η τομές αυτές είναι ρητές, και αντιστοιχούν στους u_1, u_2 τότε σ' αυτήν αντιστοιχεί ο ρητός $u = u_1 + u_2$. Αν η τομές είναι άρρητες, και ορίζουν τους ασύμμετρους ξ_1, ξ_2, θέτουμε $\xi = \xi_1 + \xi_2$. Αποδεικνύεται ότι, $\xi = (A, B)$. Ανάλογα έχουμε και στην περίπτωση ρητής και αρρήτου τομής. Ο πολλαπλασιασμός, τέλος, ορίζεται κατά τον ίδιο τρόπο.

Το σύνολο R, είναι, λοιπόν, ένα ***πλήρες*** ολικά διατεταγμένο σώμα (πλήρες = παρουσιάζει μόνον ρητές τομές). Είναι και ***Αρχιμήδειο.***

Θεώρημα 3. (Αξίωμα του Αρχημίδους). Για κάθε δύο θετικούς πραγματικούς α < β, υπάρχει φυσικός αριθμός n, τέτοιος ώστε nα > β.
Απόδειξη. Έστω ότι δεν υπάρχει τέτοιος n. Τότε, $\forall n \in N$, $n\alpha \leq \beta$. Έστω Ε το σύνολο όλων των nα. Το σύνολο αυτό, είναι άνω φραγμένο. Άρα, έχει το $\beta' = \sup E$. Είναι, $\beta' \geq n\alpha$ για κάθε n. Άρα, και $\beta' \geq (n+1)\alpha$ ή $\beta' - \alpha \geq n\alpha$, πράγμα αδύνατον.

Πόρισμα. Κάθε πραγματικός αριθμός, είναι άνω πέρας κάποιου υποσυνόλου των ρητών. Αρκεί για τον $\xi \in R$, να θέσουμε $E = \{m/n, \text{ με } m/n < \xi\}$.

Παρατηρήσεις. α) Αν το $A \subset R$ είναι άνω φραγμένο, το $-A = \{\alpha \in R, \text{ με } -\alpha \in A\}$ είναι κάτω φραγμένο.
β) Αν $\xi = \sup A$, $-\xi = \inf -A$. Τα πέρατα ενός φραγμένου υποσυνόλου του R, είναι μοναδικά.
γ) Αν $A \subseteq B \subset R$, τότε, $\sup A \leq \sup B$ (αντίστοιχα για το infimum).
δ) Αν Α, Β φραγμένα υποσύνολα του R, τότε, $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Ο Dedekind μετά την ανάπτυξη της θεωρίας του, παρατήρησε ότι, ενώ είχε την δυνατότητα σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα να αντιστοιχίζει έναν και μόνον πραγματικό αριθμό, το αντίστροφο, δεν είχε την δυνατότητα να το επιτύχει. Το θεώρησε κατόπιν τούτο, ως αξίωμα. «Σε κάθε σημείο της Ευκλειδείου ευθείας, αντιστοιχεί ένας και μόνον ένας πραγματικός αριθμός». Μετά την εισαγωγή του αξιώματος του Dedekind, μπορούμε να χρησιμοποιούμε αναφορικά με το σύνολο των πραγματικών αριθμών,

ορολογία που έχουμε από την Γεωμετρία. Έτσι, θα καλούμε το σύνολο R, πραγματική ευθεία, τα στοιχεία του σημεία, και θα διακρίνουμε μέσα σ' αυτό υποσύνολά του, που κατά περίπτωση θα καλούμε ανοικτά και κλειστά διαστήματα.
Ανοικτό διάστημα είναι εκείνο το υποσύνολο (α,β) του R, για το οποίο έχουμε ότι, $x \in (\alpha,\beta)$, αν και μόνον αν α < x < β. ***Κλειστό διάστημα*** είναι εκείνο το υποσύνολο [α,β] του R, για το οποίο έχουμε ότι, $x \in [\alpha,\beta]$, αν και μόνον αν $\alpha \leq x \leq \beta$.

Πόρισμα. Φανερά, $\sup(\alpha,\beta) = \sup[\alpha,\beta] = \beta$, και, $\inf(\alpha,\beta) = \inf[\alpha,\beta] = \alpha$.

Ορισμός. ***Περιοχή*** $V(x_0, \rho)$ του σημείου x_0 με ακτίνα ρ, καλείται το ανοικτό διάστημα $(x_0 - \rho,\ x_0 + \rho)$.
Σημείο συσσωρεύσεως (σ.σ.) ξ του υποσυνόλου $A \subset R$, καλείται εκείνο το σημείο $\xi \in R$, για το οποίο, κάθε περιοχή του V(ξ) έχει την ιδιότητα $V(\xi) \cap A - \{\xi\} \neq \emptyset$.
Εσωτερικό σημείο ξ του υποσυνόλου $A \subset R$, καλείται εκείνο το σημείο $\xi \in R$, για το οποίο, υπάρχει περιοχή V(ξ) με την ιδιότητα $V(\xi) \subseteq A$. Συνέπεια του ορισμού αυτού, είναι η $\xi \in A$.
Μεμονωμένο σημείο ξ του υποσυνόλου $A \subset R$, καλείται εκείνο το σημείο $\xi \in R$, για το οποίο, ύπαρχοι περιοχή V(ξ) με την ιδιότητα $V(\xi) \cap A = \{\xi\}$.

Παρατηρήσεις. α) Κάθε περιοχή ενός σ.σ. ξ του A, περιέχει άπειρο πλήθος στοιχείων του συνόλου A. β) Ένα πεπερασμένο σύνολο δεν έχει σ.σ.

Ανοικτό καλείται εκείνο το σύνολο, κάθε σημείο του οποίου, είναι εσωτερικό σημείο.
Κλειστό καλείται εκείνο το σύνολο, κάθε σημείο του οποίου, είναι σ.σ. αυτού.

Πρόταση 1. α) Το συμπλήρωμα ανοικτού συνόλου είναι κλειστό σύνολο.
β) Το συμπλήρωμα κλειστού συνόλου είναι κλειστό σύνολο.
Απόδειξη. Έστω το ανοικτό σύνολο $A \subset R$. Έστω $\xi \in R$, σ.σ. του συνόλου $R - A$. Θα δείξουμε ότι, $\xi \notin A$. Πράγματι, αν $\xi \in A$, τότε και κάθε περιοχή V(ξ) θα ήταν υποσύνολο του A. Άρα, καμία περιοχή αυτού, δεν θα έχει τομή μη κενή με το $R - A$. Άρα το ξ δεν θα είναι σ.σ. του συνόλου αυτού, αντίθετα με την υπόθεσή μας. Το υπόλοιπο της πρότασης έπεται από τους νόμους του de Morgan.

Θεώρημα 4. Η ένωση οιουδήποτε πλήθους ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο. Η τομή πεπερασμένου πλήθους ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο. Η ένωση πεπερασμένου πλήθους κλειστών συνόλων, είναι κλειστό σύνολο. Η τομή οιουδήποτε πλήθους κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.
Απόδειξη. Έστω F η ένωση οιουδήποτε πλήθους ανοικτών συνόλων, και $x \in F$. Το x είναι, τότε, και στοιχείο κάποιου ανοικτού συνόλου A, απ' αυτά που αποτελούν την ένωση F. Τότε, όμως, και μία ολόκληρη περιοχή του x είναι υποσύνολο του A. Άρα, και του F. Άρα η F ανοικτό σύνολο. Το υπόλοιπο του θεωρήματος έπεται από τους νόμους του de Morgan.

Πρόταση 2. Τα ανοικτά διαστήματα είναι ανοικτά σύνολα. Τα κλειστά διαστήματα είναι κλειστά σύνολα.

Θεώρημα 5. (Bolzano – Weierstrass). Κάθε άπειρο και φραγμένο υποσύνολο της πραγματικής ευθείας, έχει ένα τουλάχιστον σ.σ.

Απόδειξη. Έστω το άπειρο και φραγμένο υποσύνολο Ε του $\mathbb{R}$ Υπάρχει, τότε, (Θεώρημα 2), το $a = \inf E$ και το $b = \sup E$. Είναι, τότε, $E \subseteq [a,b]$. Διαιρούμε το κλειστό διάστημα [a,b] σε δύο μέρη, και καλούμε δ_1 το διάστημα εκείνο, που περιέχει μία απειρία σημείων του Ε. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο, και βρίσκουμε ότι, $\forall n \in \mathbb{N}$, το κλειστό διάστημα $\delta_n = [a_n, b_n]$, με $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$, περιέχει μία απειρία σημείων του Ε. Το σύνολο $A = \{a, a_1, \ldots\}$ είναι άνω φραγμένο. Το σύνολο $B = \{b, b_1, \ldots\}$ είναι κάτω φραγμένο. Φανερά, τα σύνολα των πραγματικών αριθμών Α΄ και Β΄ που ορίζονται αντίστοιχα από την σχέση $x \in A' \leftrightarrow \exists a' \in A$, με $x < a'$ και ανάλογη σχέση για το Β΄, αποτελούν τομή των πραγματικών αριθμών. Ορίζουν, συνεπώς, τον $\xi \in \mathbb{R}$. Φανερά, το ξ είναι σ.σ. του Ε, μιά και για κάθε περιοχή του $V(\xi,\rho)$, μπορούμε να βρούμε έναν δείκτη n, τέτοιον ώστε, $\dfrac{b-a}{2^n} < \dfrac{\rho}{2}$, οπότε, $\delta_n \subset V(\xi,\rho)$, και, συνεπώς, η V(ξ) θα περιέχει άπειρα σημεία του Ε, διαφορετικά από το ξ.

Θεώρημα 6. (Cantor). Μία φθίνουσα ακολουθία μη κενών κλειστών και φραγμένων συνόλων έχει τομή ένα μη κενό, κλειστό και φραγμένο σύνολο.

Απόδειξη. Έστω $(\delta_n)_{n\in N}$ η φθίνουσα ακολουθία των κλειστών συνόλων. Το ότι η τομή τους είναι κλειστό σύνολο, έπεται από προηγούμενο θεώρημα. Το ότι είναι φραγμένο σύνολο, είναι προφανές. Απομένει να δείξουμε ότι, δεν είναι το κενό σύνολο. Πράγματι, από κάθε δ_n, επιλέγουμε ένα σημείο x_n. Το σύνολο $X = \{x_n\}$ είναι ένα άπειρο φραγμένο υποσύνολο της πραγματικής ευθείας. Άρα, έχει ένα τουλάχιστον σ.σ., το ξ. Κάθε περιοχή του ξ, περιέχει άπειρα σημεία x_i, τα οποία ανήκουν όλα, αναγκαστικά, σε κάποιο δ_i. Το ξ είναι, λοιπόν, τελικά, σ.σ. κάθε δ_i. Όμως, τα δ_i κλειστά σύνολα. Άρα, $\xi \in \bigcap_n^{\infty} \delta_n$

Ορισμός. ***Ορικό*** σημείο του $E \subset \mathbb{R}$ καλείται εκείνο το σ.σ. του Ε, που, τελικά, κάθε περιοχή του, περιέχει όλα τα σημεία του Ε.

Πόρισμα. Το ορικό σημείο του Ε, είναι αναγκαστικά μοναδικό.

Πόρισμα. Μία εγκυβωτισμένη φθίνουσα ακολουθία κλειστών διαστημάτων, έχει ένα ορικό σημείο.

Θεώρημα 7. Κάθε φραγμένο ανοικτό υποσύνολο $F \subset \mathbb{R}$ είναι δυνατόν να γραφεί ως ένωσης αριθμησίμου το πλήθος διακεκριμένων ανοικτών διαστημάτων.

Απόδειξη. Έστω το $x \in F$. Επειδή το F ανοικτό, υπάρχουν $y, z \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $(y,x) \subset F$ και $(x,z) \subset F$. Θέτουμε $a = \inf\{(y,x) \mid y \in \mathbb{R}\}$ και $b = \sup\{(x,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$. Το ανοικτό διάστημα $I_x = (a,b)$ περιέχει το σημείο x και είναι $I_x \subset F$. Πράγματι, έστω το $w \in I_x$, $w \neq x$. Τότε, ή $a \le w < x$, ή $b \ge w > x$. Στην πρώτη περίπτωση, από τον ορισμό του infimum έπεται ότι υπάρχει $y \le w$, τέτοιο ώστε $(y,x) \subset F$, άρα, και, $w \in F$. Ανάλογα ισχύουν και στην δεύτερη περίπτωση. Δείξαμε, λοιπόν, ότι $I_x \subset F$.

Θα δείξουμε, τώρα, ότι $a \notin F$. Προς τούτο, έστω $a \in F$. Επειδή το F ανοικτό $\exists \rho \in \mathbb{R}$, με $(a-\rho, a+\rho) \subset F$, ή $(a-\rho, x] \subset F$, πράγμα αδύνατον. Όμοια έχουμε και ότι $b \notin F$.
Θεωρούμε την οικογένεια των ανοικτών διαστημάτων I_x. Φανερά, η ένωση της οικογένειας αυτής, είναι ένα ανοικτό σύνολο, που καλύπτει το F. Έστω (a,b) και (c,d) δύο στοιχεία της οικογένειας αυτής, και $x \in (a,b) \cap (b,c)$. Τότε και, $a < x < d$, και $c < x < b$. Επειδή, όπως δείξαμε, $a \notin F$, είναι $a < c$. Επειδή, $c \notin F$, είναι $c < a$. Άρα, $c = a$. Ανάλογα είναι και $d = b$. Άρα, αν δύο διαστήματα της οικογένειας των ανοικτών διαστημάτων, που καλύπτουν το ανοικτό σύνολο F έχουν τομή μη κενή, συμπίπτουν. Τα στοιχεία συνεπώς της οικογένειας αυτής, είναι όλα διακεκριμένα. Άρα και αριθμήσιμα το πλήθος.

Θεώρημα 8 (Heine – Borel). Αν $\Phi = (I_x)_{x \in R}$ ανοικτή κάλυψη του κλειστού και φραγμένου υποσυνόλου $F \subset \mathbb{R}$, μπορούμε, τότε, να διαλέξουμε απ' αυτήν, μία πεπερασμένη υποκάλυψη του F.
Απόδειξη. Από το προηγούμενο θεώρημα, έχουμε μίαν αριθμήσιμο ανοικτή κάλυψη του F, την $\Phi' = (I_n)_{n \in N}$. Θεωρούμε την ένωση $S_m = I_1 \cup \ldots \cup I_m$. Το σύνολο S_m είναι ανοικτό σύνολο, ως ένωση πεπερασμένου πλήθους ανοικτών συνόλων. Θα δείξουμε ότι, για κάποια τιμή του m, η ένωση αυτή, καλύπτει το F. Προς τούτο, θεωρούμε το σύνολο $Q_m = F - S_m$. Κάθε σύνολο Q_m είναι κλειστό σύνολο. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάποιον m, η τομή όλων των Q_m είναι κενή. Για την οικογένεια των Q_m παρατηρούμε ότι, είναι μία φθίνουσα οικογένεια από κλειστά και φραγμένα σύνολα. Η τομή, λοιπόν, όλων των στοιχείων της οικογένειας αυτής, είναι ο ορικός αριθμός $\xi \in F$. Τούτο όμως είναι αδύνατον, μιά και θάπρεπε επίσης να είναι $\xi \in \cup S_m$.

Δίδουμε άλλη μία απόδειξη του θεωρήματος αυτού.

Θεώρημα 8 (Heine – Borel). Για κάθε κλειστό και φραγμένο υποσύνολο $G \subset \mathbb{R}$, που καλύπτεται από την ένωση απείρου πλήθους ανοικτών διαστημάτων, αρκεί ένα πεπερασμένο πλήθος απ' αυτά, για να το καλύψει. Και αντιστρόφως.
Απόδειξη. Από υπόθεση, κάθε $x \in G$ καλύπτεται από κάποιο ανοικτό διάστημα δ_x. Αν, λοιπόν, το G είχε πεπερασμένο πλήθος σημεία, δεν θα είχαμε τίποτα να αποδείξουμε. Το G έστω, λοιπόν, ότι έχει άπειρο πλήθος από σημεία. Το G σαν φραγμένο σύνολο, είναι τέτοιο ώστε, $\inf G < G < \sup G$. Χωρίζουμε το $[\inf G, \sup G]$ στα δύο. Κάποιο από τα προκύπτοντα υποδιαστήματα, περιέχει απειρία σημείων του G, και καλύπτεται από άπειρο πλήθος ανοικτών διαστημάτων. Με την ίδια διαδικασία, κατασκευάζουμε μία φθίνουσα ακολουθία κλειστών διαστημάτων d_n, που περιέχουν άπειρα σημεία του G, και που για κάθε ένα απ' αυτά απαιτείται άπειρο πλήθος ανοικτών διαστημάτων για να το καλύψει. Τούτο όμως είναι αδύνατον, για G κλειστό σύνολο, μιά και η ακολουθία των κλειστών διαστημάτων που κατασκευάσαμε, έχει ορικό σημείο, το οποίο ανήκει στο G, και το οποίο καλύπτεται από ένα ανοικτό διάστημα, στο εσωτερικό του οποίου υπάρχουν, τελικά, όλα τα d_n. Αρκεί, λοιπόν, ένα και μόνον ανοικτό διάστημα για να καλύψει το d_n, αντίθετα με την υπόθεσή μας.

Ορισμός. ***Συμπαγές*** καλείται ένα υποσύνολο της πραγματικής ευθείας, που είναι κλειστό και φραγμένο.

Παρατήρηση. Ισοδύναμα, έχουμε τις προτάσεις:
(α) Το E είναι συμπαγές.
(β) Ισχύει το θεώρημα Bolzano – Weierstrass.
(γ) Ισχύει το Θεώρημα Heine Borel.

Έχουμε δείξη τις $(\alpha) \to (\beta)$, και $(\alpha) \to (\gamma)$. Θα δείξουμε και τις αντίστροφες προτάσεις.
Για την $(\gamma) \to (\alpha)$. Έστω ότι, το σύνολο S είναι τέτοιο ώστε, από μία κάλυψη ανοικτών διαστημάτων του, είναι δυνατόν να επιλέξουμε κάποια πεπερασμένη υποκάλυψη αυτού. Το S είναι, λοιπόν, φανερά φραγμένο σύνολο. Θα δείξουμε ότι είναι και κλειστό. Πράγματι, αν το S δεν είναι κλειστό, υπάρχει ορικό σημείο του y, που δεν ανήκει σ' αυτό. Για κάθε $x \in S$, θεωρούμε την $V_x(x, \rho_x)$, με $\rho_x < \frac{|x-y|}{2}$. Η οικογένεια όλων των περιοχών αυτών, αποτελεί, φανερά, μιά ανοικτή κάλυψη του S. Απ' αυτήν, επιλέγουμε μίαν πεπερασμένη υποκάλυψη, $\{V_1, \ldots, V_k\}$. Θέτουμε $\rho = \min\{\rho_1, \ldots, \rho_k\}$, και θεωρούμε την $V(y, \rho)$. Είναι, για κάθε δείκτη $1 \le i \le k$, $V(y,\rho) \cap V(x_i, \rho_i) = \varnothing$. Άρα το y δεν είναι ορικό σημείο του S.
Για την $(\beta) \to (\alpha)$. Αν το σύνολο S δεν είναι φραγμένο, τότε, για κάθε n, $|x_n| > n$.
Θεωρούμε το σύνολο $E = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Το άπειρο υποσύνολο αυτό του S, έχει από υπόθεση ένα τουλάχιστον σ.σ. y. Αλλά για n > $1+|y|$, $|x_n - y| \ge |x_n| - |y| > 1$, σχέση, που αντίκειται στο γεγονός ότι το y υπετέθη σ.σ. του E. Το S είναι, λοιπόν, φραγμένο. Θα δείξουμε ότι, είναι και κλειστό. Για το σκοπό αυτό, έστω x ένα σ.σ. του S. Εκλέγουμε τις περιοχές $V(x, 1/k)$, και από κάθε τέτοια περιοχή, εκλέγουμε το σημείο x_k, το οποίο ανήκει και στο S. Έστω E το σύνολο των σημείων αυτών. Το x είναι ορικό σημείο του συνόλου E. Από υπόθεση, γνωρίζουμε, ότι το E έχει ένα τουλάχιστον ορικό σημείο εν S. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε, ότι το E δεν έχει άλλο ορικό σημείο, πλην του x. Προς τούτο, έστω $y \ne x$ άλλο ορικό σημείο του E. Είναι, τότε, $|y-x| \le |y-x_k| + |x_k - x| < |y-x_k| + 1/k$. Ας λάβουμε το k τόσο μεγάλο ώστε το $\frac{1}{k} < \frac{|y-x|}{2}$. Τότε, για όλα τα $k_n > k$ θα είναι, και $|y-x|/2 < |y-x_{k_n}|$, και, άρα, $x_{k_n} \in V(y, |y-x|)$, οπότε το y δεν είναι ορικό σημείο του E.

Παρατήρηση. Τα πέρατα ενός υποσυνόλου της πραγματικής ευθείας, είναι σ.σ. του συνόλου αυτού. Άρα, κάθε συμπαγές υποσύνολο της πραγματικής ευθείας, περιέχει τα πέρατά του. Τούτο βέβαια σημαίνει, ότι κάθε κλειστό διάστημα αυτής, περιέχει τα άκρα του.

Βιβλιογραφία. 1) Π. Ζερβού, "Απειροστικός Λογισμός"
2) Walter Rudin "Principles of Mathematical Analysis"