VII. ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ.

1. Γενικά. Οι μετασχηματισμοί T που θα θεωρούμε, θα είναι όλοι γραμμικοί μετασχηματισμοί ενός διανυσματικού χώρου **V**(F) στον εαυτό του. dim**V** = n.

Θεωρούμε το πολυώνυμο α(u)∈F[u] βαθμού m:

$$\alpha(u)=\alpha_m u^m+\alpha_{m-1}u^{m-1}+\ \cdots\ +\alpha_1 u+\alpha_0 u^0$$

Στο πολυώνυμο αυτό, αντιστοιχίζουμε τον πίνακα:

$$\alpha(A)=\alpha_m A^m+\alpha_{m-1}A^{m-1}+\ \cdots\ +\alpha_1 A+\alpha_0 A^0$$

όπου $A^0=I$, και $A\in F^{n\times n}$. Παρατηρούμε ότι, αν αντί του πίνακα A λάβουμε πίνακα B όμοιο προς τον A, $B=PAP^{-1}$ (βλέπε σελ. 45), τότε, ο πίνακας που αντιστοιχεί στο πολυώνυμο α(u) είναι όμοιος προς τον πίνακα α(A). Πράγματι, είναι

$$\alpha(PAP^{-1})=\alpha_m(PAP^{-1})^m+\alpha_{m-1}(PAP^{-1})^{m-1}+\ \cdots\ +\alpha_1(PAP^{-1})+\alpha_0(PAP^{-1})^0 .$$

Όμως, $(PAP^{-1})^k=PA^kP^{-1}$. Αρα και $\alpha(PAP^{-1})=P\alpha(A)P^{-1}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ. 1) Ο Πολυωνυμικός μετασχηματισμός α(T) είναι καλά ορισμένος.

2) Ισχύει ότι, α(T)β(T) = β(T)α(T) $\left(=\sum_{k=0}^{m+n}\sum_{i+j=k}\alpha_i\beta_j T^k\right)$.

Ενας υπόχωρος **U** του **V** θα λέγεται ***αναλλοίωτος ως προς τον*** T, ανν T(**U**) ⊆ **U**. Χρησιμοποιούμε και την ορολογία "T-αναλλοίωτος υπόχωρος".

Εστω $\{u_1,u_2,\ \ldots\ ,u_k\}$ μία βάση του **U**. Επεκτείνουμε την βάση αυτή, σε μία βάση του **V**, δια της προσθήκης των n–k γραμμικά ανεξαρτήτων διανυσμάτων v_j. Επειδή, κάθε u∈**U** έχει εικόνα uT∈**U**, με uT = $\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\ \cdots\ +\lambda_ku_k+0v_{k+1}+\ \cdots\ +0v_n$, έπεται ότι, ο πίνακας A που αντιστοιχεί στον T ως προς αυτήν την βάση, έχει την μορφή:

$$A=\begin{pmatrix}\Lambda & 0\\ \Gamma & \Delta\end{pmatrix}$$

Ο περιορισμός T_U επί του **U** του γραμμικού μετασχηματισμού T, είναι ο καλά ορισμένος μετασχηματισμός $T_U:\mathbf{U}\to\mathbf{U}$, που δίδεται από την σχέση $T_U(u)=T(u)$, ∀u∈**U**.

Αν **V** = **U**⊕**W** και οι υπόχωροι **U**, **W** αναλλοίωτοι ως προς T, ο πίνακας του T ως προς μία βάση της μορφής $\{u_1,u_2,\ \ldots\ ,u_k\}\cup\{w_1,w_2,\ \ldots\ ,w_{k'}\}$, όπου u και w βάσεις των υποχώρων **U** και **W** αντίστοιχα, έχει την μορφή

$$A=\begin{pmatrix}\Lambda & 0\\ 0 & \Delta\end{pmatrix}.$$

Στην περίπτωση αυτή, αν T_U και T_W είναι οι περιορισμοί του T πάνω στους **U** και **W** αντίστοιχα, γράφουμε και T = $T_U\oplus T_W$.

Αντίστροφα, αν ο T έχει πίνακα A ως προς την βάση $\{\overline{u},\overline{w}\}$ τότε οι χώροι **U**, **W** είναι αναλλοίωτοι ως προς T.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1. Αν **U** αναλλοίωτος υπόχωρος του **V** ως προς T, τότε ο **U** είναι και αναλλοίωτος υπόχωρος του **V** ως προς κάθε πολυωνυμικό μετασχηματισμό f(T). Και αντίστροφα.
Απόδειξη. α) Εστω **U** αναλλοίωτος υπόχωρος του **V** ως προς T. Είναι τότε, ∀u∈**U**, λuT∈**U**. Αρα και $\lambda uT^2\in$**U**, και, επαγωγικά, $\lambda uT^k\in$**U**. Συνεπώς, από τις υποθέσεις μας ότι ο T γραμμική απεικόνιση και ο **U** υπόχωρος, uf(T)∈**U**.

β) Εστω **U** αναλλοίωτος υπόχωρος του **V** ως προς f(T). Είναι τότε, ∀u∈**U** uf(T)∈**U**. Τότε όμως, κάθε όρος $\lambda_k uT^k\in$**U**, άρα και ο όρος $\lambda_1 uT$, διότι άλλως ο T^k δεν θα οριζότανε, μιά και uT∉**U**.

2. Ελάχιστο πολυώνυμο. Κάθε φορά, που μας δίδεται ένας μετασχηματισμός T, υπάρχει κάποιο μη μηδενικό πολυώνυμο f(T), το οποίο να είναι ο μηδενικός μετασχηματισμός. Το ότι υπάρχει ένας τέτοιος μετασχηματισμός, αρκεί να θυμηθούμε ότι, ο χώρος των n×n πινάκων επί του F, αποτελεί διανυσματικό χώρο, με διάσταση n^2. Αρα, n^2+1 πίνακες μέσα σ' αυτόν τον χώρο, αποτελούν σύνολο γραμμικά εξαρτημένο. Λαβαίνουμε λοιπόν, τους n^2+1 πίνακες, $\{A^0, A^1, \ \dots \ , A^k\}$, k = n^2, και γράφουμε την γραμμική έκφραση, που τους συνδέει: $\alpha_k A^k + \alpha_{k-1}A^{k-1} + \ \cdots \ + \alpha_1 A + \alpha_0 A^0 = 0$. Στην έκφραση αυτή, αντιστοιχεί ένα πολυώνυμο f(u), τέτοιο ώστε, xf(T) = 0 $\forall x \in \mathbf{V}$. Το ερώτημα, που τίθεται είναι: Μήπως υπάρχει και άλλο τέτοιο πολυώνυμο βαθμού < k; Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό, παρατηρούμε ότι, το σύνολο J όλων αυτών των πολυωνύμων, αποτελεί κύριο ιδεώδες. Κατ' αρχήν είναι ιδεώδες, μια και, φανερά, αν f(u), g(u)∈J, τότε και, f(u)±g(u)∈J και ∀φ(u)∈F[u], φ(u)f(u)∈J. Το ιδεώδες αυτό, είναι κύριο, μια και όπως είδαμε, (βλέπε Θεώρημα, σελ. 83), η F[u] είναι περιοχή κυρίων ιδεωδών. Είναι λοιπόν, (g) = J. Στο ελαχίστου βαθμού αυτό πολυώνυμο, αντιστοιχούμε εκείνο το πολυώνυμο m(u), το οποίο προκύπτει από το g(u), αν διαιρέσουμε όλους τους συντελεστές και τον σταθερό του όρο, με τον συντελεστή του μεγιστοβαθμίου όρου του g(u), έτσι ώστε να προκύψει ένα monic πολυώνυμο. Το πολυώνυμο αυτό m(u) είναι τότε, μονοσήμαντα ορισμένο.

Ορισμός. Το πολυώνυμο αυτό, $m(u) = u_k + \alpha_{k-1}u^{k-1} + \ \cdots \ + \alpha_1 u + \alpha_0$ καλείται ελάχιστο πολύώνυμο του μετασχηματισμού T.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1. Το m(u) έχει τις ιδιότητες:

α) Ο συντελεστής του μεγιστοβαθμίου όρου, είναι η μονάς.
β) m(A) = 0, για κάθε πίνακα A, που αντιστοιχεί στον μετασχηματισμό T. Λέμε ότι, ο m(T) μηδενίζει τον **V**.
γ) Κάθε άλλο πολυώνυμο f(u) για το οποίο ισχύει f(A) = 0, είναι πολλαπλάσιο του m(u), δηλαδή m(u) | f(u).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Θεωρούμε τον μετασχηματισμό T "στροφή του επιπέδου", βλέπε σελ. 37, με θ = 90 μοίρες. Ο πίνακας του μετασχηματισμού αυτού, ως προς την κανονική βάση του R^2 είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Είναι δηλαδή, $A^2 = -I$. Αρα $A^2 + I = 0$. Το $m(u) = u^2 + 1$, m(u)∈ $\mathsf{R}[u]$, είναι, λοιπόν, το ελάχιστο πολυώνυμο του T.

Αν ο T ήταν "κατοπτρισμός του επιπέδου ως προς τον Ox άξονα", τότε,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ και } m(u) = u^2 - 1 = (u-1)(u+1).$$

Παρατηρούμε ότι, τώρα, το m(u) έχει αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Ομως, κανένας από τους πολυωνημικούς μετασχηματισμούς, που αντιστοιχούν στους παράγοντες αυτούς, (που είναι αντ. οι A–I και A+I), δεν μηδενίζει τον χώρο R^2.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2. Αν q(u) κάποιο πολυώνυμο, για το οποίο είναι $xq(T) = 0\ \forall x\in \mathbf{V}$, τότε θα είναι και $xq(T_U) = 0$, $\forall x\in\mathbf{U}$. Αν, λοιπόν, μ(u) το ελάχιστο πολυώνυμο του **U** ως προς T_U το $\mu(u) \mid q(u)$. Ιδιαίτερα, $\mu(u) \mid m(u)$, όπου m(u) το ελάχιστο πολυώνυμο του **V** ως προς T.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3. Θεωρούμε, τώρα, και το χώρο **V**/**W**. (Βλέπε σελ. 16). Η προβολή p του **V** επί του **V**/**W** είναι η απεικόνιση, που σε κάθε $x\in\mathbf{V}$, $p(x) = C_x$, όπου C_x η κλάση ισοδυναμίας που περιέχει το x mod**W** (βλέπε σελ. 24). Γράφουμε και, $xp = x+\mathbf{W}$.
Αν ο **W** T-αναλλοίωτος υπόχωρος του **V**, ορίζεται η ***επέκταση*** $\overline{T}: \mathbf{V}/\mathbf{W} \to \mathbf{V}/\mathbf{W}$ της T από την σχέση: $C_x\overline{T} = (x+\mathbf{W})T = xT+\mathbf{W}T = xT+\mathbf{W} = C_{xT}$. Η $\overline{T}$ είναι καλά ορισμένη

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "T"'] & \mathbf{V}/\mathbf{W} \arrow[d, "\overline{T}"] \\ \mathbf{V} \arrow[r, "p"'] & \mathbf{V}/\mathbf{W} \end{tikzcd}$$

Πράγματι, $C_{xT} \neq C_{yT} \Rightarrow C_x \neq C_y$ μιά και αλλιώς, θα είχαμε ότι $x = y$ mod**W**, δηλαδη, $y-x\in\mathbf{W}$ οπότε και $yT-xT\in\mathbf{W}$, δηλαδή, $C_{xT} = C_{yT}$. Ισχύει ότι: $x(p\overline{T}) = (xp)\overline{T} = (x+\mathbf{W})\overline{T}$

$$= xT+\mathbf{W} = (xT)p = x(Tp).$$

Είναι, λοιπόν, $p\overline{T} = Tp$, και γενικότερα, $p(\lambda\overline{T}^k) = (\lambda T^k)p$.
Συνεπώς, το ελάχιστο πολυώνυμο m(u) του **V** ως προς T, είναι πολλαπλάσιο, του ελαχίστου πολυωνύμου του χώρου **V**/**W** ως προς $\overline{T}$.
Πράγματι, είναι, $\forall x\in\mathbf{V}$, $0 = x(m(T))p = (xp)m(\overline{T})$. Αρα το $pm(\overline{T}) = pm(T)$, μηδενίζει τον **V**/**W**. Αρα είναι πολλαπλάσιο του ελαχίστου πολυωνύμου του **V**/**W**.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 4. Αν $g(u) \mid f(u)$, τότε και $\mathrm{Ker}g(T) \subseteq \mathrm{Ker}f(T)$. Πράγματι, $x\in\mathrm{Ker}g(T)$ σημαίνει ότι, $xg(T) = 0$ άρα, και $xg(T)q(T) = 0$, $\forall q(u)\in F[u]$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2. Εστω ότι έχουμε την περίπτωση, που $T = T_U \oplus T_W$. Αν m_U και m_W τα ελάχιστα πολυώνυμα των υπόχωρων **U** και **W**, τότε το ελάχιστο πολυώνυμο m του **V** είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (= ε.κ.π.) των m_U και m_W.
Απόδειξη. Κάθε ένα από τα m_U και m_W πρέπει να διαιρεί το m. Εστω g κάποιο πολλαπλάσιο αμφοτέρων των m_U και m_W. Τότε, $\mathbf{U}g(T) = 0$ και $\mathbf{W}g(T) = 0$. Εστω το τυχόν διάνυσμα $v\in\mathbf{V}$. Είναι, τότε, $v = u+w$ όπου $u\in\mathbf{U}$ και $w\in\mathbf{W}$. Θεωρούμε, την εικόνα του v διά της g(T). Είναι $vg(T) = (u+w)g(T) = ug(T)+wg(T) = 0$. Η g(T) μηδενίζει λοιπόν τον **V**. Αρα, το g(u) διαιρείται από το m(u).

ΠΡΟΤΑΣΗ 3. Εστω $f(u) = g(u)h(u)$ πολυώνυμα, τέτοια ώστε το f(T) μηδενίζει τον **V** και τα g και h είναι μεταξύ τους πρώτα. Τότε $\mathbf{V} = \mathbf{U}\oplus\mathbf{W}$ όπου $\mathbf{U} = \mathrm{Ker}g$ και $\mathbf{W} = \mathrm{Ker}h$.
Απόδειξη. Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι, οι **U** και **W** είναι αναλλοίωτοι υπόχωροι ως προς T, μιά και $\mathbf{U}h(T) = 0$, και $\{0\} \subseteq \mathbf{U}$. Ομοια γιά τον **W** (βλέπε πρόταση 1).
Από υπόθεση έχουμε, $rg+sh = 1$. Αρα και την $r(T)g(T)+s(T)h(T)$ = ο ταυτοτικός μετασχηματισμός. Για το τυχόν $v\in\mathbf{V}$ είναι $v = vr(T)g(T)+vs(T)h(T)$. Είναι,

$vr(T)g(T) = w\in\mathrm{Ker}h(T)$, μια και $vr(T)g(T)h(T) = vr(T)f(T) = 0$.

Ομοια, $vs(T)h(T) = u\in\mathrm{Ker}g(T)$. Αρα, $v = u+w$, άρα, είναι, $\mathbf{V} = \mathbf{U}+\mathbf{W}$.
Απομένει να δείξουμε ότι $\mathbf{U} \cap \mathbf{W} = \{0\}$. Προς τούτο, έστω $x\in\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$. Τότε είναι και $x = x(rg)+x(sh)$. Ομως, $x\in\mathbf{U}$. Αρα και $x(rg)+(xr)g = 0$. (Το $xr(u)\in\mathbf{U}$, μιά και **U** αναλλοίωτος ως προς T). Επίσης, $x\in\mathbf{W}$. Αρα, όμοια, και $x(sg) = (xs)g = 0$.

ΠΟΡΙΣΜΑ. α) Τα g και h, (αν είναι monic), είναι και τα ελάχιστα πολυώνυμα των υπόχωρων **U** και **W**. Είναι, $\dim\mathbf{V} = \dim\mathbf{U}+\dim\mathbf{W}$ = άθροισμα των βαθμών των αντιστοίχων ελαχίστων πολυωνύμων. β) Η έκφραση $\mathbf{V} = \mathbf{U}\oplus\mathbf{W}$ είναι μοναδική.

ΘΕΩΡΗΜΑ (της πρωταρχικής αναλύσεως). Με επαγωγή, αποδεικνύεται το Θεώρημα: Εστω ότι το ελάχιστο πολυώνυμο m(u) του **V** έχει την παρακάτω ανάλυση σε γινόμενο πρώτων (monic) παραγόντων:

$$m(u) = f_1(u)^{k_1} \cdots f_n(u)^{k_n}.$$

Τότε $\mathbf{V} = \mathbf{W}_1 \oplus \mathbf{W}_2 \oplus \ \ldots \ \oplus \mathbf{W}_n$, όπου $\mathbf{W}_i = \mathrm{Ker} f_i(T_i)^{k_i}$. Επιπλέον, κάθε $f_i(u)^{k_i}$ είναι το ελάχιστο πολυώνυμο ως προς τον περιορισμό $\overline{T_i}$ της T επί τον $\mathbf{W}_i$.

Απόδειξη. Η περίπτωση n = 1 είναι τετριμένη. Εστω, ότι το θεώρημα έχει αποδειχθεί γιά n–1. Λόγω της προτάσεως 3, γράφουμε τον $\mathbf{V} = \mathbf{W}_1 \oplus \mathbf{V}_1$, όπου, $\mathbf{W}_1 = \mathrm{Ker} f_1(T_1)^{k_1}$ και $\mathbf{V}_1 = \mathrm{Ker}\ \{f_2(\overline{T})^{k_2} \cdots f_n(\overline{T})^{k_n}\}$, όπου $\overline{T}$ ο περιορισμός της T επί του $\mathbf{V}_1$. Είναι όμως, $f_j(u) \mid f_2(u)^{k_2} \cdots f_n(u)^{k_n}$ γιά κάθε j = 2, . . . ,n.

Αρα και $\mathrm{Ker} f_j(T_j) \subset \mathrm{Ker}\ \{f_2(\overline{T})^{k_2} \cdots f_n(\overline{T})^{k_n}\}$. Αρα, $\mathrm{Ker} f_j(T_j) = \mathbf{W}_j$.

ΠΟΡΙΣΜΑ. $\dim\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{n} k_i$.

3. Κυκλικοί υπόχωροι. Θεωρούμε κάποιο στοιχείο $w \in \mathbf{V}$, το οποίο και στην συνέχεια, το διατηρούμε σταθερό. Το σύνολο $\{wT^0, wT^1, \ \ldots \ , wT^k\}$ αποτελεί φανερά γραμμικώς εξαρτημένο σύνολο. Υπάρχει, συνεπώς, εκθέτης $k \le n$ τέτοιος ώστε,

$$wT^k = w(\alpha_{k-1}T^{k-1} + \ \cdots \ + \alpha_1 T + \alpha_0 T^0) \qquad (1).$$

Ο k λαβαίνεται βέβαια, ο μικρότερος εκθέτης, για τον οποίο ισχύει η (1). Το πολυώνυμο $\mu_{\mathbf{W}}(u) = u^k - (\alpha_{k-1}u^{k-1} + \ \cdots \ + \alpha_1 u + \alpha_0 u^0)$ καλείται ***ελάχιστο πολυώνυμο*** του T ως προς το στοιχείο w. Ο χώρος $\mathbf{K}_w = L\{wT^0, wT^1, \ \ldots \ , wT^{k-1}\}$ καλείται κυκλικός υπόχωρος του **V** παραγόμενος από το w. Γράφουμε και **K**, μ(u) αντί των $\mathbf{K}_w$, $\mu_w(u)$, αν γνωρίζουμε περι ποίου w πρόκειται. Ο **K** είναι ο μεγίστης διαστάσεως υπόχωρος του **V** που έχει την μορφή $L\{wT^0, wT^1, \ \ldots \ , wT^{k-1}\}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 5. Είναι, dim**K** = k, ο βαθμός του ελαχίστου πολυωνύμου $\mu_w(u)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4. Ο υπόχωρος $\mathbf{K} = L\{wT^0, wT^1, \ \ldots \ , wT^{k-1}\}$, είναι T-αναλλοίωτος υπόχωρος του **V**.

Απόδειξη. Είναι, $\forall x \in \mathbf{K}$, $x = \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j wT^j$. Αρα, και $xT = \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j wT^{j+1}$. Ομως, κάθε όρος του αθροίσματος αυτού ανήκει στον **K**. Αρα και $xT \in \mathbf{K}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5. Ο μετασχηματισμός $\mu_w(T)$ μηδενίζει τον κυκλικό υπόχωρο **K**.

Απόδειξη. Εξ' ορισμού, $w\mu(T) = wT^k - \alpha_0 wT^0 - \alpha_1 wT^1 - \ \ldots \ - \alpha_{k-1} wT^{k-1} = 0$ (σχέση (1)).

Εστω, τώρα, τυχόν $x \in \mathbf{K}$. Είναι τότε, $x = \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j wT^j$. Αρα και

$$\begin{aligned} x\mu(T) &= x(T^k - \alpha_0 T^0 - \alpha_1 T^1 - \ \ldots \ - \alpha_{k-1}T^{k-1}) = \\ &\sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j wT^j \ (T^k - \alpha_0 T^0 - \alpha_1 T^1 - \ \ldots \ - \alpha_{k-1}T^{k-1}) = \\ &w(T^k - \alpha_0 T^0 - \alpha_1 T^1 - \ \ldots \ - \alpha_{k-1}T^{k-1}) \ \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j T^j = 0 \end{aligned}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 6. $\mathrm{Ker}\mu(T_{\mathbf{K}}) = \mathbf{K}$, $T_{\mathbf{K}}$ ο περιορισμός του T επί τον **K**.

Απόδειξη. i) K $\subseteq$ Kerμ(T_K). Εστω το x$\in$**K**. Θα πρέπει, xμ(T_K) = 0. Τούτο όμως ισχύει, μια και xμ(T_K) = xμ(T) = 0 (λόγω της προηγούμενης πρότασης).

ii) Kerμ(T_K) $\subseteq$ **K**. Εστω x$\in$Kerμ(T_K). Είναι τότε,

$$x(T^k - \alpha_0 T^0 - \alpha_1 T^1 - \ \dots \ - \alpha_{k-1} T^{k-1}) = 0.$$

Δηλαδή, xT^k = γραμμική σχέση των xT^j. Για τον περιορισμό όμως T_K του μετασχηματισμού T επί το **K** κάθε xT^j εκφράζεται γραμμικά από τα wT^j. Αρα και το xT^k εκφράζεται γραμμικά από τα wT^j. Αρα και το x εκφράζεται γραμμικά από τα wT^j, μια και ο χώρος αναλλοίωτος ως προς T. Αρα x$\in$**K**.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. 1) Το ελάχιστο πολυώνυμο m(u) του T_K είναι το μ(u).

2) Το σύνολο των πολυωνύμων g(u), τα οποία παρέχουν πολυωνυμικό μετασχηματισμό g(T), ο οποίος μηδενίζει τον **K**, αποτελεί κύριο ιδεώδες I = (μ(u)). Είναι δηλαδή, μ(u)|g(u), $\forall$g(T) που μηδενίζει τον **K**.

3) Το ελάχιστο πολυώνυμο m(u) του **V**, διαιρείται από κάθε πολυώνυμο $\mu_x(u)$, x$\in$**V**.

4) Αν **V** = $L\{e_1, e_2, \ \dots \ , e_n\}$, τότε το m(u) είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των πολυωνύμων $\mu_e(u)$.

5) Ο **K**, είναι ο μεγίστης διαστάσεως κυκλικός υπόχωρος του **V**, που παράγεται από το w. Αν δηλαδή, **K** = $L\{w, wT, \ \dots \ , wT^{k-1}\}$, τότε δεν υπάρχει άλλος υπόχωρος **K΄** του **V**, με **K΄** $\supset$ **K**, και ο οποίος να παράγεται και αυτός από το w.

6) Αν μ_w και μ_v με $(\mu_w, \mu_v) = 1$, είναι τα ελάχιστα πολυώνυμα των κυκλικών υπόχωρων $\mathbf{K}_w$ και $\mathbf{K}_v$ που παράγονται από τα διανύσματα w και v αντίστοιχα, τότε, $\mathbf{K}_v \cap \mathbf{K}_w = \{0\}$. Διότι σε αντίθετη περίπτωση, ο χώρος $\mathbf{K}_v \cap \mathbf{K}_w$ θα είχε διάσταση > 0, οπότε και το ελάχιστο πολυώνυμο αυτού δεν θα ήταν μηδενικού βαθμού. Το πολυώνυμο αυτό, θα διαιρούσε αμφότερα τα μ_w και μ_v, αντίθετα με την υπόθεσή μας, ότι αυτά είναι πρώτα προς άλληλα.

7) Αν x = w+v, τότε το x παράγει τον υπόχωρο $\mathbf{K}_x = \mathbf{K}_v \oplus \mathbf{K}_w$ με ελάχιστο πολυώνυμο το γινόμενο $\mu_w \mu_v$, που είναι το ε.κ.π. των μ_w και μ_v.

Η έκφραση $\mathbf{K}_x = \mathbf{K}_v \oplus \mathbf{K}_w$ είναι μοναδική.

8) Αν τα μ_w και μ_v δεν είναι μεταξύ τους πρώτα, τότε $\mathbf{K}_v \cap \mathbf{K}_w \neq \{0\}$ και αντί της $\mathbf{K}_x = \mathbf{K}_v \oplus \mathbf{K}_w$ έχουμε την $\mathbf{K}_x = \mathbf{K}_v + \mathbf{K}_w$.

9) Επαγωγικά, τα πορίσματα 6) και 7) ισχύουν γιά n κυκλικούς υπόχωρους.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 6. Εδείξαμε ότι, αν ο $\mathbf{K}_w$ T-αναλλοίωτος κυκλικός υπόχωρος παραγόμενος από το w, τότε το ελάχιστο πολυώνυμο μ_w (u) συμπίπτει με το m(u).

Ισχύει όμως και το αντίστροφο: Αν ο υπόχωρος **K** έχει ελάχιστο πολυώνυμο το m(u), τότε, υπάρχει w$\in$**K**, τέτοιο ώστε, ο **K** να παράγεται απ' αυτό.

Να είναι δηλαδή, **K** = $L\{w, wT, \ \dots \ , wT^{k-1}\}$, όπου k = dim**K**. Πράγματι, αν θεωρήσουμε μία βάση $\{e_1, e_2, \ \dots \ , e_k\}$ του **K**, τότε, έχουμε ότι, $e_i m(T) = 0$. Ο **K** είναι συνεπώς T-αναλλοίωτος. Κατά συνέπεια $e_i T^j \in \mathbf{K}$ γιά κάθε τιμή του j. Υπάρχουν συνεπώς, k γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα της μορφής αυτής, που παράγουν τον **K**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Θεωρούμε τον μετασχηματισμό T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με πίνακα ως προς την κανονική βάση, τον A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι, $A^2 = A$. Εχουμε, λοιπόν, τον πολυωνυμικό μετασχηματισμό $m(T) = T^2 - T$, ο οποίος μηδενίζει τον $\mathbb{R}^3$. Το $m(u) = u^2 - u = u(u-1)$ είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του T, μιά και κανένας από τους παράγοντες u και u–1 δεν παρέχει μετασχηματισμό, που να μηδενίζει ολόκληρο τον χώρο.

Υπολογίζουμε τους υπόχωρους $\mathbf{K}_1$ = KerT και $\mathbf{K}_2$ = Ker(T– T^0). Γιά τον KerT είναι: $\forall x \in \mathbf{K}_1$, xT = 0.

Αρα και $(x_1, x_2, x_3)T = x_1e_1T + x_2e_2T + x_3e_3T = x_1(3,-2,1) + x_2(2,-1,1) + x_3(-2,2,0) = 0$.

Οδηγούμεθα, λοιπόν, στο σύστημα,

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 \quad\quad &= 0. \end{aligned}$$

Αν λάβουμε $x_1 = -x_2 = 2$, $x_3 = 1$, ο ζητούμενος υπόχωρος είναι ο $\mathbf{K}_1 = L\{(2,-2,1)\}$ με $\dim\mathbf{K}_1 = 1$. Γιά τον $\mathbf{K}_2$ έχουμε, $\forall x \in \mathbf{K}_2$, $x(T - T^0) = xT - x = 0$. Η σχέση αυτή δίδει το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Είναι, λοιπόν, $\mathbf{K}_2 = L\{(1,0,1), (1,1,2)\}$ με $\dim\mathbf{K}_2 = 2$.

Εκφράζουμε τώρα, τον μετασχηματισμό T στην βάση B = {(2,–2,1), (1,0,1), (1,1,2)} του $\mathbb{R}^3$. Είναι:

$$\begin{aligned} (2,-2,1)T &= 2e_1T - 2e_2T + 1e_3T \\ &= 2(3,-2,1) - 2(2,-1,1) + (-2,2,0) = (0,0,0) \\ &= 0(2,-2,1) + 0(1,0,1) + 0(1,1,2). \end{aligned}$$

(Το γεγονός ότι, (2,–2,1)T = 0, το γνωρίζαμε, μιά και το $(2,-2,1) \in \mathrm{KerT}_{\mathbf{K}_1}$)

$$\begin{aligned} (1,0,1)T &= 1e_1T + 0e_2T + 1e_3T \\ &= (3,-2,1) + (-2,2,0) = (1,0,1) \end{aligned}$$

Εκφράζουμε το (1,0,1) στην βάση μας:

(1,0,1) = α(2,–2,1)+β(1,0,1)+γ(1,1,2). Φανερά, είναι, α = 0, β = 1, γ = 0.

Αρα, (1,0,1)T = 0(2,–2,1)+1(1,0,1)+0(1,1,2).

Τέλος $(1,1,2)T = 1e_1T + 1e_2T + 2e_3T = (3,-2,1) + (2,-1,1) + 2(-2,2,0) = (1,1,2)$.

Εκφράζουμε, το (1,1,2) στην βάση B:

(1,1,2) = α(2,–2,1)+β(1,0,1)+γ(1,1,2). Φανερά είναι α = 0, β = 0, γ = 1.

Ο πίνακας A λοιπόν, του μετασχηματισμού T στη βάση B, είναι ο πίνακας,

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Οι σημειούμενοι υποπίνακες, είναι οι πίνακες που αντιστοιχούν στους περιορισμούς του μετασχηματισμού T, αντιστοίχως, στους υποχώρους $\mathbf{K}_1$ και $\mathbf{K}_2$ στην βάση B του χώρου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Θεωρούμε τον $\mathbb{R}^3$ και τον μετασχηματισμό T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με πίνακα ως προς την κανονική βάση, τον A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ζητάμε να βρούμε το ελάχιστο πολυώνυμο του T ως προς το w = (1,0,0). Υπολογίζουμε τα wT = (3,–1,3) = $3e_1T + 1e_2T + 3e_3T$ και $wT^2 = 3e_1T - 1e_2T + 3e_3T$ = (5,–2,6).

Ομως, (5,–2,6) = –(1,0,0)+2(3,–1,3) ή $wT^2 = 2wT - wT^0$.

Αρα, το ελάχιστο πολυώνυμο του T ως προς w, είναι το $\mu(u) = u^2 - 2u + 1 = (u-1)^2$.

Ο κυκλικός υπόχωρος που παράγει το w, είναι ο **K** = L{ wT^0 ,wT} = L{(1,0,0), (3,–1,3)} με dim**K** = 2. Παρατηρούμε ότι, ο πίνακας του $(T-1)^2$ είναι ο μηδενικός πίνακας. Ο $(T-1)^2$ μηδενίζει ολόκληρο τον χώρο R^3. Είναι, λοιπόν, μ(u) = m(u). Το γεγονός αυτό, δεν έρχεται σε αντίφαση με την παρατήρηση 5, μιά και το w δεν παράγει τον R^3.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Θεωρούμε τον R^4 και τον μετασχηματισμό T: $\mathsf{R}^4 \to \mathsf{R}^4$ με πίνακα ως προς την κανονική βάση, τον A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Εκλέγουμε και τα διανύσματα,
w_1 = (1,–1,–1,0), w_2 = (0,0,1,0), w_3 = (1,0,–1,–1), w_4 = (0,0,0,1).
Υπολογίζουμε τους κυκλικούς υποχώρους, που παράγονται απ' τα w_i.

Είναι, w_1T^0 = (1,–1,–1,0)

w_1T^1 = (1,–1,–1,0)T = (1,–2,0,0)

w_1T^2 = (1,–2,0,0)T = (1,–3,1,0). Παρατηρούμε ότι, $w_1T^2 = 2w_1T - w_1T^0$. Το w_1 παράγει συνεπώς, έναν κυκλικό υπόχωρο, $\mathbf{K}_1$ = L{ w_1, w_1T } με dim$\mathbf{K}_1$ = 2 και ελάχιστο πολυώνυμο $\mu_1(u) = u^2 - 2u + 1 = (u-1)^2$.

Είναι, w_2T^0 = (0,0,1,0)

w_2T^1 = (0,0,1,0)T = (1,0,0,–1)

w_2T^2 = (1,0,0,–1)T = (3,0,–2,–3). Παρατηρούμε ότι, $w_2T^2 = 3w_2T^1 - 2w_2T^0$. Το w_2 παράγει συνεπώς ένα κυκλικό υπόχωρο $\mathbf{K}_2$= L{ w_2, w_2T } με dim$\mathbf{K}_2$= 2 και ελάχιστο πολυώνυμο $\mu_2(u) = u^2 - 3u + 2 = (u-1)(u-2)$.

Είναι, w_3T^0 = (1,0,–1,–1).

w_3T^1 = (1,0,–1,–1)T = 2(1,0,–1,–1). Παρατηρούμε ότι, $w_3T = 2w_3$. Το w_3 παράγει ένα κυκλικό υπόχωρο $\mathbf{K}_3$= L{ w_3 } με dim$\mathbf{K}_3$= 1 και ελάχιστο πολυώνυμο $\mu_3(u) = u - 2$.

Είναι, w_4T^0 = (0,0,0,1)

w_4T^1 = (0,–1,1,1)

w_4T^2 = (0,–1,1,1)T = (0,–2,2,1). Παρατηρούμε ότι, $w_4T^2 = 2w_4T - w_4$. Το w_4 παράγει συνεπώς έναν κυκλικό υπόχωρο, $\mathbf{K}_4$ = L{w_4,w_4T} με dim$\mathbf{K}_4$= 2 και ελάχιστο πολυώνυμο $\mu_4(u) = u^2 - 2u + 1 = (u-1)^2$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ. α) Οι κυκλικοί υπόχωροι $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3$, και $\mathbf{K}_4$ αποκλείεται να έχουν ευθύ άθροισμα τον R^4. Δεν έχουν λοιπόν, κενή τομή.

β) Κανένα από τα ελάχιστα πολυώνυμα μ_i δεν μηδενίζει ολόκληρο τον χώρο.

γ) Αν λάβουμε το διάνυσμα $w = w_1 + w_3 = (2,-1,-1,-1)$ [αντ. $w = w_4 + w_3 = (1,0,-1,0)$] θα έχουμε,

$wT^0 = (2,-1,-2,-1)$
$wT = (3,-2,-2,-2)$
$wT^2 = (5,-3,-3,-4)$
$wT^3 = (9,-4,-6,-8) = 4\,wT^2 - 5wT + 2w$. Υπολογίζουμε, λοιπόν,

$$\mu_w(u) = u^3 - 4u^2 + 5u - 2 = (u-1)^2(u-2) = m(u)$$

[Αντίστοιχα, γιά το $w = w_4 + w_3$ είναι,

$wT^0 = (1,0,-1,0)$
$wT = (2,-1,-1,-1)$
$wT^2 = (4,-2,-2,-3)$
$wT^3 = (8,-3,-5,-7) = 4\,wT^2 - 5wT + 2w$. Υπολογίζουμε, λοιπόν,

$$\mu_w(u) = u^3 - 4u^2 + 5u - 2 = (u-1)^2(u-2) = m(u)]$$

δ) Το ε.κ.π. αυτών, είναι το $m(u) = (u-1)^2(u-2)$, το οποίο και είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του R^4, μιά και ο μετασχηματισμός m(T) μηδενίζει τον χώρο. Παρατηρούμε ότι, ο βαθμός του ελαχίστου πολυωνύμου είναι < από την διάσταση του χώρου. Ο R^4 δεν είναι λοιπόν, το ευθύ άθροισμα των ευρεθέντων κυκλικών υποχώρων. Θα πρέπει να υπάρχει ένας ακόμα κυκλικός υπόχωρος, με διάσταση 1 και με ελάχιστο πολυώνυμο, ή το u–1 ή το u–2.

4. Συνοδεύων πίνακας. Κανονική μορφή πίνακος. Εστω, τώρα, ότι ζητάμε να βρούμε τον πίνακα του περιορισμού $T_{\mathbf{K}}$ του T επί τον **K**. Προς τούτο, λαβαίνουμε την βάση $\{w, wT, \ldots, wT^{k-1}\}$ του **K**, και λαβαίνουμε τις εικόνες των στοιχείων της. Είναι:

$$(wT^0)T = wT = 0wT^0 + 1wT^1 + 0wT^2 + \ldots + 0wT^{k-1}$$
$$(wT^1)T = wT^2 = 0wT^0 + 0wT^1 + 1wT^2 + \ldots + 0wT^{k-1}$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$(wT^{k-1})T = wT^k = \alpha_0 wT^0 + \alpha_1 wT^1 + \alpha_2 wT^2 + \ldots + \alpha_{k-1} wT^{k-1} \qquad \text{(λόγω (1)).}$$

Ο ζητούμενος πίνακας είναι συνεπώς ο k×k πίνακας,

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{k-1} \end{pmatrix}$$

Ο C καλείται ***συνοδός πίνακας*** (companion matrix) του μετασχηματισμού T. Στην περίπτωση, που ο χώρος μας $\mathbf{V} = \mathbf{K}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbf{K}_r$, ο πίνακας του μετασχηματισμού T, εκφρασμένος σε μία βάση, που αποτελείται από τα στοιχεία των βάσεων των $\mathbf{K}_i$ λαβαίνει την μορφή

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & \ldots & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & 0 & \ldots & C_r \end{pmatrix}$$

όπου C_i ο συνοδός πίνακας του $\mathbf{K}_i$. Ο C είναι βέβαια όμοιος προς τον πίνακα A του T ως προς την αρχική βάση του χώρου.

Ορισμός. Ο πίνακας C καλείται ***ρητή κανονική μορφή*** (rational canonical form) ή κανονική μορφή Jordan (Jordan canonical form) ή κανονικός πίνακας του Jordan (Jordan canonical matrix), και λαβαίνεται ως εκπρόσωπος της ισοδυνάμου τάξεως των ομοίων πινάκων, που αντιστοιχούν στον μετασχηματισμό T.
Τα πολυώνυμα $f_i(u)^{k_i}$ εις τα οποία αναλύεται το ελάχιστο πολυώνυμο του μετασχηματισμού T, καλούνται ***αναλλοίωτοι παράγοντες***(invariant factors) ως προς T.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 7. Επειδή η ανάλυση του **V** σε ευθύ άθροισμα κυκλικών υπόχωρων είναι μοναδική, και κάθε κυκλικός υπόχωρος έχει μοναδικό ελάχιστο πολυώνυμο, έπεται ότι, και ο C είναι μοναδικός (βλέπε πόρισμα 7), σελ. 88). Η σειρά βέβαια των C_i δεν είναι καθορισμένη. Συνεπώς, δύο πίνακες (επί του ιδίου σώματος F) είναι όμοιοι, ανν έχουν την ίδια ρητή κανονική μορφή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 (συνέχεια). Οπως είδαμε το ελάχιστο πολυώνυμο m(u) του T είναι το $m(u)=(u-1)^2(u-2)$. Στο πολυώνυμο αυτό, αντιστοιχεί κάποιος κυκλικός υπόχωρος $\mathbf{K}_w$ με $\dim\mathbf{K}_w$ = 3. Ενας τέτοιος υπόχωρος, παράγεται, όπως εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε, και από το e = (1,0,0,0).

Το ερώτημα που τίθεται είναι: Με ποιά μέθοδο μπορούμε να βρούμε ένα διάνυσμα, που να παράγει μεγίστης διαστάσεως κυκλικό υπόχωρο του **V**; Προς τούτο, εκτελούμε τα βήματα:
α) Εκλέγουμε μία βάση $\{e_1,e_2, \ \dots \ ,e_k\}$ του χώρου **V**.
β) Υπολογίζουμε τα σχετικά ελάχιστα πολυώνυμα $\mu_i(u)=p_1(u)^{k_{1i}}p_2(u)^{k_{2i}}\dots p_\lambda(u)^{k_{\lambda i}}$, ως προς τα στοιχεία της εκλεγήσης βάσης.
γ) Γιά j = 1, . . . ,λ, έστω k_κ ο μεγαλύτερος εκθέτης, που βρίσκεται στο σύνολο $\{k_{1j},k_{2j}, \ \dots \ ,k_{\lambda j}\}$ και w_κ το διάνυσμα, που έχει σχετικό ελάχιστο πολυώνυμο το $p_\kappa(u)^{k_\kappa}$.

Αν π.χ. $k_1=k_{11}$, τότε, $w_1=e_1p_2(T)^{k_{12}}p_3(T)^{k_{13}}\dots p_\lambda(T)^{k_{1\lambda}}$.

δ) Το διάνυσμα $w=w_1+w_2+ \ \dots \ +w_\lambda\}$ έχει σχετικό ελάχιστο πολυώνυμο το $\mu_w(u)=p_1(u)^{k_1}p_2(u)^{k_2}\dots p_\lambda(u)^{k_\lambda}$ και παράγει κυκλικό υπόχωρο μεγίστης διαστάσεως.

Στο παράδειγμα 4, έχουμε:
α) Εκλογή βάσεως, την e_1 = (1,–1,–1,0), e_2 = (0,0,1,0), e_3 = (1,0,–1,–1), e_4 = (0,0,0,1).
β) Σχετικά ελάχιστα πολυώνυμα, τα

$$\mu_1=(u-1)^2,\ \mu_2=(u-1)(u-2),\ \mu_3=(u-2),\ \mu_4=(u-1)^2$$

γ) Θεωρούμε τα αντίστοιχα σύνολα των εκθετών
{2, 0}, {1, 1}, {0, 1} και {2, 0}. Οι μεγαλύτεροι εκθέτες, που βρίσκονται στα σύνολα {2, 1, 0, 2} και {0, 1, 1, 0} είναι οι 2 και 1. Εχουμε, λοιπόν το $(u-1)^2(u-2)$, που είναι το ε.κ.π. των μ_i. (Η διαδικασία γ), μας παρέχει ακριβώς το ε.κ.π. των μ_i).
Στο $(u-1)^2$ αντιστοιχεί το $w_1=e_1$, και στο (u–2) το $w_3=e_3$.
δ) Το w = w_1+w_3 παρέχει μέγιστο κυκλικό υπόχωρο, εδώ, με διάσταση 3.

Γιά να έχουμε την έκφραση $\mathsf{R}^4=\mathbf{K}_w\oplus\mathbf{K}_x$, θα πρέπει να βρούμε ένα διάνυσμα x του χώρου, το οποίο να παράγει κάποιον μονοδιάστατο υπόχωρο, αναλλοίωτο ως προς T. Θα πρέπει δηλαδή, να είναι $\forall x\in\mathbf{K}_x$, xT = λx. Εξ' άλλου, επειδή το ελάχιστο πολυώνυμο του περιορισμού του T πάνω στον $\mathbf{K}_x$ διαιρεί το m(u) και είναι πρωτοβάθμιο, θα είναι, όπως παρατηρήσαμε, ή το (u–1) ή το (u–2). Τέλος, το $x\notin\mathbf{K}_w$. Εστω, λοιπόν, x = (x_1,x_2,x_3,x_4).
Είναι, xT = λx, ή

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \lambda(x_1, x_2, x_3, x_4),$$

απ' όπου λαβαίνουμε το σύστημα,

$$\begin{aligned} &(3-\lambda)x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 0x_4 = 0 \\ &1x_1 + (1-\lambda)x_2 + 0x_3 - 1x_4 = 0 \\ &1x_1 - 1x_2 - \lambda x_3 + 1x_4 = 0 \\ &2x_1 - 1x_2 - 1x_3 + (1-\lambda)x_4 = 0 \end{aligned}$$

Το ομογενές αυτό σύστημα, έχει λύση μη μηδενική, ανν η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι ίση με μηδέν. Είναι, $\Delta = (\lambda-1)^3(\lambda-2) = 0$.

Επειδή ο μέγιστος κυκλικός υπόχωρος $\mathbf{K}_w$ έχει ελάχιστο το $(u-1)^2(u-2) = 0$, το u–1 πρέπει να αντιστοιχεί στο διάνυσμα, που θα μου δίδει τον $\mathbf{K}_x$. Πράγματι, γιά λ = 1, το προκύπτον σύστημα έχει λύση την κ(0,1,–1,0). Είναι, λοιπόν, $\mathbf{K}_x = L\{(0,1,-1,0)\}$.

Η ρητή κανονική μορφή του πίνακα A είναι, λοιπόν, η

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

5. Κλασσική μορφή. Αν τώρα, στο σώμα F[u], το μ_w αναλύεται και αυτό σε πρώτους παράγοντες $\mu_w(u) = \mu_1\mu_2 \ \dots \ \mu_n$ όπου $\mu_i = p_i^{k_i}$, είναι πρώτα προς άλληλα, τότε, ο συνοδός πίνακας που αντιστοιχεί στον μετασχηματισμό $\mu_i(T_{\mathbf{K}_i})$, λαβαίνει μιά ακόμα πιό απλή έκφραση. Γιά να την βρούμε αυτήν, ας υποθέσουμε ότι,

$$p_i(u) = u^q - \alpha_{q-1}u^{q-1} - \alpha_{q-2}u^{q-2} - \ \dots \ - \alpha_0,$$

οπότε ο βαθμός του πολυωνύμου $\mu_i(u)$ είναι, $k_i q$ Θεωρούμε τα διανύσματα:

$$\begin{aligned} &e_1 = xp_i(T)^{k_i-1}, \quad e_2 = xp_i(T)^{k_i-1}T, \quad \dots, \quad e_q = xp_i(T)^{k_i-1}T^{q-1} \\ &e_{q+1} = xp_i(T)^{k_i-2}, \quad e_{q+2} = xp_i(T)^{k_i-2}T, \quad \dots, \quad e_{2q} = xp_i(T)^{k_i-2}T^{q-1} \\ &\dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ &e_{(k_i-1)q+1} = x, \qquad e_{(k_i-1)q+2} = xT, \qquad \dots, \quad e_{k_i q} = xT^{q-1}. \end{aligned}$$

Τα διανύσματα αυτά e, που είναι της μορφής eφ(T), όπου φ(u) πολυώνυμο βαθμού < k_iq, θα τα χρησιμοποιήσουμε ως βάση γιά τον $\mathbf{K}_i$. Πράγματι, αυτά είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και παράγουν τον χώρο, μιά και: α) Δεν υπάρχουν δύο ομοιόβαθμα φ(u), άρα δεν έχουμε συγγραμμικά e. β) Αν είχαμε κάποια μη μηδενική γραμμική έκφραση ανάμεσα στα e, τότε θα είχαμε και πολυώνυμο φ(u) βαθμού < k_iq, τέτοιο ώστε eφ(T) = 0, πράγμα, που αντίκειται στο γεγονός ότι ο βαθμός k_iq είναι ο ελάχιστος, γιά τον οποίο, έχουμε eμ(T) = 0. γ) Τέλος, το πλήθος αυτών, είναι k_iq, δηλαδή, όση ακριβώς η διάσταση του χώρου.

Γιά να βρούμε την μορφή του πίνακα A στην βάση αυτή, παρατηρούμε ότι,

$$\begin{aligned} &e_1 T = e_2 \\ &e_2 T = e_3 \\ &\dots \quad \dots \end{aligned}$$

$$e_{q-1}T = e_q$$
$$e_q = xp_i(T)^{k_i-1}T^q = xp_i(T)^{k_i-1}\{T^q - p_i(T)\}$$
$$= xp_i(T)^{k_i-1}\{\alpha_0T^0 + \alpha_1T^1 + \ldots + \alpha_{q-1}T^{q-1}\}$$
$$= \alpha_0e_1 + \alpha_1e_2 + \ldots + \alpha_{q-1}e_q$$
$$e_{q+1}T = e_{q+2}$$
$$e_{q+2}T = e_{q+3}$$
$$\ldots \quad \ldots$$
$$e_{2q-1}T = e_{2q}$$
$$e_{2q} = xp_i(T)^{k_i-2}T^q = xp_i(T)^{k_i-2}\{T^q - p_i(T)\} + xp_i(T)^{k_i-1}$$
$$= \alpha_0e_{q+1} + \alpha_1e_{q+2} + \ldots + \alpha_{q-1}e_{2q} + e_1$$
$$\ldots \quad \ldots$$
$$e_{(k_i-1)q+1}T = e_{(k_i-1)q+2}$$
$$\ldots \quad \ldots$$
$$e_{(k_i-1)q+q-1}T = e_{k_iq}$$
$$e_{k_iq} = \alpha_0e_{(k_i-1)q+1} + \alpha_1e_{(k_i-1)q+2} + \cdots + \alpha_{q-1}e_{k_iq} + \alpha_0e_{(k_i-1)q+1} + e_{(k_i-2)q+1}$$

Αρα, ο πίνακας A λαβαίνει την μορφή

$$\begin{pmatrix} C(\mu_1) & M & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & C(\mu_2) & M & \ldots & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & C(\mu_{k-1}) & M \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & C(\mu_k) \end{pmatrix}$$

όπου $C(\mu_i)$ ο συνοδός πίνακας του $\mu_i = p_i^{k_i}$ και M ένας k×k πίνακας, που έχει στην κάτω αριστερή γωνία το 1 και όλα τ' άλλα στοιχεία του ίσα με μηδέν.
Προσοχή ! Την προηγούμενη κλασσική μορφή, την γράφουν και ως εξής, (εφ' όσον λαβαίνουν ως εικόνα του x το T(x)):

$$\begin{pmatrix} C^t(\mu_1) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ N & C^t(\mu_2) & 0 & \ldots & 0 \\ & N & \ddots & & \\ & & & C^t(\mu_{k-1}) & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & N & C^t(\mu_k) \end{pmatrix}$$

όπου C^t ο ανάστροφος πίνακας του C, και ο N ένας k×k πίνακας, που έχει στην άνω δεξιά γωνία το 1 και όλα τ' άλλα στοιχεία του ίσα με μηδέν.

Ορισμός. Η παραπάνω μορφή, καλείται ***κλασσική μορφή***. Τα πολυώνυμα $\mu_i = p_i^{k_i}$ καλούνται στοιχειώδεις διαιρέτες (elementary divisors) του m(u).

Ιδιαίτερα απλή μορφή λαβαίνει ο πίνακας $C(\mu_i)$, όταν βρισκόμαστε σε ένα σώμα F ***αλγεβρικά κλειστό***. Στην περίπτωση αυτή, οι στοιχειώδεις διαιρέτες είναι πρωτοβάθμια πολυώνυμα, οπότε, αν π.χ. $\mu = (x-\lambda)^k$, είναι και,

$$C(\mu)=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

Ο Πίνακας C(μ) είναι ένας k×k πίνακας, που καλείται και πίνακας του Jordan.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. Εστω F = **Q** το σώμα των ρητών αριθμών. Το ελάχιστο πολυώνυμο m(u) ενός μετασχηματισμού, έστω ότι είναι το $m(u)=\mu_1\mu_2$ όπου $\mu_1=(u-1)^3$ και $\mu_2=(u^2-2)^2$. Ο πίνακας του μετασχηματισμού, είναι ένας 7×7 πίνακας, μιά και η τάξη του είναι ίση με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων μ_1 και μ_2. Γιά να βρούμε πρώτα την ρητή μορφή του πίνακα, γράφουμε,

$$\mu_1=u^3-3u^2+3u-1 \text{ και } \mu_2=u^4+0u^3+4u^2+0u+4.$$

Είναι, τότε,

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

Κάθε ένας από τους σημειουμένους υποπίνακες, λαβαίνει την ισοδύναμο μορφή:

$$C(p_1)^2M=\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{και}$$

$$C(p_2)^2M=\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \text{αντιστοίχως,}$$

Η κλασσική μορφή του πίνακα είναι συνεπώς, η:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Αν αντί του σώματος **Q** είχαμε το σώμα **F**, τότε, κάθε παράγων u^2-2 αναλύεται σε γινόμενο πρώτοβαθμίων παραγόντων, $u^2-2=(u-\sqrt{2})(u+\sqrt{2})$. Είναι, τότε,

$$\left(\begin{array}{ccc|cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{array}\right)$$

$m(u)=(u-1)^3(u-\sqrt{2})^2(u+\sqrt{2})^2$ και ο προηγούμενος πίνακας, λαβαίνει την ισοδύναμο μορφή, που εμφανίζεται δίπλα.

Κάθε ένας από τους σημειούμενους υποπίνακες, είναι ο πίνακας του Jordan, που αντιστοιχεί στους στοιχειώδεις διαιρέτες

$$\mu_1=(u-1)^3, \quad \mu_2(u)=(u-\sqrt{2})^2$$

και $\mu_3(u)=(u+\sqrt{2})^2$

Στην περίπτωση, λοιπόν, που γνωρίζουμε τους αναλλοίωτους παράγοντες, είναι εύκολη η αναγραφή της κανονικής ρητής μορφής και αν αναλύσουμε κάθε ένα αναλλοίωτο παράγοντα σε στοιχειώδεις διαιρέτες, της κλασσικής μορφής του πίνακα. Παρατηρούμε ότι, η κλασσική μορφή, την οποία θα λάβει ο πίνακας, εξαρτάται από το σώμα F μέσα στο οποίο δουλεύουμε, ενώ η ρητή μορφή αυτού, όχι.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 8. Οι στοιχειώδεις διαιρέτες, προσδιορίζουν μονοσήμαντα τους αναλοίωτους παράγοντες. Ετσι, αν κάποιος πίνακας έχει στοιχειώδεις διαιρέτες τους $(u^2+2)^3$, (u^2+2), $(u+1)^3$, $(u+1)^2$, και (u+1), τότε, έχει αναλλοίωτους παράγοντες τους $\mu_1 = (u^2+2)^3(u+1)^3$, $\mu_2 = (u^2+2)(u+1)^2$, $\mu_3 = (u+1)$.

6. Χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Θεώρημα των Cayley-Hamilton. ***Ιδιοδιάνυσμα*** ή *χαρακτηριστικό διάνυσμα* (eigenvector, characteristic vector) του μετασχηματισμού $T \in L(\mathbf{V})$ καλείται κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $x \in \mathbf{V}$, που παράγει T-αναλλοίωτο μονοδιάστατο υπόχωρο του **V**. Το x είναι λοιπόν ιδιοδυάνυσμα του T, ανν α) $x \neq 0$ και β) $xT = \lambda x$, $\lambda \in F$. Το λ καλείται ***ιδιοτιμή*** ή *χαρακτηριστική ρίζα ή χαρακτηριστικός αριθμός* του μεταχηματισμού T. Λέμε ότι, το x αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Ο υπόχωρος που παράγεται από το ιδιοδυάνυσμα x, γιά την ιδιοτιμή λ, καλείται και ***ιδιόχωρος*** $\mathbf{V}(\lambda)$ της λ.
Είναι, $\mathbf{V}(\lambda) = \mathrm{Ker}(T-\lambda T^0)$. Πράγματι, $x \in \mathbf{V}(\lambda)$, ανν $xT = \lambda x$, ή $x(T-\lambda T^0) = 0$. Είναι, βέβαια, $\dim\mathrm{Ker}(T-\lambda T^0) \geq 1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6. α) Η προβολή p: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, που ορίζεται από τις σχέσεις

$$e_1p = 1e_1 + 0e_2$$
$$e_2p = 0e_1 + 0e_2$$

και με πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ έχει τα μη μηδενικά διανύσματα e_1 και e_2 ως χαρακτηριστικά, με αντίστοιχες ιδιοτιμές, λ = 1 και λ = 0.

β) Εστω ο T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, που ορίζεται από την σχέση $(x_1, x_2, x_3)T = (x_1, 2x_2, 2x_3)$. Κάθε διάνυσμα της μορφής (x,0,0), $x \neq 0$, είναι χαρακτηριστικό διάνυσμα, με ιδιοτιμή λ = 1. Επίσης, κάθε διάνυσμα $(0, x_2, x_3)$ με x_2, x_3 όχι αμφότερα μηδέν, είναι χαρακτηριστικό διάνυσμα με ιδιοτιμή λ = 2.

ΠΡΟΤΑΣΗ 7. Γιά διαφορετικές ιδιοτιμές λ, οι λαμβανόμενοι ιδιόχωροι $\mathbf{V}(\lambda)$ έχουν τομή τον $\{0\}$.
Απόδειξη. Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι, επειδή $0T = 0 = \lambda 0$ γιά κάθε λ, $0 \in \mathbf{V}(\lambda)$.
α) Το λ δεν είναι ιδιοτιμή. Τότε, δεν υπάρχει άλλο διάνυσμα εκτός από το 0, που να πληροί την σχέση $xT = \lambda x$. Αρα, στην περίπτωση αυτή, $\mathbf{V}(\lambda) = \{0\}$. β) Το λ είναι ιδιοτιμή. Τότε, γιά τα x, $y \in \mathbf{V}(\lambda)$ είναι και $(\alpha x+\beta y)T = \alpha xT+\beta xT = \lambda(\alpha x+\beta y)T \in \mathbf{V}(\lambda)$ και συνεπώς, ο $\mathbf{V}(\lambda)$ υπόχωρος. γ) Εστω τα $x \in \mathbf{V}(\lambda_1)$ και $y \in \mathbf{V}(\lambda_2)$ με $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Αν z ένα στοιχείο της τομής των δύο αυτών ιδιόχωρων, τότε αφ' ενός $zT = \lambda_1 z$ και αφ' εταίρου, $zT = \lambda_2 z$.
Αρα και, $\lambda_1 z - \lambda_2 z = (\lambda_1 - \lambda_2)z = 0$. Αν λοιπόν το $z \neq 0$, τότε, αναγκαστικά, $\lambda_1 = \lambda_2$, άτοπο.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ο υπόχωρος L{x}, που παράγεται από κάποιο ιδιοδυάνυσμα x του μετασχηματισμού T, είναι T-αναλλοίωτος υπόχωρος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Να ευρεθούν όλα τα ιδιοδυανύσματα του $T \in L(\mathbf{V})$.
Λύση. Η σχέση $xT = \lambda x$ γράφεται ισοδύναμα, $x(A-\lambda I) = 0$, όπου A ο πίνακας του μετασχηματισμού T σε κάποια βάση του χώρου. και I είναι ο μοναδιαίος πίνακας, που αντιστοιχεί στον ταυτοτικό μετασχηματισμό T^0. Η σχέση αυτή, είναι με την σειρά της, ισοδύναμος προς το σύστημα $(\alpha_{ij} - \lambda\delta_{ij})x_j = 0$. Το σύστημα αυτό, είναι ομογενές γραμμικό. Εχει συνεπώς μη μηδενική λύση x, ανν η $\det(\alpha_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = 0$. Η ορίζουσα αυτή, καλείται

χαρακτηριστική ορίζουσα, και είναι, βέβαια, ένα πολυώνυμο του λ, που κι αυτό καλείται ***χαρακτηριστικό πολυώνυμο*** φ(λ). Η εξίσωση φ(λ) = 0, καλείται ***χαρακτηριστική εξίσωση*** του πίνακα Α του μετασχηματισμού Τ. Οι ρίζες του πολυωνύμου αυτού, είναι οι ***ιδιοτιμές*** ή οι ***χαρακτηριστικές ρίζες,*** του μετασχηματισμού Τ. Το πολυώνυμο αυτό, έχει την μορφή,

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n - p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1}p_{n-1}\lambda + (-1)^n p_n \qquad (1).$$

όπου: $p_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}$, το ***ίχνος*** (trace) του πίνακα Α (το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων του), $p_2 = \sum_{i<j} \begin{vmatrix} \alpha_{ii} & \alpha_{ij} \\ \alpha_{ji} & \alpha_{jj} \end{vmatrix}$ το άθροισμα, όλων των δευτέρας τάξεως οριζουσών του πίνακα Α, $p_3 = p_3 = \sum_{i<j<k} \begin{vmatrix} \alpha_{ii} & \alpha_{ij} & \alpha_{ik} \\ \alpha_{ji} & \alpha_{jj} & \alpha_{jk} \\ \alpha_{ki} & \alpha_{kj} & \alpha_{kk} \end{vmatrix}$ το άθροισμα όλων των τρίτης τάξεως οριζουσών του πίνακα Α, κ.ο.κ, $p_n = \det(A)$.

Σημείωση. Σε κάθε χαρακτηριστική ορίζουσα, αντιστοιχεί ένα χαρακτηριστικό πολυώνυμο φ(λ). Αντίστροφα, αν μου δίδεται κάποιο πολυώνυμο, μπορούμε αμέσως να γράφουμε την ορίζουσα, της οποίας αυτό είναι χαρακτηριστικό. Προς τούτο Γράφουμε το (1) ως εξής:

$$\varphi(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \cdots - p_{n-1}\lambda - p_n)$$

ή $$\varphi(\lambda) = (p_1 - \lambda)(-\lambda^{n-1}) - p_2\lambda^{n-2} + p_3(-\lambda)^{n-3} - \cdots + (-1)^n p_n =$$

$$\begin{vmatrix} p_1 - \lambda & p_2 & p_3 & \dots & p_n \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix}$$

Ο πίνακας Ρ, που έχει την προηγούμενη ορίζουσα ως χαρακτηριστική ορίζουσα, είναι όμοιος του πίνακα Α του μετασχηματισμού, που έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο το φ(λ), μιά και όπως θα δούμε αμέσως παρακάτω, η τάξη ισοδυναμίας των ομοίων πινάκων, έχει το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Ο πίνακας αυτός Ρ, είναι ο

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας αυτός καλείται, πίνακας του Frobenius.

Είναι, βέβαια, Ρ = $Q^{-1}AQ$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7. Γιά το πολυώνυμο φ(λ) = $\varphi(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 - 40\lambda^2 - 56\lambda - 20$ είναι,

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 40 & 56 & 20 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8. Γιά τον μετασχηματισμό T, που ορίζεται από την σχέση:
$(x_1, x_2, \ \dots\ , x_n)T = (\lambda_0 x_1, x_1 + \lambda_0 x_2, \ \dots\ , x_{n-1} + \lambda_0 x_n)$, υπολογίζουμε τον πίνακά του A, στην κανονική βάση, βρίσκοντας τις εικόνες της βάσεως εκφρασμένες στην βάση αυτή.
Είναι,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

Ο A είναι ένας πίνακας του Jordan.
Εχει φ(λ) = det(A–λI) = $(-1)^n (\lambda_0 - \lambda)^n$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9. Εστω ο T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, με $(x_1, x_2)T = (x_1 + 2x_2, x_1 + x_2)$. Ο πίνακας του T στην κανονική βάση, είναι ο $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ οπότε και $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

άρα και $\varphi(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 1$. Εχουμε ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$, $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$. Στην λ_1 αντιστοιχεί το ιδιοδυάνυσμα (x_1, x_2), με $(x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 (x_1, x_2)$. Η ισότης αυτή, μας παρέχει το σύστημα, $(1 - \lambda_1)x_1 + 2x_2 = 0$ και $x_1 + (1 - \lambda_1)x_2 = 0$. Το ομογενές αυτό σύστημα, γιά την ευρεθείσα τιμή του $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$ γίνεται, $-\sqrt{2}x_1 + 2x_2 = 0$ και $x_1 - \sqrt{2}x_2 = 0$, και έχει μονοπαραμετρική λύση την $(x_1, x_2) = \kappa(\sqrt{2}, 0)$.
Ο ιδιόχωρος που παράγεται είναι ο $\mathbf{V}(\lambda_1) = L\{(\sqrt{2}, 0)\}$. Με τον ίδιο τρόπο, υπολογίζουμε ένα δεύτερο ιδιοδιάνυσμα, γιά την τιμή $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$, το $(0, -\sqrt{2})$.
Είναι, λοιπόν, $\mathbf{V}(\lambda_2) = L\{(0, -\sqrt{2})\}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 9. Εφ' όσον το σώμα F του χώρου **V** είναι αλγεβρικώς κλειστό, το φ(λ) έχει πάντα λύση μέσα σ' αυτό. Κάθε μετασχηματισμός T∈L(**V**), έχει συνεπώς, ένα τουλάχιστον ιδιοδυάνυσμα. Ιδιαίτερα, αν T∈L($\mathbb{R}^3$), ο T έχει μία τουλάχιστον πραγματική ιδιοτιμή λ.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8. Τα χαρακτηριστικά διανύσματα, που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές ενός μετασχηματισμού T, αποτελούν γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο.
Απόδειξη. Εστω ότι οι ιδιοτιμές λ_j (j = 1, . . . , n), είναι $\lambda_\mu \neq \lambda_\nu$ όταν είναι, $\mu \neq \nu$. Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι τα ιδιοδιανύσματα x_j, που αντιστοιχούν στις λ_j, αποτελούν σύνολο γραμμικά εξαρτημένο. Είναι, τότε, $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = 0$, (1) με $\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \neq 0$. Ιδιαίτερα, έστω $\alpha_n \neq 0$.

Από την (1) έχουμε, τώρα, ότι και $\sum_{j=1}^{n} \lambda_1 \alpha_j x_j = 0$ (2), ως επίσης και, $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j T = 0$ ή $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j x_j = 0$ (3). Αφαιρούμε από την (2) την (3) και λαβαίνουμε την $\sum_{j=2}^{n} (\lambda_1 - \lambda_j)\alpha_j x_j = 0$ (4). Λαβαίνουμε, τώρα την εικόνα της (4) διά της T, που είναι η $\sum_{j=2}^{n}(\lambda_1-\lambda_j)\alpha_j x_j T=\sum_{j=2}^{n}(\lambda_1-\lambda_j)\alpha_j\lambda_j x_j=0$ και την αφαιρούμε από την σχέση που προκύπτει, αν πολλαπλασιάσουμε την (4) επί λ_2, που είναι η $\sum_{j=2}^{n}(\lambda_1-\lambda_j)\lambda_2\alpha_j x_j=0$. Ετσι, προκύπτει η $\sum_{j=3}^{n}(\lambda_1-\lambda_j)(\lambda_2-\lambda_j)x_j=0$. Εργαζόμενη με τον ίδιο τρόπο, λαβαίνουμε τελικά την σχέση, $\alpha_n(\lambda_1-\lambda_n)(\lambda_2-\lambda_n)\ \cdots\ (\lambda_{n-1}-\lambda_n)x_n=0$. Ομως, όλες οι διαφορές, όπως και το $\alpha_n\neq 0$. Αρα, $x_n=0$. Ατοπον.

ΠΡΟΤΑΣΗ 9. Η τάξη ισοδυναμίας των ομοίων πινάκων του μετασχηματισμού T, έχει το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

Απόδειξη. Εστω A ο πίνακας του T, και B = $P^{-1}AP$ ένας όμοιος προς αυτόν πίνακας. Ισχύει τότε ότι, det($P^{-1}AP$) = $\det P^{-1}$ detAdetP = detA. Η ορίζουσα συνεπώς, του πίνακα A, δεν αλλάζει, όταν εκφράζουμε τον πίνακα A σε μία άλλη βάση του χώρου. Το ίδιο ισχύει και γιά την ορίζουσα του πίνακα A–λI.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Οι συντελεστές του πολυωνύμου φ(λ) παραμένουν αναλλοίωτοι ως προς τις αλλαγές της βάσεως του χώρου. Ιδιαιτέρως, αναλλοίωτοι είναι οι συντελεστές

$$p_1=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ii}= \text{tr(A) [το ίχνος του A] και } p_n=\text{detA}.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 10. Αν $\mathbf{V}=\mathbf{V}_1\oplus\mathbf{V}_2$ όπου οι $\mathbf{V}_1,\mathbf{V}_2$ είναι T-αναλλοίωτοι υπόχωροι το **V**, τότε $\varphi(\lambda)=\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)$, όπου φ_1 και φ_2 τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα του περιορισμού του T επί των $\mathbf{V}_1,\mathbf{V}_2$ αντίστοιχα.

Απόδειξη. Εκλέγουμε εκείνη την βάση του χώρου **V**, στην οποία ο πίνακας A του μετασχηματισμού T λαβαίνει την μορφή $A=\begin{pmatrix}A_{11} & 0\\ 0 & A_{22}\end{pmatrix}$όπου A_{11} και A_{22} οι πίνακες των αντίστοιχων περιορισμών του T. Είναι, $A-\lambda I=\begin{pmatrix}A_{11}-\lambda I & 0\\ 0 & A_{22}-\lambda I\end{pmatrix}$

και det(A–λI) = det(A_{11} –λI)det(A_{22} –λI).

ΠΟΡΙΣΜΑ. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του μετασχηματισμού $T_{\mathbf{K}}$, $T_{\mathbf{K}}$ ο περιορισμός του T πάνω σε κάποιον T-αναλλοίωτο υπόχωρό του **K**, είναι διαιρέτης του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του T.

ΠΡΟΤΑΣΗ 10. Αν στην ιδιοτιμή λ αντιστοιχούν τα k γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα e_j, τότε, αυτά παράγουν τον ιδιόχωρο **V**(λ), που είναι T-αναλλοίωτος υπόχωρος του **V**. Ο περιορισμός του T επί του **V**(λ) πληροί την σχέση xT = λx, ∀x∈**V**(λ).

Απόδειξη. Πράγματι, γιά το x∈**V**(λ), $x=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j e_j$ άρα και

$$xT=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j e_j T=\sum_{j=1}^{k}\lambda\alpha_j e_j=\lambda\sum_{j=1}^{k}\alpha_j e_j=\lambda x\in\mathbf{V}(\lambda).$$

ΘΕΩΡΗΜΑ των Cayley-Hamilton. Κάθε τετραγωνικός πίνακας A, πληροί την χαρακτηριστική του εξίσωση.

Απόδειξη. Θεωρούμε τους πίνακες Α–λΙ και Β = adj(Α–λΙ). Κάθε στοιχείο του Α–λΙ είτε περιέχει το λ^0, (αν δεν είναι διαγώνιο στοιχείο), είτε περιέχει το λ^1 (αν είναι διαγώνιο στοιχείο). Αρα, κάθε στοιχείο του πίνακα Β, περιέχει το λ, το πολύ εις την n–1 δύναμη. Ενα τυπικό στοιχείο του Β, είναι, λοιπόν, το $\beta_{ij} = \beta_0 + \beta_1\lambda^1 + \cdots + \beta_{n-1}\lambda^{n-1}$ όπου οι συντελεστές β αυτού, είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις των n^2 στοιχείων του πίνακα Α. Τον πίνακα Β, μπορούμε συνεπώς να τον γράψουμε στην μορφή $B = B_0 + B_1\lambda^1 + \cdots + B_{n-1}\lambda^{n-1}$.
Ας υπολογίσουμε τους πίνακες $B_0, B_1, \cdots, B_{n-1}$. Προς τούτο, χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\det A^{-1}$ = (detadjA)($\det A^n$) (τύπος του Cauchy, σελ. 35), που την γράφουμε, AadjA = (detA)I. Αν ως Α λάβουμε τον Α–λΙ, η ταυτότητα αυτή μας παρέχει την (Α–λΙ)Β = det(Α–λΙ)Ι = φ(λ)Ι. Αναλυτικά, έχουμε ότι,

$$(A-\lambda I)\sum_{j=0}^{n-1} B_j\lambda^j = \varphi(\lambda)I$$

$$\text{ή} \quad AB_0 + \sum_{j=1}^{n}(AB_j - B_{j-1})\lambda^j - \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\lambda^j I - \alpha_0 I \quad \text{με } B_n = 0$$

$$\text{ή} \quad (AB_0 - \alpha_0 I) + \sum_{j=1}^{n}(AB_j - B_{j-1} - \alpha_j I)\lambda^j = 0 \quad \text{με } B_n = 0.$$

Η σχέση αυτή, ισχύει γιά κάθε τιμή του λ. Αρα έχουμε τις ισότητες,

$$\begin{array}{lcl}
AB_0 = \alpha_0 I & \text{ή} & AB_0 = \alpha_0 A^0 \\
AB_1 - B_0 = \alpha_1 I & \text{ή} & A^2B_1 - AB_0 = \alpha_1 A \\
AB_2 - B_1 = \alpha_2 I & \text{ή} & A^3B_2 - A^2B_1 = \alpha_2 A^2 \\
\cdots \quad \cdots & \cdots & \cdots \quad \cdots \\
-B_{n-1} = \alpha_0 I & \text{ή} & -A^nB_{n-1} = \alpha_n A^n
\end{array}$$

Προσθέταουμε τις παραπάνω ισότητες κατά μέλη, και λαβαίνουμε την εξίσωση, φ(Α) = 0.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. α) Κάθε γραμμικός μετασχηματισμός Τ, πληροί το χαρακτηριστικό πολυώνυμό του.

β) Ο μετασχηματισμός φ(Τ) μηδενίζει τον χώρο.

γ) Το ελάχιστο πολυώνυμο m(u) διαιρεί το φ(λ).

δ) Στην περίπτωση, που το σώμα F είναι αλγεβρικά κλειστό, το m(u) και το φ(λ) έχουν τις ίδιες ρίζες.

ε) Ολες οι χαρακτηριστικές ρίζες του Τ κείνται εν F, ανν όλες οι ρίζες του ελαχίστου πολυωνύμου κείνται εν F.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10. Εστω ότι στην κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ ο μετασχηματισμός Τ έχει πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

Το φ(λ) του μετασχηματισμού, είναι το

$$\varphi(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)^2.$$

Το m(u) του μετασχηματισμού είναι ή το ±φ(λ), ή το ±(λ–1)(λ–2). Γιά να βρούμε πιό απ' τα δύο είναι, ξεκινάμε από το απλούστερο, που είναι το (λ–1)(λ–2), σχηματίζουμε τον αντίστοιχο πολυωνυμικό μετασχηματισμό $(T-1)(T-2)$, και ελέγχουμε αν ο μετασχηματισμός αυτός, μηδενίζει τον χώρο μας. Είναι, $x(T^2 - 3T + 2I) = 0$. Αρα, m(u) = $m(u) = u^2 - 3u + 2 = (u-1)(u-2)$.
Παρατηρούμε ότι, deg(m(u)) = 2, ενώ η διάσταση του χώρου είναι 3. Ο χώρος λοιπόν, γράφεται ως ευθύ άθροισμα δύο κυκλικών υπόχωρων, ενός με διάσταση 2 και με μ(u) το m(u), και ενός με διάσταση ένα και με μ(u) το (u–2). Τα δύο αυτά ελάχιστα πολυώνυμα,

είναι και οι αναλλοίωτοι παράγοντες του T. Μπορούμε λοιπόν στον T, να αντιστοιχίσουμε τον πίνακα,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$ που είναι η ρητή κανονική μορφή του πίνακα A του μετασχηματισμού T.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11. Εστω $T \in L(\mathbb{R}^2)$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του μετασχηματισμού αυτού, θα είναι της μορφής $\varphi(\lambda) = (\lambda - \rho_1)(\lambda - \rho_2)$ αν $\rho_1 \neq \rho_2$, είτε $\varphi(\lambda) = (\lambda - \rho)^2$ αν $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, είτε, τέλος, $\varphi(\lambda) = \lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0$, στην περίπτωση, που δεν έχει πραγματικές ρίζες. Σε κάθε περίπτωση, πρέπει να έχουμε m(u) | φ(λ).

Στην πρώτη περίπτωση, είναι m(u) = ±φ(λ) και ο χώρος αναλύεται σε ευθύ άθροισμα δύο κυκλικών υπόχωρων $\mathbf{K}_1 = \operatorname{Ker} T_1$ και $\mathbf{K}_2 = \operatorname{Ker} T_2$, όπου T_1 και T_2 οι αντίστοιχει περιορισμοί του T επί των $\mathbf{K}_1$ και $\mathbf{K}_2$. Κάθε ένας από τους χώρους **K**, έχει μ(u) το $(\lambda - \rho_1)$ και $(\lambda - \rho_2)$ αντίστοιχα.

Ο πίνακας του T, είναι ισοδύναμος του $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

Στην δεύτερη περίπτωση. Εδώ, το m(u) είναι δυνατόν να είναι είτε το (λ–ρ), είτε το $(\lambda - \rho)^2$. Αντίστοιχα, έχουμε τους ισοδύναμους του A πίνακες.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Στην τελευταία περίπτωση, m(u) = ±φ(λ) και έχουμε ισοδύναμο πίνακα του μετασχηματισμού, τον πίνακα της ρητής κανονικής μορφής του, που αναγράφεται παραπλεύρως. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 \end{pmatrix}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12. Εστω ο $T \in L(\mathbb{R}^3)$, με πίνακα A τον δίπλα. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \alpha & 2 & 0 \\ \beta & \gamma & -1 \end{pmatrix}$

Είναι, $\varphi(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda + 1)$. Επειδή το ελάχιστο πολυώνυμο έχει τις ίδιες ρίζες με το χαρακτηριστικό, είτε m(u) = ±φ(λ), είτε m(u) = ±(λ–2)(λ+1). Αντίστοιχα, ο πίνακας A είναι ισοδύναμος προς τον

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ είτε τον } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε, τώρα, ότι (A–2I)(A+I) ≠ 0. Αρα, m(u) = ±φ(λ).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13. Εστω ο πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας A έχει δύο Jordan υποπίνακες. Ο μετασχηματισμός $T \in L(\mathbb{R}^4)$, που αντιστοιχεί στον πίνακα A, έχει δύο αναλλοίωτους υπόχωρους με διάσταση 2. Είναι, $\varphi(\lambda) = (\lambda - 2)^4$ και $m(u) = (u - 2)^2$. Αναλοίωτοι παράγοντες του μετασχηματισμού είναι οι $(u - 2)^2$, $(u - 2)^2$, και στοιχειώδης διαιρέτης αυτού, ο (u–2).

7. Διαγωνοποίηση - Τριγωνοποίηση. Ενας πίνακας Μ λέγεται διαγωνίσιμος, (αντ. τριγωνίσιμος), ανν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P, έτσι ώστε, ο $P^{-1}MP$ να είναι διαγώνιος (αντ. τριγωνικός) πίνακας. Ο μετασχηματισμός $T\in L(\mathbf{V})$, λέγεται διαγωνίσιμος, (αντ. τριγωνίσιμος), ανν υπάρχει βάση του **V** τέτοια ώστα, ο πίνακας που αντιστοιχεί σ' αυτήν, να είναι διαγώνιος (αντ. τριγωνικός).

Σε ότι ακολουθεί, θα υποθέτουμε το σώμα F του διανυσματικού χώρου **V** είναι αλγεβρικά κλειστό.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11. Ο πίνακας A του μετασχηματισμού T είναι διαγώνιος, ανν υπάρχει βάση του **V**, που να αποτελείται από ιδιοδυανύσματα του T.
Απόδειξη. α) Εστω ότι η βάση $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ του **V** αποτελείται από ιδιοδυανύσματα του T. Ισχύει τότε, η $e_iT_i = \lambda_i e_i$ γιά όλα τα i = 1, . . . , n. Ο πίνακας συνεπώς, που αντιστοιχεί στον μετασχηματισμό T, εκφρασμένος στην βάση αυτή, είναι διαγώνιος, με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές λ_i. β) Αντίστροφα, αν στον μετασχηματισμό T αντιστοιχεί ο πίνακας $D(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, τότε φανερά, τα e_i είναι ιδιοδυανύσματα του T.

Ορισμός. Φάσμα (spectrum) του μετασχηματισμού T καλείται το σύστημα των k διαφορετικών ιδιοτιμών λ_i του T. Το φάσμα του T μαζί με τους αναλλοίωτους ιδιόχωρους $\mathbf{V}(\lambda_i)$ αποτελούν τα φασματικά δεδομένα (spectral data) του T.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 10. Οπως είδαμε, η τάξη ισοδυναμίας των ομοίων προς τον A πινάκων, έχει το ίδιο χαρακτηρηστικό πολυώνυμο (πρόταση 9, σελ. 99). Δεν ισχύει όμως πάντοτε το αντίστροφο. Δηλαδή, είναι δυνατόν, το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο, να το έχουν και πίνακες, που δεν είναι όμοιοι. Γιά παράδειγμα, θεωρούμε τους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Οι πίνακες αυτοί έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\varphi(\lambda) = (1-\lambda)^2$ όμως δεν είναι όμοιοι μιά και η σχέση ομοιότητας $B = P^{-1}AP$ δίδει την B = I, πράγμα άτοπον.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 11. Αν όλες οι ρίζες του φ(λ) είναι απλές, τότε είναι και διαφορετικές. Οι n διαφορετικές αυτές ρίζες του φ(λ), παρέχουν n διαφορετικά ιδιοδιανύσματα, που παράγουν τους μονοδιάστατους ιδιόχωρους $\mathbf{V}(\lambda_i)$ με ευθύ άθροισμα τον **V**. Μπορούν συνεπώς, να χρησιμοποιηθούν ως βάση του **V** (βλέπε πρόταση 7, σελ. 97). Ο πίνακας στην περίπτωση αυτή διαγωνίζεται, με διαγώνια στοιχεία τα λ_i.

Ερχόμαστε, τώρα, στην περίπτωση, που έχουμε και πολλαπλές ρίζες. Παρατηρούμε ότι, ο ιδιόχωρος $\mathbf{V}(\lambda_i) = \mathrm{Ker}(T-\lambda_i I)$. Γιά να μπορεί λοιπόν ο **V** να γραφεί ως ευθύ άθροισμα των $\mathbf{V}(\lambda_i)$, πρέπει και αρκεί, $\dim\mathbf{V}(\lambda_i)$ = πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ο $T_{\mathbf{K}}$ είναι διαγωνίσιμος ανν η σχέση $x(T-\lambda I)^k = 0$, συνεπάγεται την $x(T-\lambda I) = 0$, $\forall x\in\mathbf{V}$.
Απόδειξη. Είναι $\mathbf{K} = \mathrm{Ker}(T-\lambda I) = \mathrm{Ker}(T-\lambda I)^k$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 14. Εστω ότι ο πίνακας του μετασχηματισμού $T\in L(\mathbb{R}^3)$ (ως προς την κανονική βάση του χώρου), είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Είναι } \varphi(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -3 & -1-\lambda & 3 \\ 3 & 3 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda+4).$$

Το ελάχιστο πολυώνυμο του Τ είναι το m(u) = (u–2)(u+4), μιά και ένας μικρός λογαριασμός δίδει (A–2I)(A+4I) = 0. Ο πίνακας συνεπώς Α χωρίζεται σε δύο υποπίνακες A_1 και A_2, που κάθε ένας απ' αυτούς, δίδει τον περιορισμό του Τ στους υπόχωρους $\mathbf{K}_1$ και $\mathbf{K}_2$, όπου $\mathbf{K}_1$ = Ker(T–2I) = $\mathrm{Ker}(T-2I)^2$ και $\mathbf{K}_2$ = (T+4I). Παρατηρούμε ότι, dim$\mathbf{K}_1$+dim$\mathbf{K}_2$ = 3. Ο Τ είναι διαγωνίσιμος, και τα διαγώνια στοιχεία του, είναι οι ιδιοτιμές του Τ. Ο Α είναι, λοιπόν, όμοιος προς τον D(2,2,–4).

Γιά να βρούμε τους ιδιόχωρους $\mathbf{K}_1$ και $\mathbf{K}_2$, βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα που τους παράγουν. Γιά τον $\mathbf{K}_1$ είναι:

$$(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \lambda(\xi_1,\xi_2,\xi_3), \quad \text{με } \lambda = 2 \qquad (1).$$

Οδηγούμεθα συνεπώς στο σύστημα:

$$\begin{aligned} 2\xi_1 - 3\xi_2 + 3\xi_3 &= 2\xi_1 \\ -\xi_2 + 3\xi_3 &= 2\xi_2 \\ 2\xi_1 \qquad + 3\xi_3 &= 2\xi_3 \end{aligned}$$

που είναι διπαραμετρικό, και έχει λύση την $\xi_1(1{,}0{,}0) + \xi_2(0{,}1{,}1)$.

Αρα, $\mathbf{K}_1$ = L{(1,0,0), (0,1,1)}. Γιά τον $\mathbf{K}_2$ σχηματίζουμε την (1) με λ = –4 και το σύστημα στο οποίο οδηγούμεθα, είναι μονοπαραμετρικό, και έχει λύση την $\xi_1(1{,}1{,}-1)$.

Αρα, $\mathbf{K}_2$ = L{(1,1,–1)}. Ο πίνακας Α λαβαίνει συνεπώς την διαγώνια μορφή του, στην βάση που αποτελείται από τα $u_1 = (1{,}0{,}0)$, $u_2 = (0{,}1{,}1)$ και $u_3 = (1{,}1{,}-1)$.

Η νέα αυτή βάση εκφράζεται συναρτήσει της παλαιάς (αρχική μας βάση είναι η κανονική) από τις σχέσεις:

$$u_1 = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

$$u_2 = 0e_1 + 1e_2 + 1e_3$$

$u_1 = 1e_1 + 1e_2 - 1e_3$ Αν P ο πίνακας αλλαγής βάσεως, αυτός δηλαδή, που εκφράζει τον μετασχηματισμό των αρχικών διανυσμάτων βάσεως e στα τελικά u, είναι τότε,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$ Ισχύει φυσικά ότι, A = PD(2,2,–4) P^{-1}.

Ο τριγωνισμός ενός n×n πίνακα είναι πάντοτε δυνατός. Δύνουμε τον αλγόριθμο που τριγωνίζει ένα πίνακα Α, μέσα από ένα παράδειγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 15. Δίδεται ο πίνακας Α. Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο φ(λ). Είναι, φ(λ) = $(\lambda-1)^3$. Εδώ έχουμε το 1 ως τριπλή ιδιοτιμή. Ο πίνακας Α όμως δεν είναι διαγωνίσιμος, γιατί dimKer(T–I) < 3.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 14 & 11 \\ -3 & -5 & -5 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Γιά να τριγωνίσουμε τον Α, εργαζόμαστε ως εξής:

α) Βρίσκουμε ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1. Ενα τέτοιο, είναι το u_3 = (1,2,1).

β) Θεωρούμε τον χώρο **W** =L{(1,2,1)} και τον χώρο πηλίκο **V**/**W**, , ως και την επέκταση $\overline{T}$ που ορίζεται σ' αυτόν τον χώρο από τον μετασχηματισμό Τ του πίνακα Α.

γ) Αναζητούμε τον πίνακα της $\overline{T}$, το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο, και ένα ιδιοδιάνυσμα. Γιά να βρούμε τον πίνακα του $\overline{T}$ χρειαζόμαστε μιά βάση γιά τον **V**/**W**. Προς τούτο, παρατηρούμε ότι το {(1,2,1), e_1, e_2} είναι βάση του χώρου. Αρα τα e_1+**W** και e_2+**W** αποτελούν βάση του **V**/**W** (βλέπε σελ. 17).

Είναι: $(e_1+\mathbf{W})\overline{T} = e_1T+\mathbf{W} = (8,14,11)+\mathbf{W} = \kappa_{11}(e_1+\mathbf{W})+\kappa_{12}(e_2+\mathbf{W})$

$(e_2+\mathbf{W})\overline{T} = e_2T+\mathbf{W} = (-3,-5,-5)+\mathbf{W} = \kappa_{21}(e_1+\mathbf{W})+\kappa_{22}(e_2+\mathbf{W})$.

Υπολογίζουμε τα στοιχεία κ του ζητουμένου πίνακα:

Εχουμε, $(8,14,11)+\mathbf{W} = (\kappa_{11},\kappa_{12},0)+\mathbf{W}$ και

$(-3,-5,-5)+\mathbf{W} = (\kappa_{21},\kappa_{22},0)+\mathbf{W}$. Αρα τα διανύσματα $(8-\kappa_{11},14-\kappa_{12},11)$ και $(-3-\kappa_{21},-5-\kappa_{22},-5)\in\mathbf{W}$. Είναι συνεπώς, $(8-\kappa_{11},14-\kappa_{12},11) = \xi_1(1,2,1)$ και

$(-3-\kappa_{21},-5-\kappa_{22},-5) = \xi_2(1,2,1)$ Από τις ισότητες αυτές λαβαίνουμε $\xi_1 = 11$, $\xi_2 = 1$, $\kappa_{11} = -3$, $\kappa_{12} = -8$, $\kappa_{21} = 2$ και $\kappa_{22} = 5$. Ο πίνακας συνεπώς του $\overline{T}$ είναι ο $\begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $\overline{T}$ είναι το $(\lambda-1)^2$, και ένα ιδιοδυάνυσμα αυτού, το $(1,2,0)+\mathbf{W}$. Βάση γιά τον χώρο πηλίκο $\mathbf{V}/\mathbf{W}$, επιλέγουμε την $\{(1,0,0)+\mathbf{W}, (1,2,0)+\mathbf{W}\}$.

δ) Χρησιμοποιούμε ως βάση του $\mathbf{V}$ την u: $\{(1,0,0), (1,2,0), (1,2,1)\}$.

Είναι $u_1 = 1e_1+0e_2+0e_3$ και $e_1 = 1u_1+0u_2+0u_3$

$u_2 = 1e_1+2e_2+0e_3$ $\qquad e_2 = 1u_1+1u_2+0u_3$

$u_3 = 1e_1+2e_2+1e_3$ $\qquad e_3 = 0u_1-1u_2+1u_3$.

Ο πίνακας Α του Τ στην αρχική βάση e_i είναι όμοιος με τον πίνακα Β του Τ στην βάση u. Είναι B = $P^{-1}AP$. Αρα και,

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 14 & 11 \\ -3 & -5 & -5 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 11 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ. Εστω ότι ο μετασχηματισμός Τ έχει όλες του τις χαρακτηριστικές ρίζες εν F. Υπάρχει τότε μία βάση γιά τον πίνακα του Τ, στην οποία, ο πίνακας αυτός καθίσταται τριγωνικός.

Απόδειξη. Με επαγωγή πάνω στην διάσταση n του χώρου $\mathbf{V}$. Γιά dim$\mathbf{V}$ = 1 φανερά το προς απόδειξη συμπέρασμα ισχύει. Υποθέτουμε ότι ισχύει γιά n–1, και έστω ο n διάστατος χώρος $\mathbf{V}$(F). Εστω $\lambda\in F$ μία χαρακτηριστική ρίζα του Τ, και u_0 ένα χαρακτηριστικό διάνυσμα, που αντιστοιχεί στην λ. Θεωρούμε τον $\mathbf{W} = L\{u_0\}$ και τον χώρο πηλίκο $\mathbf{V}/\mathbf{W}$. Επεκτείνουμε την Τ στον $\mathbf{V}/\mathbf{W}$, ο οποίος έχει διάσταση n–1 και επί του οποίου ο $\overline{T}$ έχει ελάχιστο πολυώνυμο, διαιρέτη του ελαχίστου πολυωνύμου του Τ. Ολες οι ρίζες συνεπώς του $\overline{T}$, βρίσκονται και αυτές στο F. O $\overline{T}$ πληροί τις υποθέσεις του θεωρήματος και επειδή dim $\mathbf{V}/\mathbf{W}$ = n–1, η υπόθεση της επαγωγής μας παρέχει μία βάση $\overline{u}$ του $\mathbf{V}/\mathbf{W}$, ως προς την οποία, ο πίνακας του $\overline{T}$ είναι τριγωνικός. Είναι, λοιπόν,

$$\begin{aligned}
&\overline{u}_1\overline{T} = \alpha_{22}\overline{u}_2 \\
&\overline{u}_2\overline{T} = \alpha_{22}\overline{u}_2 + \alpha_{33}\overline{u}_3 \\
&\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\
&\overline{u}_n\overline{T} = \alpha_{22}\overline{u}_2 + \alpha_{33}\overline{u}_3 + \ \ldots\ + \alpha_{nn}\overline{u}_n
\end{aligned}$$

Τα στοιχεία u του $\mathbf{V}$, τα οποία έχουν προβολή τα $\overline{u}$, μαζί με το u_0 αποτελούν βάση του $\mathbf{V}$. Στην βάση αυτή, φανερά ο πίνακας του Τ είναι τριγωνικός.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 12. Σε έναν τριγωνικό πίνακα, τα διαγώνια στοιχεία του, αποτελούνται από τις ιδιοτιμές του.

Ασκήσεις. 1) Γιά ποιές τιμές του α ο πίνακας A = $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ είναι διαγωνίσιμος;

Λύση. Εχουμε φ(λ) = det(A–λI) = $(\lambda-1)^2$ (λ–2). Γιά να είναι ο A διαγωνίσιμος, θα πρέπει να έχουμε m(u) = (u–1)(u–2). Θα πρέπει δηλαδή να είναι, m(A) = 0. Η ισότης ισχύει γιά την τιμή α = 0.

2) Εστω ο πίνακας A = $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ όπου α, β, γ εν **R**. Ποία συνθήκη πρέπει να πληρούν τα α, β, γ γιά να είναι ο A διαγωνίσιμος;

Λύση. Εχουμε φ(λ) = det(A–λI) = $(\lambda-1)^2$ (λ–γ). Γιά να είναι ο A διαγωνίσιμος, θα πρέπει το m(u) = (u–1)(u–γ). Πρέπει συνεπώς να είναι, m(A) = 0. Από την ισότητα αυτή, λαβαίνουμε τις σχέσεις αβ = 0 και α(1–γ) = 0. Η τιμή γ = 0 απορρίπτεται, γιατί αν γ = 0, φ(λ) = $(\lambda-1)^3$ οπότε το m(u) = (u–1), οπότε και m(A) = A–I = 0, δηλαδή, A = I, πράγμα άτοπο.

3) ΠΡΟΤΑΣΗ 12. Αν ο πίνακας A έχει το 0 ως ιδιοτιμή, είναι ιδιάζων (μη αντιστρέψιμος) πίνακας.

Απόδειξη. α) Ο A έχει το 0 ιδιοτιμή.

Τότε, γιά λ = 0, φ(λ) = det(A–Iλ) = det(A) = 0.

β) Ο A είναι ιδιάζων. Ο μετασχηματισμός T που έχει τον A ως πίνακα σε κάποια βάση του χώρου, έχει KerT ≠ {0}. Εστω το **V**∋u ≠ 0, u∈KerT.
Είναι τότε, uT = 0 = 0u, δηλαδή, το 0 ιδιοτιμή του T.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 13. Οταν ο A είναι ιδιάζων, το φ(λ) έχει α_0 = 0. Είναι, δηλαδή, της μορφής $\lambda^{\nu_0}(\lambda-\rho_1)^{\nu_1}\cdots(\lambda-\rho_\kappa)^{\nu_\kappa}$. Αντίστροφα, αν το φ(λ) έχει σταθερό όρο α_0 ≠ 0, τότε αντιστρέφεται. Πράγματι, αν π.χ. έχουμε το φ(λ) = $\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1$, τότε, το θεώρημα των Cayley-Hamilton δίδει την ισότητα φ(A) = 0 ή $A^3+2A^2-A-I=0$ οπότε είναι και $A^3+2A^2-A=I$, ή $A(A^2+2A-I)=I$ ή $A^{-1}=A^2+2A-I$. Υπολογίσαμε έτσι, και τον αντίστροφο πίνακα του A.

4) Δίδεται ο πίνακας A = $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ ο οποίος έχει φ(λ) = $(\lambda-1)^3$(λ–2) και ιδιοδυάνυσμα, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1, το u_4= (1,1,1,1). Να τριγωνίσεται την απεικόνιση $\overline{T}: \mathsf{R}^4/<u_4> \;\rightarrow\; \mathsf{R}^4/<u_4>$.

Λύση. Το $\{e_1,e_2,e_3,u_4\}$ αποτελεί βάση γιά τον R^4. Τα $e_i+L(u_i)$, i = 1, 2, 3, αποτελούν βάση του $\mathsf{R}^4/<u_4>$. Βρίσκουμε τον πίνακα της $\overline{T}$. Είναι,

$$e_i+L(u_i)\,\overline{T} = \alpha_{i1}(e_i+L(u_i))+\alpha_{i2}(e_i+L(u_i))+\alpha_{i3}(e_i+L(u_i))$$

άρα και, $\quad e_iT+L(u_i)=\alpha_{i1}e_1+\alpha_{i2}e_2+\alpha_{i3}e_3+L(u_4)$.

Εχουμε, λοιπόν,

$$(1,–4,–1,–4)-\alpha_{11}e_1-\alpha_{12}e_2-\alpha_{13}e_3\in L(u_4)$$

$$(2,–0,\ 5,–4)\ -\alpha_{21}e_1-\alpha_{22}e_2-\alpha_{23}e_3\in L(u_4)$$

$$(1,\ 1,-2,\ 3)-\alpha_{31}e_1-\alpha_{32}e_2-\alpha_{33}e_3\in L(u_4)$$

οπότε και,

$$(1,-4,-1,-4)-(\alpha_{11},\alpha_{12},\alpha_{13},0)\ =\ \xi_1\ (1,1,1,1) \qquad \text{άρα } \xi_1=-4$$
$$(2,-0,\ 5,-4)-(\alpha_{21},\alpha_{22},\alpha_{23},0)\ =\ \xi_2\,(1,1,1,1) \qquad \text{άρα } \xi_2=-4$$
$$(1,\ 1,-2,\ 3)-(\alpha_{31},\alpha_{32},\alpha_{33},0)\ =\ \xi_2\,(1,1,1,1) \qquad \text{άρα } \xi_2=3.$$

Υπολογίζουμε συνεπώς ότι τα α_{ij} έχουν τις τιμές $\alpha_{11}=5$, $\alpha_{12}=0$, $\alpha_{13}=3$, $\alpha_{21}=6$, $\alpha_{22}=4$, $\alpha_{23}=9$ και τέλος, $\alpha_{31}=-4$, $\alpha_{32}=-2$, $\alpha_{33}=-5$.

Ο πίνακας συνεπώς της $\overline{T}$ στην βάση $e+L(u_4)$ είναι ο $B=\begin{pmatrix}5 & 0 & 3\\ 6 & 4 & 9\\ -4 & -2 & -5\end{pmatrix}$.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του Β είναι το $(\lambda-1)^2$ (λ–2). Στην ιδιοτιμή 1, αντιστοιχεί το u_3 = (0, 2/3, 1). Στήν ιδιοτιμή 2, αντιστοιχεί το u_2 = (–2/3, 1, 1).

Είναι, τώρα,

$$u_1\ =\ e_1=(1,0,0)=1e_1+0e_2+0e_3 \qquad e_1=1u_1+0u_2+0u_3$$
$$u_2=(-2/3,\ 1,\ 1)\ =\ -(2/3)e_1+1e_2+1e_3 \qquad e_2=2u_1+3u_2-3u_3$$
$$u_3\ =(0,\ 2/3),\ 1)=\ 0e_1+(2/3)e_2+1e_3 \qquad e_1=-(4/3)u_1-2u_2+3u_3$$

και τελικά,

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2/3 & 1 & 1\\ 0 & 2/3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 0 & 3\\ 6 & 4 & 9\\ -4 & -2 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & -3\\ -4/3 & -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -6 & 9\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

5) Δίδεται ο πίνακας

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 2 & \alpha & 1\\ 0 & \alpha & 2\end{pmatrix}\in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

α) Δείξτε ότι το 0 είναι ιδιοτιμή του Α γιά κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$.
β) Γιά ποιές τιμές του α, ο Α είναι τριγωνίσιμος.
γ) Γιά ποιές τιμές του α ο Α είναι διαγωνίσιμος.

Λύση Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του α είναι, $\varphi(\lambda)=\lambda[-\lambda^2+(4+\alpha)\lambda-3\alpha-4]$. Αρα η τιμή λ = 0 είναι ιδιοτιμή του Α. Εχουμε ακόμα τις ιδιοτιμές

$$\lambda_1,\lambda_2=\frac{-(4+\alpha)\pm\sqrt{(4+\alpha)^2-12\alpha-16}}{-2}=\frac{-4-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4\alpha}}{-2}$$

Πρέπει να είναι $\alpha^2-4\alpha\geq 0$, ή α(α–4) ≥ 0. Στην περίπτωση, που α = 0, $\varphi(\lambda)=\lambda(-\lambda^2+4\lambda-4)\ =-\lambda(\lambda-2)^2$. Παρατηρούμε τότε, ότι Α(Α–2Ι) ≠ 0 οπότε ο Α είναι τριγωνίσιμος, αλλά όχι διαγωνίσιμος. Στην περίπτωση, που α = 4, $\varphi(\lambda)=-\lambda(\lambda-4)^2$. Τότε, Α(Α–4Ι) ≠ 0 οπότε ο Α είναι τριγωνίσιμος, αλλά όχι διαγωνίσιμος. Στην περίπτωση, που α > 4 ή α < 0, τότε φ(λ) = $\lambda(\lambda-\rho_1)(\lambda-\rho_2)$ με $\rho_1\neq\rho_2\neq 0$ οπότε ο Α είναι διαγωνίσιμος.

6) ΠΡΟΤΑΣΗ 13. Αν λ ιδιοτιμή του Τ, και q(T) οιοσδήποτε πολυωνυμικός μετασχηματισμός του Τ, τότε η q(λ) είναι και ιδιοτιμή του q(T).

Απόδειξη. Εχουμε, $\forall x\in\mathbf{V}$, xT = λx. Αρα και, xT^2 = (xT)T = λxT = λ^2x. Εν γένει ισχύει ότι, $xT^k=\lambda^kx$. Αν λοιπόν $q(T)=\alpha_kT^k+\ \cdots\ +\alpha_1T+\alpha_0T^0$, τότε και

$$\begin{aligned} xq(T) &= x(\alpha_k T^k + \cdots + \alpha_1 T + \alpha_0 T^0) = x\alpha_k T^k + \cdots + x\alpha_1 T + x\alpha_0 T^0 \\ &= \alpha_k x T^k + \cdots + \alpha_1 x T + \alpha_0 x\lambda^0 = \alpha_k x\lambda^k + \cdots + \alpha_1 x\lambda + \alpha_0 x\lambda^0 \\ &= x(\alpha_k \lambda^k + \cdots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 \lambda^0) = xq(\lambda) . \end{aligned}$$

7) ΠΡΟΤΑΣΗ 14. Εστω f μία μηδενοδύναμη απεικόνιση (βλέπε σελ. 25). Η f είναι τότε τριγωνίσιμη, με όλα τα διαγώνια στοιχεία ίσα με μηδέν.

Απόδειξη. Γιά κάποιον k φυσικό, είναι $f^k = f_0$. Θεωρούμε το πολυώνυμο q(x) = x^k και παρατηρούμε ότι, ο πολυωνυμικός μετασχηματισμός q(f) είναι ο μηδενικός μετασχηματισμός. Είναι xq(f) = 0 = 0x. Εχουμε λοιπόν ιδιοτιμή την λ = 0, με πολλαπλότητα k. Τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα, που είναι οι ιδιοτιμές του, έχουν την τιμή 0.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 14. Η f δεν μπορεί να είναι διαγωνίσιμη, αν k > 1. Πράγματι, τότε το ελάχιστο πολυώνυμο της f θα ήταν το m(u) = u, οπότε και m(f) = f = f_0.

8) Στην σελ. 99, ορίσαμε το ίχνος ενός πίνακα A, από την σχέση,

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}$$

Το μέγεθος αυτό, παραμένει αναλλοίωτο ως προς την αλλαγή της βάσεως του χώρου, μιά και όλοι οι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο, και το tr(A) είναι ο συντελεστής του όρου βαθμού n−1 του πολυωνύμου αυτού. Το γεγονός αυτό, μας επιτρέπει να θεωρούμε και το ίχνος του μεταχηματισμού T∈L(**V**).

Ισχύουν οι σχέσεις:
α) tr(λA) = λtr(A)
β) tr(A+B) = tr(A)+tr(B)
γ) tr(AB) = tr(BA)
δ) tr(T) = $\sum k_i \lambda_i$ όπου λ_i χαρακτηριστική ρίζα του T, πολλαπλότητος k_i. Αν ο T είναι μηδενοδύναμος, τότε όλες του οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι = 0 και συνεπώς, tr(T) = 0. Αρα και tr(T^k) = 0, ∀k∈**N**. Ισχύει όμως και το αντίστροφο (σε σώματα F χαρακτηριστικής μηδενός). Πράγματι, αν tr(T^k) = 0 ∀k∈**N**, τότε, επειδή ο T πληροί το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο, έχουμε την σχέση $T^k + \cdots + \alpha_1 T + \alpha_0 T^0 = 0$. Αρα και,

$$tr(q(T)) = tr(T^k + \cdots + \alpha_1 T + \alpha_0 T^0) = tr(T^k) + \cdots + \alpha_1 tr(T) + \alpha_0 tr(T^0) = k\alpha_0 = 0 .$$

Αρα $\alpha_0 = 0$. Αφού ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του T είναι 0, ο T είναι ιδιάζων (βλέπε παρατήρηση 13), άρα έχει ιδιοτιμή την 0 (βλέπε πρόταση 12).