Διατεταγμένα σώματα - Ι (Αλγεβρα)

Τι δεν ξεκίνησε, στα μαθηματικά, από τις ιδιότητες του συνόλου των φυσικών αριθμών: *Γιά κάθε τρείς φυσικούς αριθμούς* α, β, γ, *η σχέση* $\alpha \le \beta$ *συνεπάγεται την* $\alpha+\gamma \le \beta+\gamma$· *οι σχέσεις* $\alpha \le \beta$ *και* $0 \le \gamma$, *μαζί, συνεπάγονται την* $\alpha\gamma \le \beta\gamma$;

Μέρος πρώτο.
Διατάξεις (συμβιβαστές) δακτυλίων και σωμάτων.

Ορολογία. 1) Στους δακτυλίους και τα σώματα, που αναφέρονται εδώ, υποτίθεται, πάντα, ότι ο πολλαπλασιασμός είναι αντιμεταθετικός. 2) Διάταξη = ολική διάταξη. 3) Αν παραστήσουν με ≤ την σχέση διατάξεως, με την οποία είναι εφοδιασμένος κάποιος δακτύλιος, *θετικά*, θα ονομάζωνται τα ≥ 0 στοιχεία του και *αρνητικά*, τα ≤ 0· έτσι, το 0 είναι το μοναδικό στοιχείο του, που είναι και θετικό και αρνητικό. 4) Τα "δακτύλιος", "σώμα" κτλ. εξυπακούουν: μη κενά.

Υπενθύμιση. Στους ορισμούς: όταν = όταν, και μόνον όταν. Επίσης, αν = αν, και μόνον αν.

Συντομογραφίες. 1) αντ. = αντιστοίχως. 2) Βλ. = βλέπε.

Συμβολισμός. 1) Γιά κάθε δακτύλιο Α, με A^* παριστάνουν το σύνολο των μη μηδενικών στοιχείων του. 2) **N,** αντ. **Z**, αντ. **Q**, αντ. **R**, αντ. **C** = το σύνολο των φυσικών, αντ. ακεραίων, αντ. ρητών, αντ. πραγματικών, αντ. μιγαδικών αριθμών. 3) Αν Α δακτύλιος εφοδιασμένος με διάταξη, με A^+ (αντ. A^-) παριστάνουν το σύνολο των θετικών (αντ. αρνητικών) στοιχείων του. 4) Τις σχέσεις διατάξεως, θα τις παριστάνουμε με $\le$, $\le^*$ κτλ.

Περί τίνος πρόκειται. Αν ένα *δακτύλιο* τον αντιμετωπίσουμε απλά και μόνο σαν σύνολο, μπορούμε, πάντα, να τον εφοδιάσουμε με διάταξη· και, συνήθως, μάλιστα, με πολλές. Ετσι π.χ. μπορούμε να εφοδιάσουμε το **C** με απειρία διαφορετικών μεταξύ τους διατάξεων. Επίσης, το πεπερασμένο σώμα **Z**/(p) μ΄ ένα πεπερασμένο πλήθος διαφορετικών μεταξύ τους διατάξεων.
Το πράγμα αλλάζει και γίνεται πιό ενδιαφέρον και πιό δύσκολο, αν ζητήσουμε να "συντονίζεται" (*συμβιβάζεται*, είναι η μαθηματική έκφραση) η διάταξη με τις δύο εσωτερικές πράξεις του δακτυλίου, το + και το ·. Ετσι, μ΄ αυτόν τον περιορισμό, το **C** δεν επιδέχεται καμμία διάταξη.
Οταν οι μαθηματικοί ζήτησαν *αληθινά* να καταλάβουν, γιατί τα **Z**, **Q**, **R** επιδέχονται διάταξη και γιατί το **C** και το **Z**/(p), όχι, φτάσανε στην θεωρία των Διατεταγμένων Σωμάτων· που είχε σαν πρωτοπόρους, τους Leonard Euler (1707-1783) και Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), στον 18^{o} αιώνα, και σαν δημιουργούς της, τους Emil Artin (1898-1962) και Otto Schreier (1901-1929).

Συντομογραφίες. Εστω Α δακτύλιος και Β μη κενό υποσύνολό του. 1) Με Β+Β (αντ. ΒΒ) παριστάνουν το σύνολο των αθροισμάτων (αντ. γινομένων) δύο στοιχείων του Β. 2) Με -Β, το σύνολο των αντιθέτων με τα στοιχεία του Β, στοιχείων του Α. (Βλ. και Προσάρτημα δεύτερο, 2.)

Ορισμός 1. Ενας δακτύλιος Α, εφοδιασμένος με μιά σχέση διατάξεως ≤, θα καλείται *διατεταγμένος*, όταν, γιά κάθε τρία στοιχεία του α, β, γ, ισχύουν οι επόμενες δύο προτάσεις:

Δ.1) Η $\beta \le \gamma$ συνεπάγεται την $\alpha+\beta \le \alpha+\gamma$.

Δ.2) Αν $\alpha \ge 0$, η $\beta \le \gamma$ συνεπάγεται την $\alpha\beta \le \alpha\gamma$.

(Επεκτείνουν, δηλαδή, στην γενική περίπτωση, σαν *επιτάγματα*, ό,τι είχαμε, από το σχολείο, σαν *δεδομένα*, γιά τους **Z**, **Q**, **R**.)

Πρόταση 1. *Το σύνολο* P *των θετικών στοιχείων διατεταγμένου δακτυλίου* A *έχει τις ιδιότητες*:
P.1) $P+P \subseteq P$. P.2) $PP \subseteq P$. P.3) $P \cap -P = \{0\}$.
P.4) $P \cup -P = A$.
Απόδειξη. Γιά την P.1): Εστω $0 \leq \alpha$ και $0 \leq \beta$.
Από την Δ..1), $\alpha \leq \alpha+\beta$. Αρα, αφού $0 \leq \alpha$, και $0 \leq \alpha+\beta$.
Γιά την P.2): Από την Δ.2), $0 \leq \alpha\beta$. Οι P.3) και P.4), προφανείς. □

Ορισμός 2. Κάθε υποσύνολο P δακτυλίου A, που έχει τις ιδιότητες P.1) - P.4), καλείται θετικός κώνος του A.

Παρατήρηση. Εάν είχαμε μόνο την ιδιότητα $P+P \subseteq P$, δεν θα μπορούσαμε να διακρίνουμε το σύνολο των ≤ 0 στοιχείων από το σύνολο των ≥ 0· γιατί, και τα δύο έχουν αυτή την ιδιότητα. Με την $PP \subseteq P$, όμως, δεν συμβαίνει το ίδιο· γιατί, το γινόμενο δύο αρνητικών είναι θετικό στοιχείο.

Πρόταση 2. *Εάν* P *θετικός κώνος δακτυλίου* A, *η συμφωνία*
"$\alpha \leq \beta$, *αν και μόνον αν,* $\beta-\alpha \in P$" *καθιστά την* $\leq$ *σχέση διατάξεως επάνω στον* A, *η οποία ικανοποιεί τις* Δ1) - Δ.2).
Απόδειξη. 1) Αφού $0 \in P$, $\alpha-\alpha \in P$, άρα, $\alpha \leq \alpha$. 2) Οι $\alpha \leq \beta$ και $\beta \leq \alpha$ σημαίνουν, από την συμφωνία: $\beta-\alpha \in P$ και $\alpha-\beta \in P$· Άρα, από την P.3), $\alpha = \beta$. 3) Οι $\alpha \leq \beta$ και $\beta \leq \gamma$ σημαίνουν, από την συμφωνία: $\beta-\alpha \in P$ και $\gamma-\beta \in P$· άρα, από την P.1), και $\gamma-\alpha \in P$· δηλαδή, $\alpha \leq \gamma$. Η P.4) συνεπάγεται ότι, είτε $\beta-\alpha \in P$ είτε $\beta-\alpha \in -P$· δηλαδή, είτε $\beta \leq \alpha$ είτε $\alpha \leq \beta$. 5) Η $\beta \leq \gamma$ συνεπάγεται ότι $\gamma-\beta \in P$.
Εξ' άλλου, $\alpha+\gamma-(\alpha+\beta) = \gamma-\beta$. Αρα, $\alpha+\beta \leq \alpha+\gamma$. 6) Η $0 \leq \alpha$ σημαίνει ότι $\alpha \in P$. Επομένως, από την P.2), $\alpha(\gamma-\beta) \in P$. Αρα, $\alpha\gamma-\alpha\beta \in P$· δηλαδή, $\alpha\beta \leq \alpha\gamma$. □

Πόρισμα των προτάσεων 1 και 2. Το σύνολο των θετικών κώνων δακτυλίου A και το σύνολο των διατάξεών του, που είναι συμβιβαστές με το + και το · του A, βρίσκονται σε αντιστοιχία 1-1 και επί μεταξύ τους. Κάθε θετικός κώνος ορίζει μία και μόνον διάταξη· και, αντιστρόφως, κάθε διάταξη, έναν και μόνο θετικό κώνο.

Υπόθεση γιά όλα τα επόμενα (εκτός αν δηλωθή το αντίθετο). Ολοι οι διατεταγμένοι δακτύλιοι, που θεωρούμε παρακάτω, έχουν πολλαπλασιαστικό ουδέτερο στοιχείο, "μονάδα". Θα την παριστάνουμε με 1, αλλά δεν θα πρέπει να την συγχέουμε με τον φυσικό αριθμό 1.

Πρόταση 3. Σε κάθε διατεταγμένο δακτύλιο, με 1, όλα τα τετράγωνα μη μηδενικών στοιχείων του είναι > 0.
Απόδειξη. Από την P.4), ο P έχει και μη μηδενικά στοιχεία. Συγκεκριμένα, ένα, τουλάχιστον, από τα -1, 1 θα ανήκη στον P. Εστω ότι $-1 \in P$. Τότε, από την P.2), $(-1)(-1) \in P$· αλλά, από την $(-1)(-1)+(-1)1 = 0$, $(-1)(-1) = 1$. Αρα, $1 \in P$. Ομως, η P.3) αποκλείει να είναι και $-1 \in P$ και $1 \in P$. Φθάσαμε, λοιπόν, σε άτοπο. Αρα, η υπόθεση $-1 \in P$ απορρίπτεται. Επομένως, $1 \in P$. Ας είναι, τώρα, το α τυχόν μη μηδενικό στοιχείο του A. Αν $\alpha \in P$, από την P.2), $\alpha^2 \in P$. Αν $\alpha \notin P$, από την P.4), $-\alpha \in P$. Επομένως, $(-\alpha)(-\alpha) \in P$· αλλά, $(-\alpha)(-\alpha) = (-1)^2\alpha^2$. Αρα, $\alpha^2 \in P$.
□

Από την αποδεικτική διαδικασία, βλέπουμε ότι ο δακτύλιος, που παράγει η μονάδα του Α, δηλαδή, ο {0, 1, -1, 1+1, -1-1, . . . } είναι *ισόμορφος με τον* **Z** υποδακτύλιος του Α.

Σχόλιο. Ο ορισμός 1 είναι *θεμελιώδης*. Ο ορισμός 2 αναφέρεται σε γεγονός *καίριο*. Ο επόμενος ορισμός 3 είναι βοηθητικός, αλλά χρήσιμος.

Ορισμός 3. Σε δακτύλιο Α, με 1, υποσύνολό του Ρ καλείται *προθετικός κώνος του* αν ικανοποιή τα επιτάγματα:

P.1) $P+P \subseteq P$. P.2) $PP \subseteq P$. P.3΄) $-1 \notin P$. P.4΄) $A^2 \subseteq P$.

Συμβολισμός. Σύμφωνα με ό,τι είπαμε παραπάνω, το $A^2 \subseteq P$ σημαίνει ότι όλα τα τετράγωνα στοιχείων του Α ανήκουν στο Ρ.

Ονομάζουμε *προδιάταξη* του Α (ή, στο Α ή, επάνω στο Α), κάθε διμελή σχέση $\alpha <^* \beta$, που είναι ανακλαστική ($\alpha <^* \alpha$) και μεταβατική ($\alpha <^* \beta$ και $\beta <^* \gamma$, συνεπάγονται $\alpha <^* \gamma$). Λένε ότι ο Α είναι *προδιατεταγμένος* όταν έχη μιά προδιάταξη, γιά την οποία ισχύουν οι ιδιότητες Δ.1) και Δ.2). Επεκτείνουμε και εδώ τον ορισμό θετικών και αρνητικών στοιχείων.

Πρόταση 2΄. Εάν Π προθετικός κώνος δακτυλίου Α, η συμφωνία
"$\alpha <^* \beta$, αν, και μόνον αν, $\beta-\alpha \in P$" καθιστά την $<^*$ σχέση προδιατάξεως επάνω στο Α, η οποία ικανοποιεί τις Δ.1) και Δ.2)· δηλαδή, καθιστά τον Α προδιατεταγμένο δακτύλιο.
Απόδειξη. Τα 1), 3), 5) και 6), όπως στην απόδειξη της προτάσεως 2. □

Σχόλιο. Η προδιάταξη διαφέρει από την μερική διάταξη, κατά το ότι από τις $\alpha <^* \beta$ και $\beta <^* \alpha$ δεν έπεται, υποχρεωτικά, ότι $\alpha = \beta$ (δεν έχουμε αντισυμμετρία)· και, από την ολική, στο ότι, εκτός απ΄ την προηγούμενη έλλειψη, υπάρχουν, ενδεχομένως, και στοιχεία μη συγκρίσιμα μεταξύ τους.

Το βασικό θεώρημα των Emil Artin και Otto Schreier (μέσα δεκαετίας 1920) λέει ότι, ένα σώμα επιδέχεται διάταξη, με τις ιδιότητες Δ.1) και Δ.2) (:είναι διατάξιμο) αν, και μόνον αν, δεν υπάρχη πεπερασμένο πλήθος τετραγώνων στοιχείων του, όχι όλων μηδενικών, που να έχη άθροισμα ίσο με το μηδέν (ισοδυνάμως, με το -1).
Η απόδειξή τους ήταν "έμμεση". Χρόνια αργότερα, ο νεαρός, τότε, Jean Pierre Serre είχε την ιδέα να προσπαθήση να το αποδείξη άμεσα, με χρήση των προδιατάξεων, δηλαδή, των προθετικών κώνων. Συγκεκριμένα, έδειξε ότι, *κάθε προδιάταξη επάνω σε σώμα* Α, *που ικανοποιεί τις* Δ.1) *και* Δ.2) *και, επί πλέον, έχει τις ιδιότητες το* -1 *να μην είναι* ≥ 0 *και τα τετράγωνα στοιχείων του* Α *να είναι όλα θετικά, μπορεί να επεκταθή σε διάταξη, που κι αυτή έχει όλες αυτές τις ιδιότητες· και επομένως, το* Α *γίνεται, έτσι, διατεταγμένο σώμα.*
Το τελευταίο αποτέλεσμα ισχύει και γιά δακτύλιο, αντί γιά σώμα, *εφ' όσον περιορίσουμε τα συμπεράσματα στα επόμενα: Να ισχύουν οι* P.1), P.2) *και* P.4) *και το* $P' \cap -P'$ *να είναι πρώτο ιδεώδες·* όπου, ο Ρ, *ο προθετικός κώνος, που αντιστοιχεί στην επέκταση της προδιατάξεως·* αναγκαία, αξεπέραστος προς τα επάνω, αφού ισχύη η P.4).

Αφού αναφέραμε την κατευθυντήρια πορεία του Serre, οργανώνουμε, τώρα, την παρουσίαση της αποδείξεως σε διαδοχικά βήματα, ώστε να είναι καταφανής η λογική της. (Αυτό, δεν γίνεται έτσι, στα βιβλία).

1. Μιά συνέπεια των P.1) και $-1 \notin P$: $-P \cap 1+P = \varnothing$. (S.1)

Απόδειξη. Εις άτοπον απαγωγή. Εστω ότι υπήρχαν στοιχεία p_1 και p_2 του P, με $-p_1 = 1+p_2$, δηλαδή, $-1 = p_1+p_2$.
Αυτό και η P.1) δίνουν $-1 \in P$, άτοπο. □

2. Γιά κάποιο αυθαίρετα εκλεγμένο στοιχείο x του A, θεωρούμε τα P-Px και P+Px.
Το καθ΄ ένα απ΄ αυτά ικανοποιεί τις P.1), P.2) και $A^2 \subseteq P \pm Px$.
Απόδειξη. 1) Γιά το στοιχείο 0 του P, το καθ΄ ένα απ΄ αυτά γράφεται $P \pm P0 = P$. Αρα, και τα δύο περιέχουν το P και, επομένως, και το A^2. 2) $(P+Px)+(P+Px) = P+Px+P+Px = (P+P)+(P+P)x \subseteq P+Px$.
3) $(P-Px)+(P-Px) = P-Px+P-Px = (P+P)-(P+P)x \subseteq P-Px$.
4) $(P+Px)(P+Px) = PP+(P+P)x+PPx^2 \subseteq (P+Px^2)+Px \subseteq P+Px$ (αφού $x^2 \in P$).
5) $(P-Px)(P-Px) = PP-(P+P)x+PPx^2 \subseteq (P+Px^2)-Px \subseteq P-Px$. □

3. Οι τομές $-Px \cap 1+P$ και $Px \cap 1+P$ *δεν μπορούν να είναι και οι δύο μη κενές*.
Απόδειξη. Εις άτοπον απαγωγή. Εστω ότι υπήρχαν στοιχεία p_1, p_2 p_3, p_4, του P, με $-p_1x = 1+p_2$ και $p_3x = 1+p_4$. Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη, λαβαίνουμε: $-p_1p_3x^2 = 1+p_2+p_4+p_2p_4$, δηλαδή, $-1 = p_1p_3x^2+p_2+p_4+p_2p_4$, άρα, $-1 \in P$, άτοπο. □

4. $-Px \cap 1+P = \varnothing \Leftrightarrow -1 \notin P+Px$. (S.2)
$Px \cap 1+P = \varnothing \Leftrightarrow -1 \notin P-Px$. (S.2΄)
Απόδειξη. 1) Εστω ότι $-Px \cap 1+P \neq \varnothing$. Τότε, υπάρχουν στοιχεία p_1, p_2 του P με $-p_2x = 1+p_1$, δηλαδή $-1 = p_1+p_2x$, που συμβαίνει αν, και μόνον αν, $-1 \in P+Px$. Φανερή, η αντίστροφη πορεία.
2) Εστω ότι $-1 \in P-Px$. Τότε, υπάρχουν στοιχεία p_1 p_2 του P,
με $-1 = p_1-p_2x$, δηλαδή, $p_2x = 1+p_1$, κάτι που συμβαίνει αν, και μόνον αν,
$Px \cap 1+P \neq \varnothing$. Φανερή, η αντίστροφη πορεία □

5. Αν $P+Px = P$, $x \in P$. και αν $P-Px = P$, $-x \in P$.
Απόδειξη. 1) $0+1x \in P$. 2) $0+1\,(-x) \in P$. □

6. Συνέπεια της 4: $-Px \cap 1+P = \varnothing \Rightarrow$ 0 P+Px είναι προθετικός κώνος που, φυσικά, περιέχει τον P.
$Px \cap 1+P = \varnothing \Rightarrow$ 0 P-Px είναι προθετικός κώνος που, φυσικά, περιέχει τον P.

7. *Εστω ότι ο* P *είναι αξεπέραστος προς τα επάνω προθετικός κώνος*. Τότε, αν και ο P+Px (αντ. P-Px) είναι προθετικός κώνος, $x \in P$ (αντ. $x \in -P$).

8. Συνέπεια της 3. : Μιά, τουλάχιστον, από τις επόμενες δυό προτάσεις ισχύει: 1) *Ο* P+Px *είναι προθετικός κώνος*. 2) *Ο* P-Px *είναι προθετικός κώνος*.

9. Εστω ότι ισχύει η υπόθεση της 7. Τότε, η μιά, τουλάχιστον, από τις επόμενες σχέσεις ισχύει: $x \in P$, $x \in -P$.

Τα προηγούμενα, όλα, δεν χρησιμοποιούν συλλογισμούς, που να μη μπορούσαν, γνωσιολογικά, να έχουν γίνη στο Λύκειο. Είναι όλοι *στοιχειώδεις*. Γιά να μπορέσουν να συμπληρωθούν, ώστε να γίνουν *αποτελεσματικοί*, γιά τον συγκεκριμένο σκοπό, χρειαζόταν και ένας *μη στοιχειώδης* συλλογισμός, το *Λήμμα του Zorn* (βλέπε και σελ. 77)

Λήμμα 1. (J.P. Serre). *Εστω ότι ο* P_o *είναι ένας προθετικός κώνος του με* 1 *δακτυλίου* A. *Υπάρχει, τότε, προθετικός κώνος* P *του* A, *με* $P \supseteq P_o$ *και, επι πλέον, τις ιδιότητες*: P.4) και το $P \cap -P$ *να είναι πρώτο ιδεώδες*.

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο Σ των προθετικών κώνων του A, που περιέχουν τον P_o, με τη σχέση του περιέχεσθαι. Αν F οικογένεια απ΄ αυτούς, ολικώς διατεταγμένη με την σχέση αυτή ($\subseteq$), *η ένωσή της αποτελεί, φανερά, προθετικό κώνο, που περιέχει τον* P_o. (Απόδειξη. Το A^2 περιέχεται στον P_o, άρα, και σε κάθε ένωση περιεχόντων αυτόν συνόλων. Το -1 δεν ανήκει σε κανέναν προθετικό κώνο, άρα, ούτε στην ένωση οικογενείας προθετικών κώνων. Αν $p_1 \in P_1$ και $p_2 \in P_2$, με $P_1 \subseteq P_2$, το p_1 και το p_2 ανήκουν και τα δύο στο P_2 άρα, και $p_1+p_2 \in P_2$, $p_1p_2 \in P_2$). Αρα, το Σ είναι *επαγωγικό*. Επομένως, κατά το Λήμμα του Zorn, υπάρχει άξεπέραστος προς τα επάνω, στο Σ, προθετικός κώνος P, με $P \supseteq P_o$. Με την λήψη αυτή του P, ικανοποιείται η υπόθεση της 7, άρα, ισχύει η 9. Δηλαδή, ισχύει μία, τουλάχιστον, από τις επόμενες σχέσεις: $x \in P$, $x \in -P$. Ο x ήταν αυθαίρετα εκλεγμένο στοιχείο του A. *Συνέπεια*: $x \in P \cup -P$, η P.4).

Απομένει να δείξουμε ότι το $P \cap -P$ είναι πρώτο ιδεώδες. Ας καλέσουμε H το $P \cap -P$. Αποδεικνύουμε πρώτα, ότι είναι *ιδεώδες*, δηλαδή, ότι $H\text{-}H \subseteq H$ και $AH \subseteq H$. Ας είναι α και β δύο στοιχεία του H. Αφού $\alpha \in P$ και $\beta \in -P$ (αντ. $\alpha \in -P$ και $\beta \in P$), α-β (αντ. β-α) $\in P$. Αλλά, ας είναι το γ στοιχείο του A. Αφού $\alpha \in P$ (αντ. $\alpha \in -P$), $\gamma\alpha \in P$ (αντ. $\gamma\alpha \in -P$).

Να δείξουμε, τώρα, ότι το ιδεώδες είναι *πρώτο*, δηλαδή, ότι αν $\alpha\beta \in H$, *το ένα, τουλάχιστον, από τα* α και β ανήκει στο H. Εδώ, πρέπει να γίνη περιπτωσιολογία. Θα την κάνουμε γιά μιά περίπτωση και οι άλλες είναι ίδιες.

Εστω ότι $\alpha \in P$ και $\beta \in P$. Εις άτοπον απαγωγή. Εστω ότι $\alpha \notin -P$ και $\beta \notin -P$. Χρησιμοποιούμε τα παραπάνω. Αφού $\alpha \notin -P$, ο P-Pα *δεν* είναι προθετικός κώνος, άρα, $P\alpha \cap 1+P \neq \emptyset$ και, αφού, $\beta \notin -P$, ο P-Pβ *δεν* είναι προθετικός κώνος, άρα, $P\beta \cap 1+P \neq \emptyset$.

Υπάρχουν, επομένως, στοιχεία p_1, p_2, p_3, p_4 του P, με $p_2\alpha = 1+p_1$, $p_4\alpha = 1+p_3$.

Πολλαπλασιάζοντας, κατά μέλη, λαβαίνουμε: $p_2p_4\alpha\beta = 1+p_1+p_3+p_1p_3$, δηλαδή, $-1 = -p_2p_4\alpha\beta+p_1+p_3+p_1p_3$. Ομως, από υπόθεση, $\alpha\beta \in -P$ άρα, $-p_2p_4\alpha\beta \in P$. Επομένως, $-1 \in P$, άτοπο. □

Ειδική περίπτωση. Ο δακτύλιος A είναι σώμα. *Τότε, αν υπάρχη στο* A *προθετικός κώνος, γιά κάθε αξεπέραστο προς τα επάνω προθετικό κώνο* P, *που τον περιέχει, ισχύει και ότι* $P \cap -P = \{0\}$, δηλαδή, η P.3)· *δηλαδή, ο* P *είναι θετικός κώνος, επομένως, το* A *είναι διατάξιμο*. Αυτά, *γιατί κάθε σώμα έχει, σαν ιδεώδη, μόνο τον εαυτό του και το* {0}.

(**Απόδειξη**. Εστω α στοιχείο ιδεώδους σώματος. Αν $\alpha \notin \{0\}$, θα πρέπει και το $\alpha^{-1}\circ\alpha$ να ανήκη στο ιδεώδες, δηλαδή η μονάδα του σώματος, ανήκει στο ιδεώδες· άρα, το ιδεώδες συμπίπτει με το σώμα). Εξ’ άλλου, τότε, γιά $x \neq 0$, μόνο μία από τις $-P_x \cap 1+P = \emptyset$, $P_x \cap 1+P = \emptyset$ ισχύει. (Αφού η πρώτη συνεπάγεται ότι $x \in P$ και η δεύτερη, $x \in -P$.)

Παρατήρηση. Φανερά, κάθε θετικός κώνος δακτυλίου (πάντα, με μονάδα) είναι και προθετικός κώνος του· γιατί, από την πρόταση 3, $A^2 \subseteq P$ και, αφού $1 \in P$ και $A = P \cup -P$, $-1 \in -P$, άρα, αφού $P \cap -P = \{0\}$, $-1 \notin P$.

Πόρισμα. **1**. *Κάθε προθετικός κώνος* P_o *σώματος μπορεί να επεκταθή σε θετικό κώνο* P *του σώματος* ($P \supseteq P_o$).

Εστω A σώμα. Παριστάνουν με S_A το σύνολο των πεπερασμένων αθροισμάτων τετραγώνων στοιχείων του σώματος.

Πρόταση 4. 1) *Το* S_A *περιέχεται σε κάθε προθετικό κώνο του* A.

2) $S_A+S_A \subseteq S_A$.

3) Το $S_A \backslash\{0\}$ είναι πολλαπλασιαστική υποομάδα του $A\backslash\{0\}$.

Απόδειξη. 1). Πόρισμα των $A^2 \subseteq P$ και $P+P \subseteq P$. Με την προϋπόθεση, βέβαια, ότι το A έχει προθετικό κώνο.

2). Προφανές.

3). Αν $\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^2 \neq 0$, $\dfrac{1}{\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^2} = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\dfrac{\alpha_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^2} \right)^2$ (στοιχειώδης ταυτότητα) □

Παρατήρηση. Αν $S_A \neq A$, $-1 \notin S_A$.

Απόδειξη. Εις άτοπον απαγωγή. Εστω ότι $-1 \in S_A$. Χρησιμοποιώ, τώρα, την στοιχειώδη ταυτότητα $\alpha = \left(\dfrac{\alpha+1}{2}\right)^2 + (-1)\left(\dfrac{\alpha-1}{2}\right)^2$, η οποία ισχύει γιά κάθε $\alpha \in A$. Αφού, τώρα, $-1 \in S_A$, η ταυτότητα αυτή συνεπάγεται ότι και $\alpha \in S_A$, δηλαδή, $A = S_A$, άτοπο. □

Θεώρημα 1. (Artin-Schreier). *Γιά κάθε σώμα* A, *τα επόμενα είναι ισοδύναμα*:

1). *Το* A *είναι διατάξιμο*.

2). $-1 \notin S_A$.

3). *Ενα πεπερασμένο άθροισμα τετραγώνων στοιχείων του* A (δηλαδή, ένα στοιχείο του S_A) *είναι ίσο πρός το μηδέν αν, και μόνον αν, όλοι οι προσθετέοι είναι ίσοι πρός το μηδέν*.

4). $S_A \neq A$.

Απόδειξη. $1 \Rightarrow 2$. Από τις προτάσεις 1 και 3, όλα τα στοιχεία του S_A είναι ≥ 0. Από την πρόταση 1, μόνο το 0 είναι και ≥ 0 και ≤ 0. Τώρα, αφού $1 > 0$ και $(-1)+1 > -1$, $0 > -1$. Αρα, $-1 \notin S_A$.

$2 \Rightarrow 3$. Εις άτοπον απαγωγή. Εστω ότι υπάρχουν $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, όχι όλα μηδενικά, με $\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_\nu^2 = 0$. Εστω π.χ. ότι $\alpha_1 \neq 0$ τότε, η ισότητα γράφεται $1 + \left(\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{\alpha_\nu}{\alpha_1}\right)^2 = 0$, δηλαδή, $-1 = \left(\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{\alpha_\nu}{\alpha_1}\right)^2$. Αρα, $-1 \in S_A$. Ατοπο.

$2 \Rightarrow 1$. Η υπόθεση $-1 \notin S_A$ εξασφαλίζει ότι το S_A είναι προθετικός κώνος· άρα, ότι υπάρχει θετικός κώνος $P \supseteq S_A$, άρα ότι το A είναι διατάξιμο.

$4 \Rightarrow 2$. Είναι η αμέσως πρίν από το θεώρημα παρατήρηση.

$3 \Rightarrow 2$. Εις άτοπον απαγωγή. Εστω ότι $-1 \in S_A$. Θα υπήρχαν, τότε, στοιχεία $\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$ του A, με $\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_\nu^2 = -1$, άρα τέτοια στοιχεία όχι όλα μηδενικά. Επομένως, όταν αυτό αποκλείεται, και η $-1 \in S_A$ αποκλείεται. □

Εφαρμογές. Το **C** (αντ. **Z**/(p)) δεν είναι διατάξιμο· γιατί, $i^2+1 = 0$ (αντ. 1+ . . . +1 p φορές = 0)

Σχόλιο. Συμπέρασμα από τα προηγούμενα: *Το αν είναι διατάξιμο ή όχι ένα σώμα*, κρίνεται από το άν έχη *προθετικό κώνο* ή όχι..

Σ΄ αυτό βρίσκεται και η πρόοδος, που έκανε ο Serre ως προς τους *θεμελιωτές* της θεωρίας Emil Artin και Otto Schreier. Εδειξε ότι αρκούν οι *προδιατάξεις* γιά να κριθούν τα πράγματα.

Πόρισμα 2 (του λήμματος 1). *Κάθε προθετικός κώνος* P_o *σώματος είναι ίσος με την τομή όλων των θετικών κώνων* P, *που επεκτείνουν τον* P_o.

Απόδειξη. Από τους ορισμούς, ο P_o περιέχεται στην τομή αυτή. Εστω, τώρα, στοιχείο x του A, με $x \notin P_o$. Εστω ότι $P_o x \cap 1+P_o \neq \emptyset$. Υπάρχουν, τότε, στοιχεία p_1 και p_2 του P_o, με $p_1 x = 1+p_2$. Αφού βρισκόμαστε σε σώμα, μπορούμε να κάνουμε διαίρεση. Επομένως,

$x = \dfrac{1+p_2}{p_1} = (1+p_2)p_1\left(\dfrac{1}{p_1}\right)^2$. Ομως, $1+p_2 \in P_o$ (αφού $1 \in P_o$), άρα, $x \in P_o$.·

άτοπο. Επομένως, $P_o x \cap 1+P_o = \emptyset$.

Ακριβώς, όπως στην απόδειξη του λήμματος 1, θέτουν $P' = P_o - P_o x$ και αποδεικνύουν ότι ο P' είναι προθετικός κώνος, που περιέχει (= επεκτείνει) τον P_o, και στον οποίον ανήκει το -x. Από το πόρισμα 1, ο P' μπορεί να επεκταθή σε θετικό κώνο, ο οποίος, αφού έχη το -x, *δεν μπορεί να έχη και το x*. Αρα, γιά κάθε $x \notin P_o$, υπάρχει και θετικός κώνος, που επεκτείνει τον P_o και *δεν* έχει το στοιχείο x. □

Πόρισμα (όλων των προηγουμένων). *Γιά κάθε σώμα* A, *το* S_A *είναι ίσο με την τομή όλων των θετικών κώνων του* A.

Απόδειξη. 1). Εστω ότι το A επιδέχεται διάταξη, με την οποία γίνεται διατεταγμένο. Τότε, αφού γιά κάθε θετικό κώνο P του A, $S_A \subseteq P$, το αποδεικτέο είναι ειδική περίπτωση του πορίσματος 2 του λήμματος 1. 2). Εστω ότι το A δεν επιδέχεται τέτοια διάταξη. Τότε, $S_A = A$.Τώρα, στην άλγεβρα των συνόλων, συμφωνούν *να ορίζουν* ως τομή *κενής* οικογένειας υποσυνόλων συνόλου το ίδιο το σύνολο. Επομένως, η "τομή" αυτή είναι ίση, εδώ, με το A, άρα, με το S_A.

Σημείωση. Τον ορισμό αυτόν δεν τον έχουμε αναφέρει προηγουμένως.

Πρόταση 5. *Ας είναι οι* P_1, P_2 *θετικοί κώνοι σώματος* A.
Τότε, η $P_1 \subseteq P_2$ *συνεπάγεται την* $P_1 = P_2$.

Απόδειξη. Θα υπάρχη ένα τουλάχιστον στοιχείο $x \neq 0$, με $x \in P_2$ και $x \notin P_1$. Τότε, αναγκαία, $-x \in P_1$, άρα, κατά μείζονα λόγο και $-x \in P_2$, άτοπο, αφού $-x \in P_2$ και $x \in P_2$ συνεπάγωνται ότι $x = 0$. □

Λήμμα (της "μοναδικότητας"). *Σε σώμα* A, *το* S_A *είναι θετικός κώνος του αν, και μόνον αν, το* A *επιδέχεται μία και μοναδική διάταξη.*

Απόδειξη. α) Από τις P.3) και P.1) έπεται ότι, γιά κάθε θετικό κώνο P του A, $S_A \subseteq P$. Εστω, τώρα, ότι το S_A είναι θετικός κώνος. Τότε, από την πρόταση 5, η $S_A \subseteq P$ συνεπάγεται $S_A = P$. β). Εστω ότι το A επιδέχεται μιά και μόνο διάταξη. Αυτό, σημαίνει ότι έχει έναν και μόνον θετικό κώνο P, γιά τον οποίο, αναγκαία, ισχύει ότι $S_A \subseteq P$. Αφού, τώρα, από το πόρισμα του θεωρήματος 1, το S_A είναι ίσο με την τομή των θετικών κώνων, που το περιέχουν, $P = S_A$. □

Εφαρμογές. 1) Στο **R**, κάθε ≥ 0 στοιχείο του μπορεί να γραφτή σαν τετράγωνο της θετικής ρίζας του, άρα, ανήκει στο $\mathbf{R}^2$ και, κατά μείζονα λόγο, στο $S_{\mathbf{R}}$. Αρα, το **R** επιδέχεται μιά και μόνο διάταξη, την συνηθισμένη.

2) Στο **Q**, κάθε ≥ 0 στοιχείο του μπορεί να γραφτή $\dfrac{1+\ldots+1}{1+\ldots+1}$ (μ προσθετέοι στον αριθμητή και ν προσθετέοι στον παρονομαστή), δηλαδή, σαν κλάσμα, με αριθμητή και παρονομαστή, που είναι μη μηδενικά στοιχεία του $S_{\mathbf{Q}}$. Με εφαρμογή του 3) της προτάσεως 4, έχουμε ότι και το ίδιο το κλάσμα ανήκει στο $S_{\mathbf{Q}}$. Αρα, και το **Q** επιδέχεται μιά και μόνο διάταξη, την συνηθισμένη.

Μέρος δεύτερο

Ημιδιατάξεις σωμάτων.

Γενική παρατήρηση. Συχνά, οι γόνιμες γενικεύσεις έχουν ξεκινήσει από παρατηρήσεις που έγιναν κατά την εμβάθυνση σε συγκεκριμένα μαθηματικά θέματα, με ουσιαστικό περιεχόμενο.
Σε σχετικά πρόσφατη εποχή και με αφορμή εργασίες στό, με κεφαλαιώδη σημασία γιά τα μαθηματικά, θέμα των τετραγωνικών μορφών, το περιεχόμενο των προηγουμένων σελίδων γενικεύθηκε, όπως εκτίθεται στα επόμενα.

Ορισμός 1΄. Ενα σώμα Α, εφοδιασμένο με μιά σχέση διατάξεως $\leq$ καλείται *ημιδιατεταγμένο*, όταν, γιά κάθε τρία στοιχεία του α, β, γ, ισχύουν τα επόμενα:
Δ.1) Η $\beta \leq \gamma$ συνεπάγεται την $\alpha+\beta \leq \alpha+\gamma$.
Η) $0 < 1$ και η $0 \leq \alpha$ συνεπάγεται την $0 \leq \alpha\beta^2$. Θα καλέσουμε Η΄, την $1 \in P$ και $PA^2 \subseteq P$.

Ορολογία. Παλαιότερα, γιά τα ημιδιατεταγμένα σώματα, είχε χρησιμοποιηθή και ο όρος "q-διατεταγμένα".

Πρόταση 1΄. *Το σύνολο* Ρ *των θετικών στοιχείων ημιδιατεταγμένου σώματος έχει τις ιδιότητες*: Ρ.1) $P+P \subseteq P$. Η΄) $1 \in P$ και $PA^2 \subseteq P$. Ρ.3) $P \cap -P = \{0\}$. Ρ.4) $P \cup -P = A$.
Απόδειξη. 1΄ Η Ρ.1), όπως στην πρόταση 1. Η΄) Φανερή. 3΄) και 4΄) Φανερές.
□

Ορισμός 2΄**.** Σε σώμα Α, υποσύνολό του Ρ καλείται *ημίκωνος*, αν ικανοποιή τα επιτάγματα Ρ.1) $P+P \subseteq P$. Η΄) $1 \in P$ και $PA^2 \subseteq P$. Ρ.3) $P \cap -P = \{0\}$. Ρ.4) $P \cup -P = A$.

Πρόταση 2΄. *Εάν* Ρ *ημίκωνος σώματος* Α, *η συμφωνία* "$\alpha \leq \beta$ *αν, και μόνον αν*, $\beta-\alpha \in P$" *καθιστά την* $\leq$ *σχέση διατάξεως επάνω στο* Α, *η οποία ικανοποιεί τις* Δ.1) και Η).
Απόδειξη. Οι 1΄) - 5΄), ΄οπως και στην πρόταση 2. Η 6΄), φανερή. □

Πόρισμα των προτάσεων 1΄ **και** 2΄. *Το σύνολο των ημικώνων σώματος* Α *και το σύνολο των ημιδιατάξεών του* (δηλαδή, των διατάξεών του, που είναι συμβιβαστές με το + και ικανοποιούν το Η)) *βρίσκονται σε αντιστοιχία* 1-1 *και επί μεταξύ τους. Κάθε ημίκωνος ορίζει μιά και μόνον ημιδιάταξη και, αντιστρόφως, κάθε ημιδιάταξη, ορίζει έναν και μόνον ημίκωνο.*

Δίνουμε τον επόμενο ορισμό, που είναι "επιχειρησιακά" χρήσιμος.

Ορισμός 3΄. Σε σώμα Α, υποσύνολό του Ρ καλείται *προημίκωνος*, αν ικανοποιή τα επιτάγματα:
Ρ.1) $P+P \subseteq P$. H_1) $PA^2 \subseteq P$ και Ρ.3) $P \cap -P = \{0\}$.

Παρατηρήσεις προφανείς. 1) Κάθε ημίκωνος είναι και προημίκωνος. 2) *Το* P.1), P.3), H_1)) *είναι ισοδύναμο με το* (P.1), P.3), $PS_A \subseteq P$).
Απόδειξη. α) $A^2 \subseteq S_A$, άρα, $PA^2 \subseteq PS_A$ και επομένως, η $PS_A \subseteq P$ συνεπάγεται την H_1). β) Γιά $(\alpha_1^2, \dots, \alpha_\nu^2) \in A^\nu$ και $p \in P$, $p(\alpha_1^2 + \dots + \alpha_\nu^2) = p\alpha_1^2 + \dots + p\alpha_\nu^2$. Οταν $PA^2 \subseteq P$, το δεξιό μέλος της ισότητας ανήκει στο P, άρα, και το αριστερό. □

Λήμμα 2. *Εστω ότι ο* P *είναι προημίκωνος διαταξίμου σώματος* A *και ας ισχύη ότι* $x \notin P$, *γιά κάποιο στοιχείο* x *του* A (δηλαδή, $x \in A \backslash P$). *Υπάρχει, τότε προημίκωνος* P′ *του* A, *με* $P \subseteq P'$ *και* $-x \in P'$.
Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο $P' = P - xS_A$. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι αυτό είναι προημίκωνος.
1) $P - xS_A + P - xS_A = P + P - (xS_A + xS_A) = P + P - x(S_A + S_A) \subseteq P - xS_A$.
Επομένως, $P' + P' \subseteq P'$.
2) $(P - xS_A)A^2 = PA^2 - xS_AS^2 = PA - xS_A$. Επομένως, $P'A^2 \subseteq P'$.
3) Εστω ότι υπάρχουν στοιχεία $p \in P$ και $s \in S_A$, με $p - xs \in -P'$ (βέβαια, $p - xs \in P'$, από τον ορισμό του P′). Θεωρούμε τώρα τα τυχόντα στοιχεία $p_1 \in P$ και $s_1 \in S_A$, με $p - xs = -p_1 + xs_1$ άρα, θα είναι $p + p_1 - x(s + s_1) = 0$.
Εστω ότι $s + s_1 \neq 0$. Τότε, $x = \dfrac{p + p_1}{s + s_1} = (p + p_1)(s + s_1)^{-1}$. Από την πρόταση 4, (3), ξέρουμε ότι $(s + s_1)^{-1} \in S_A$. Αρα, $x \in pS_A$ και, επομένως, $x \in P$, σε αντίφαση με την υπόθεση $x \notin P$. Αρα, αποκλείεται να είναι $s + s_1 \neq 0$. Επομένως, $s + s_1 = 0$. Τώρα, αφού το A είναι διατάξιμο, από το 3 του θεωρήματος 1, $s = s_1 = 0$. Εξ άλλου, ήδη, από την $s + s_1 = 0$ υποχρεωνόμαστε να έχουμε $p + p_1 = 0$, δηλαδή, $p = -p_1$. Ομως, αφού το P είναι προημίκωνος, αυτό συνεπάγεται ότι $p = p_1 = 0$. Τώρα, αφού $p = 0$ και $s = 0$, είναι και $p - xs = 0$.
Αρα, $P' \cap -P' = \{0\}$. □

Λήμμα 3. *Σε διατάξιμο σώμα* A, *γιά κάθε προημίκωνο* P_o, *υπάρχει υποσύνολο* P *του* A, *με* $P \supseteq P_o$ *και με την ιδιότητα ή ο* P *ή ο* -P *να είναι ημίκωνος του* A.
Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο Σ των προημικώνων του A, που περιέχουν τον P_o εφοδιασμένο με την σχέση του περιέχεσθαι ($\subseteq$). Ακριβώς όπως στην απόδειξη του λήμματος 1 (σελ. 3-4), διαπιστώνουμε ότι αυτό είναι επαγωγικό. (Π.χ. Γιά την ένωση μιάς ολικώς διατεταγμένης με την $\subseteq$ οικογενείας , έχουμε ότι, αφού κάθε P′ της έχει με το -P′ κοινό στοιχείο μόνο το 0, το ίδιο ισχύει και γιά την ένωση των P′ σε σχέση με την ένωση των -P′.) **Απόδειξη**. Με εις άτοπον απαγωγή. Εστω ότι οι δύο αυτές ενώσεις είχαν κοινό στοιχείο $\alpha \neq 0$. Τότε, θα υπήρχε P_i και $-P'_j$, με $\alpha \in P_i \cap -P'_j$.
Αφού η $i = j$ αποκλείεται, θα ήταν ή $i < j$ ή $i > j$.
Εστω ότι $i < j$. Τότε, $P_j \cap -P'_j = \{0\}$ και $P_i \subseteq P_j$. Ατοπο.) Αρα, ισχύει το λήμμα του *Zorn*, σύμφωνα με το οποίο, υπάρχει στο P ένα τουλάχιστο στοιχείο αξεπέραστο προς τα επάνω. Ας καλέσουμε P ένα τέτοιο στοιχείο. Ετσι, ο P είναι αξεπέραστος προς τα επάνω προημίκωνος, με $P \supseteq P_o$. Εστω, τώρα, ένα στοιχείο x του A με $x \notin P$.
Κατά το λήμμα 2, υπάρχει, τότε, προημίκωνος $P' \supseteq P$ με $-x \in P'$. Ομως, ο P είναι αξεπέραστος προς τα επάνω. Αρα, $P' = P$. Επομένως, $-x \in P$.
Αρα, $A = P \cup -P$. Συνεπώς, ο P ή ο -P είναι ημίκωνος. (Είναι εκείνος, στον οποίο ανήκει το 1).

Πόρισμα 1. Σε διατάξιμο σώμα A, το S_A ισούται με την τομή όλων των ημικώνων του.

Απόδειξη. Αφού το A είναι διατάξιμο, $1 \in S_A$˙ και το S_A είναι προημίκωνος. Εστω ότι $x \notin S_A$. Από την σύνθεση των λημμάτων 2 και 3 έπεται ότι υπάρχει ημίκωνος P του A, με $P \supseteq S_A$ και $-x \in P$, άρα, και με $x \notin P$. □

Πόρισμα 2. *Ενα σώμα είναι διατάξιμο αν, και μόνον άν, επιδέχεται ημιδιάταξη.*
Απόδειξη. α) Οταν το A είναι διατάξιμο, επιδέχεται διάταξη, άρα, και ημιδιάταξη. β) Εστω ότι το A έχει ημίκωνο P. Από την H΄), $1 \in P$, άρα, (και χωρίς το πόρισμα 1), $S_A \subseteq P$ [από την H΄), πάλι].
Από την P.3), $P \cap -P = \{0\}$, άρα, $-1 \notin P$. Επομένως, κατά μείζονα λόγο, $-1 \notin S_A$. Αρα, κατά το θεώρημα 1, το A είναι διατάξιμο. □

Πρόταση 5΄. *Ας είναι* P_1, P_2 *ημίκωνοι σώματος* A. *Τότε, η* $P_1 \subseteq P_2$ *συνεπάγεται την* $P_1 = P_2$.
Απόδειξη. Με εις άτοπον απαγωγή. Εστω ότι υπάρχει στοιχείο
$x \neq 0$, που ανήκει στον P_2 και δεν ανήκει στον P_1. Τότε, από τη P.4), $-x \in P_1$, άρα, κατά μείζονα λόγο, και $-x \in P_2$. Επομένως, το $x \neq 0$ ανήκει στην $P_2 \cap -P_2$˙ άτοπο. □

Ορολογία. Μιά ημιδιάταξη ονομάζεται *γνήσια*, όταν δεν είναι διάταξη.

Πόρισμα 3. *Οταν το* A *δέχεται μιά και μόνον ημιδιάταξη, αυτή δεν είναι γνήσια˙ και, επομένως, είναι διάταξη του* A *και, μάλιστα, η μοναδική διάταξη, που δέχεται.*
Απόδειξη. Από το πόρισμα 2, αφού το A επιδέχεται ημιδιάταξη, είναι διατάξιμο. Επομένως, έχει έναν, τουλάχιστον, θετικό κώνο P. Κάθε θετικός κώνος είναι και ημίκωνος, άρα, και ο P είναι ημίκωνος. Μα, από υπόθεση, το A έχει έναν μοναδικό ημίκωνο. Επομένως, ο P είναι ο μοναδικός ημίκωνος *και* κώνος του A. Αρα, η μοναδική ημιδιάταξη του A είναι και διάταξη. □

Λήμμα 5. *Ας είναι η* $\leq$ *ημιδιάταξη σώματος* A. *Τότε, γιά κάθε δύο στοιχεία* α, β *που ανήκουν στο* A, *ισχύουν τα επόμενα*:
(1) Η $0 < \alpha$ συνεπάγεται την $0 < \dfrac{1}{\alpha}$.
(2) Η $0 < \alpha < \beta$ συνεπάγεται την $\beta\alpha^2 < \alpha\beta^2$.
(3) Η $0 < \alpha < \beta$ συνεπάγεται την $\dfrac{1}{\beta} < \dfrac{1}{\alpha}$.
(4) Η $1 < \beta$ συνεπάγεται την $\beta < \beta^2$.
(5) Η $0 < \alpha < 1$ συνεπάγεται την $\alpha^2 < \alpha$.
(6) Η $0 < \alpha < \beta$, με $\alpha \in S_A$ συνεπάγεται την $\alpha^2 < \beta^2$.
(7) Η $0 < \alpha < \beta$, με $\beta \in S_A$ συνεπάγεται την $\alpha^2 < \beta^2$.

Απόδειξη. (1) Από την $PA^2 \subseteq P$, $0 < \alpha \left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^2 = \dfrac{1}{\alpha}$.
(2) Από την P.1), $\beta-\alpha > 0$. Τότε, από την $PA^2 \subseteq P$,

$$0 < \frac{1}{\dfrac{1}{\beta-\alpha}+\dfrac{1}{\alpha}}\beta^2 = \alpha\beta^2-\beta\alpha^2.$$ Τότε, από την P.1), $\beta\alpha^2 < \alpha\beta^2$.

(3) Από την (2), $\alpha\beta^2-\beta\alpha^2 > 0$. Αρα, και $(\alpha\beta^2-\beta\alpha^2)\left(\dfrac{1}{\alpha\beta}\right)^2 > 0$. Αρα, $\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta} > 0$.

Από την Ρ.1), $\frac{1}{\beta} < \frac{1}{\alpha}$.

(4) Η (2), με $\alpha = 1$.
(5) Η (2), με $\beta = 1$.

(6) Από την (2), $\beta\alpha^2 < \alpha\beta^2$ και, από υπόθεση, $\alpha \in S_A$, άρα, και $\frac{1}{\alpha} \in S_A$,

άρα, $\frac{1}{\alpha}(\alpha\beta^2 - \beta\alpha^2) > 0$, άρα, $\beta\alpha < \beta^2$.
Επίσης, από τις $0 < \alpha < \beta$ και $\alpha \in S_A$, $\alpha^2 < \alpha\beta$.
Από τις $\alpha^2 < \alpha\beta$ και $\alpha\beta < \beta^2$, $\alpha^2 < \beta^2$.
(7) Ομοια. □

Κάνουν και την εξής διαπίστωση:

Παρατήρηση. Μιά ημιδιάταξη σώματος Α είναι *διάταξη* (συμβιβαστή) αν, και μόνον αν, γιά *κάθε* δύο στοιχεία α, β του Α, με $0 < \alpha < \beta$, είναι και $\alpha^2 < \beta^2$.
Απόδειξη. Εστω ότι η $\leq$ είναι ημιδιάταξη επάνω στο Α. Γιά να είναι διάταξη, θα πρέπει, γιά κάθε τρία στοιχεία α, β, γ του Α, από τις $\alpha \leq \beta$ και $0 \leq \gamma$, να έπεται η $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$. Υποθέτουμε, πρώτα, ότι $0 < \alpha < \beta$ και $0 < \gamma$. Εστω ότι συνέβαινε $\alpha\gamma > \beta\gamma$. Τότε, θα ήταν και $(\alpha\gamma)^2 > (\beta\gamma)^2$, δηλαδή $\alpha^2\gamma^2 > \beta^2\gamma^2$, δηλαδή, $(\alpha^2-\beta^2)\gamma^2 > 0$.
Εξ άλλου, από την $\beta^2-\alpha^2 > 0$ και την $\gamma^2 > 0$, έπεται ότι $(\beta^2-\alpha^2)\gamma^2 > 0$.
Αρα, $(\beta^2-\alpha^2)\gamma^2 > 0$ και $(\beta^2-\alpha^2)\gamma^2 < 0$, αντίθετα με την $P \cap -P = \{0\}$. Αρα, αποκλείεται να είναι $\alpha\gamma > \beta\gamma$. Επομένως, $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$, δηλαδή, $(\beta-\alpha)\gamma \geq 0$. Τώρα, αφού είμαστε σε σώμα, οι $\beta-\alpha > 0$ και $\gamma > 0$ συνεπάγονται ότι $(\beta-\alpha)\gamma \neq 0$, άρα, ότι $(\beta-\alpha)\gamma > 0$.
Προφανής περιπτωσιολογία, όταν δεχώμαστε και δυνατότητα = στις υποθέσεις $0 \leq \alpha \leq \beta$ και $0 \leq \gamma$. Εστω, τώρα, ότι, γενικά, $\alpha \leq \beta$ και $0 \leq \gamma$. Τότε, $\beta-\alpha \geq 0$ και $0 \leq \gamma$. Αν, μεν, η μιά, τουλάχιστον, είναι ισότητα, φανερά, $(\beta-\alpha)\gamma = 0$, άρα, $(\beta-\alpha)\gamma \geq 0$. Εστω, λοιπόν, ότι $\beta-\alpha > 0$ και $0 < \gamma$. Από τα προηγούμενα έπεται ότι $(\beta-\alpha)\gamma > 0$, άρα, και ότι $\beta\gamma > \alpha\gamma$.
2) Η αντίστροφη συνεπαγωγή, γνωστή. □

Αρχιμήδειες διατάξεις και ημιδιατάξεις

Ορισμός. Μιά ημιδιάταξη καλείται *αρχιμήδεια* αν, γιά κάθε $\alpha \in A$, υπάρχη φυσικός αριθμός ν, με $\alpha < \nu$.

Ισοδύναμος (φανερά) ορισμός: Ο ίδιος, με "ρητός" όπου "φυσικός".

Πρόταση 6. *Μιά ημιδιάταξη* $\leq$ είναι *αρχιμήδεια* αν, και μόνον αν, το **Q** *είναι πυκνό στο* Α ως προς την $\leq$ (δηλαδή, αν γιά κάθε δύο στοιχεία α, β του Α, με $\alpha < \beta$ υπάρχη ρητός ρ με $\alpha < \rho < \beta$).
Απόδειξη. 1) Το *ικανό*: Καθώς είδαμε, γιά κάθε $\alpha \in A$, $\alpha < \alpha+1$. Τώρα, αφού το **Q** είναι πυκνό στο Α ως προς την $\leq$ (επομένως, *το* **Q** *είναι υποσύνολο του* Α), υπάρχει ρητός ρ, με $\alpha < \rho < \alpha+1$.   2) Το *αναγκαίο*. Κατ' αρχήν, από υπόθεση, το **Q** είναι υποσύνολο του Α. Εδώ, η απόδειξη στηρίζεται σε επανειλημμένη εφαρμογή του λήμματος 5 (στην προηγούμενη σελίδα). Από τους ορισμούς, η

$\alpha < \beta$ (γιά στοιχεία α, β του A) συνεπάγεται την $0 < \beta$-α. Από την (1) (του λήμματος 5), τότε και $0 < \frac{1}{\beta-\alpha}$. Τώρα, από την υπόθεση ότι η ≤ είναι αρχιμήδεια, υπάρχει φυσικός ν, με $\frac{1}{\beta-\alpha} < \nu$. Η (3) δίνει, τότε, ότι $\frac{1}{\nu} < \beta$-α. (Αυτά, θα ήταν προφανή γιά *διάταξη* ≤, αλλά, εδώ έχουμε μόνον *ημιδιάταξη* ≤). Αφού το **Q** είναι υποσύνολο του A, γιά κάθε ρητό ρ και γιά κάθε στοιχείο α του A, $\rho\alpha\in A$. Εξ άλλου, αφού η ≤ είναι αρχιμήδεια, υπάρχουν φυσικοί > από τον να (τα α, β και ν, της $\frac{1}{\nu} < \beta$-α). Εστω μ ο μικρότερός τους. Σαν στοιχείο του **Q**, ο μ, είναι ή < ή ≥ από τον νβ. Ας δούμε, αν μπορή να είναι ≥ . Εστω ότι $\nu\beta \leq \mu$. Τώρα, νβ-να = ν(β-α). Ομως, το ν = 1+ . . . +1 είναι άθροισμα τετραγώνων, άρα, $\nu(\beta$-α$) \geq 0$, άρα > 0. Επομένως, νβ-να > 0. Αφού, λοιπόν, ο μ είναι ≥ από τον νβ *και* είναι ο ελάχιστος φυσικός που είναι > από το να,
νβ-να ≤ 1, άρα, μ(β-α) ≤ 1, επομένως, 1-ν(β-α) > 0. Τώρα, αφού το $\frac{1}{\nu}$ είναι άθροισμα τετραγώνων (βλ. την παραπάνω πρόταση 4 και την απόδειξή της), μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της ανισότητας επί $\frac{1}{\nu}$.
Λαβαίνουμε $\frac{1}{\nu}$ - (β-α) ≥ 0, άρα, $\frac{1}{\nu} \geq \beta$-α, άτοπο. Αρα, μ < νβ.
Λοιπόν, να < μ < νβ. Με την ίδια συλλογιστική, πολλαπλασιάζουμε όλα τα μέλη επί $\frac{1}{\nu}$. Λαβαίνουμε $\alpha < \frac{\mu}{\nu} < \beta$.

Βελτίωση διατυπώσεως. Αμέσως μετά τον ορισμό της ημιδιατάξεως, μπορούμε να δείξουμε ότι, αν $0 < \alpha < \beta$ και $\gamma\in S_A$ (δηλαδή, το γ είναι άθροισμα τετραγώνων), θα είναι και αγ < βγ.
Πράγματι, από τους ορισμούς, τότε, β-α > 0, άρα και (β-α)γ > 0, άρα,
βγ-αγ > 0, άρα, αγ < βγ. Αυτό, χρησιμοποιήθηκε στην τελευταία απόδειξη. Από την πρόταση 6, βλέπουμε ότι, αν ταυτοποιήσουμε τα ισόμορφα ημιδιατεταγμένα σώματα, το οποιοδήποτε *αρχιμήδειο* ημιδιατεταγμένο σώμα δεν είναι τίποτε άλλο από *ένα υπέρσωμα του* **Q**, *με το* **Q** *πυκνό σ' αυτό, ως προς την* ≤ . Είναι φυσικό, τώρα, να αναρωτηθούμε μήπως ισχύη κάτι περισσότερο· δηλαδή, να είναι και *υπόσωμα του σώματος* **R** *των πραγματικών* (έχουμε, "γιά μιά στιγμή", ταυτοποιήσει όλα τα ημιδιατεταγμένα ισόμορφα).

Θεώρημα. *Κάθε αρχιμήδεια ημιδιάταξη είναι διάταξη.*
Απόδειξη. Ας είναι $0 < \alpha$ και $0 < \beta$, γιά α, β στοιχεία του A, διαφορετικά μεταξύ τους. Θα είναι ή α < β ή β < α. Διατυπώνουμε την απόδειξη με α < β. Από την γενική παρατήρηση γιά την πρόσθεση, που κάναμε πιό πάνω, β < β+2α, άρα, και β-α < β+α. Από την υπόθεση ότι η ≤ είναι αρχιμήδεια, υπάρχει ρητός $\frac{\mu}{\nu}$, με $\beta-\alpha < \frac{\mu}{\nu} < \beta+\alpha$. Από την πρόταση 4, $\frac{\mu}{\nu} \in S_A$. Τώρα, από τις (6) και (7) (του λήμματος 5), τα τελευταία συνεπάγονται ότι $(\beta-\alpha)^2 < \frac{\mu^2}{\nu^2}$ και

$\frac{\mu^2}{\nu^2} < (\beta+\alpha)^2$. Αρα, και ότι $(\beta-\alpha)^2 < (\beta+\alpha)^2$, άρα, ότι $(\beta+\alpha)^2-(\beta-\alpha)^2 > 0$. Φυσικά, $(\beta+\alpha)^2-(\beta-\alpha)^2 = 4\alpha\beta$, επομένως, $4\alpha\beta > 0$. Τώρα, αφού $\frac{1}{4} \in S_A$, $\alpha\beta > 0$. □

Πόρισμα. *Οι έννοιες του διατεταγμένου και του ημιδιατεταγμένου αρχιμηδείου σώματος συμπίπτουν.*

Υπενθύμιση. *Αλγεβρικός αριθμός* καλείται κάθε ρίζα αλγεβρικής εξισώσεως με ακέραιους συντελεστές.

Θεώρημα. *Κάθε ημιδιάταξη σώματος αλγεβρικών αριθμών είναι αρχιμήδεια διάταξη.*

Απόδειξη. Προκαταρκτική παρατήρηση: Αρκεί να δείξουμε ότι η ημιδιάταξη είναι αρχιμήδεια. Ας είναι, λοιπόν, ο α αλγεβρικός αριθμός. Αν $\alpha \leq 1$, δεν απομένει τίποτα γι' απόδειξη. Υποθέτουμε, λοιπόν, $\alpha > 1$.

Πρίν προχωρήσουμε στην απόδειξη, καλύπτουμε ένα κενό. Ας *δοκιμάσουμε* να ορίσουμε "απόλυτη τιμή" στο ημιδιατεταγμένο σώμα Α.

Σε κάθε στοιχείο του, αντιστοιχίζουμε, βέβαια, αν είναι ≥ 0, τον εαυτό του· αν όχι, τον αντίθετό του. Από προηγούμενο γενικό συλλογισμό έπεται, τότε, ότι, και πάλι, γιά κάθε δύο στοιχεία α, β του Α, $|\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta|$ (χρησιμοποιούμε αυθαίρετα τον συμβολισμό $|\ |$). Τώρα, με τον ορισμό $|\alpha\beta|$ = ή το αβ ή το αντίθετό του. Τι είναι, εδώ το $|\alpha|\,|\beta|$.

Οτι είναι > 0, *δεν ειναι εξασφαλισμένο*. Εστω, τώρα, ότι $|\alpha|\,|\beta| < 0$. Εξετάζουμε τις διάφορες δυνατές περιπτώσεις.

1) $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Τότε, $\alpha\beta < 0$ αν, και μόνον αν, $-\alpha\beta > 0$. Επομένως, σε *κάθε περίπτωση,* $\big||\alpha||\beta|\big| = |\alpha\beta|$.

2) $\alpha > 0$ και $\beta < 0$. Τότε, $\alpha(-\beta) > 0$ (αντ. < 0) αν, και μόνον αν, $(-\alpha)(-\beta) < 0$ (αντ. > 0). Τώρα, $\alpha(-\beta) = -\alpha\beta$ και $(-\alpha)(-\beta) = \alpha\beta$.

Ετσι, σε όλες τις περιπτώσεις, $\big||\alpha||\beta|\big| = |\alpha\beta|$. Βέβαια, το $|\ |$ κακώς χρησιμοποιείται, εδώ, αφού *δεν* έχουμε και την ιδιότητα $|\alpha\beta| = \big||\alpha||\beta|\big|$, αλλά η χρήση αυτή γίνεται γιά οπτική ευκολία. Προχωρούμε, τώρα, στην κυρίως απόδειξη. Θ' αποδείξουμε, πρώτα, ότι $1 < \alpha < \alpha^2 < \alpha^3 < \ldots$. Το $1 < \alpha$, είναι η ίδια η υπόθεση. Από την (4) (Λήμμα 5) έπεται, τότε, ότι $\alpha < \alpha^2$. Αρα, $1 < \alpha < \alpha^2$. Πολλαπλασιάζοντας επί α^2, λαβαίνουμε $\alpha^2 < \alpha^3 < \alpha^4$. Με τελεία επαγωγή, συμπληρώνεται η απόδειξη της ακολουθίας αυτής ανισοτήτων.

Πόρισμα. Γιά κάθε φυσικό $\mu \geq 1$, $1 < \alpha^\mu$. Τώρα, από την (3), $\frac{1}{\alpha^\mu} < 1$, ενώ, από την (1), $0 < \frac{1}{\alpha^\mu}$. Ετσι, $0 < \frac{1}{\alpha^\mu} < 1$. Αφού το α είναι αλγεβρικός αριθμός, υπάρχουν φυσικός $\nu \geq 1$ και ρητοί $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$, με $\alpha^\nu+\beta_1\alpha^{\nu-1}+ \ldots +\beta_\nu = 0$. Διαιρούμε διά $\alpha^{\nu-1}$.

Τότε, $-\alpha = \beta_1 + \ldots + \frac{\beta_\nu}{\alpha^{\nu-1}}$.

Επομένως, και $|-\alpha| \leq |\beta_1| + \ldots + \frac{\beta_\nu}{\alpha^{\nu-1}}$, δηλαδή

$$|-\alpha| \leq |\beta_1| + \ . \ . \ . \ + \frac{\beta_\nu}{\alpha^{\nu-1}} = |\beta_1| + \ . \ . \ . \ + \left|\frac{|\beta_\nu|}{|\alpha|^{\nu-1}}\right| < |\beta_1| + \ . \ . \ . \ + |\beta_\nu| \ .\square$$

Σημείωση 1. Η πορεία, που ακολουθήσαμε στα παραπάνω Μέρος Πρώτο και Μέρος Δεύτερο της Πέμπτης Ενότητας, είναι η πορεία του *Alexander Prestel* στο βιβλίο του *Lectures on Formally Real Fields* (Lecture Notes 1093, Springer, 1984), σελ. 1-10.

Η ανάπτυξη, που κάναμε στις συνοπτικές αποδείξεις του, και κάποιες παρατηρήσεις και σχόλια, που προσθέσαμε, είναι η αιτία γιά την μεγαλύτερη έκταση, που έχουν, εδώ, τα πράγματα.

Σημείωση 2. Η αρχική παιδεία μου, στο θέμα αυτό, οφείλεται στο 6^{o} κεφάλαιο της "Αλγέβρας" των *"Στοιχείων Μαθηματικής"* του *Bourbaki.*

Σημείωση 3. Ο διαπρεπής Αμερικανός μαθηματικός Irving Kaplansky, σε μαθήματά του στο Πανεπιστήμιο του Σικάγου, κάνει μιά αναδιατύπωση της θεωρίας του Serre. Αν και πολύ περιληπτική, έχει αξιοσημείωτες εμφάσεις, χαρακτηριστικό, πάντα, των κειμένων του βαθυστόχαστου αυτού μαθηματικού, με το ιδιαιτέρως ευρύ φάσμα γνώσεων.

Ακολουθώντας μία διεθνή πρακτική, οναμάζει *τυπικά πραγματικό* (formally real) ένα σώμα όταν, σ' αυτό, το -1 δεν μπορή να εκφραστή σαν άθροισμα τετραγώνων.

Από την άλλη μεριά, σε διατεταγμένο σώμα Α, θεωρεί αντί γιά τον θετικό κώνο του P, το $P^* = P\backslash\{0\}$. Η πρώτη ενδιαφέρουσα επισήμανση, τώρα, είναι πως το P^* είναι *υποομάδα* της πολλαπλασιαστικής ομάδας $A^* = A\backslash\{0\}$. Την ιδιότητα αυτήν του P^*, την ονομάζει, γιά μεταγενέστερη χρήση, ιδιότητα (a). Ιδιότητα (b) ονομάζει την $P^*+P^* \subseteq A^*$, (c) την $A^{*2} \subseteq P^*$ και (d), την ιδιότητα: Η υποομάδα P^* της A^* έχει σ' αυτήν δείκτη 2.

Η δεύτερη επισήμανση του Kaplansky (αναδιατύπωση του αρχικού προβληματισμού του Serre) είναι: "Τα παραπάνω μας εμπνέουν στο να μελετήσουμε τα σύνολα που ικανοποιούν τις (a), (b) και (c)· το σχέδιό μας είναι να τα επεκτείνουμε ώστε να γίνουν αξεπέραστα προς τα επάνω· με την προσδοκία, τότε, να ικανοποιούν και την (d)."

Επεξήγησή μας. (Οι αναφορές μας είναι στο *Πρώτο μέρος* αυτής της *Ενότητας.*) Ουσιαστικά, η (b) είναι η P.1)· η (d), οι P.3) και P.4), μαζί. Γιά την (a) και γιά την (c): Από τις P.2), P.3) και P.4) έπεται η $1 \in P^*$· επομένως, και η $A^{*2} \subseteq P^*$, δηλαδή, η (c). Τώρα, από τις ρ.2) και (c) έπεται ότι, όταν $\alpha \in P^*$, και $\alpha\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \in P^*$· επομένως, ότι το P^* είναι πολλαπλασιαστική ομάδα, άρα, υποομάδα της A^*.

Η πορεία του Kaplansky, γιά να αποδείξη ότι κάθε τυπικό πραγματικό σώμα είναι διατάξιμο, είναι η επόμενη:

Θεώρημα 1. *Ας είναι το* A_1 *σώμα και το* Σ *μία υποομάδα της* A^*, *με τις ιδιότητες* (b) *και* (c). *Ας είναι, τώρα, το x στοιχείο της* A^*, *τέτοιο ώστε* $x \notin S$. *Τότε, το* $S+Sx$ *είναι και αυτό υποομάδα της* A^*, *που έχει την ιδιότητα* (b).

Διατυπώνουμε, παρακάτω, την απόδειξή του πιό αναλυτικά.

Απόδειξη. Το S+Sx έχει, φανερά, την ιδιότητα (b)· γιατί, (S+Sx)+(S+Sx) $\subseteq$ (S+S)+(S+S)x $\subseteq$ S+Sx. Αποδεικνύουμε, τώρα, με εις άτοπον απαγωγή, ότι $0\notin S$. Δηλαδή: Γιά στοιχεία s_1 και s_2 του S, η $s_1+s_2x = 0$ συνεπάγεται, αφού το S είναι πολλαπλασιαστική ομάδα, την $-x = s_1s_2^{-1}$, άρα, την $-x\in S$, σε αντίφαση με την υπόθεση $-x \notin S$. Επομένως, $0\notin S$. Γιά τον πολλαπλασιασμό: $(S+Sx)(S+Sx) = S^2+(S+S)x+S^2x^2 \subseteq S+Sx+Sx^2 \subseteq S+Sx$, αφού, από την (c), $Ax^2 \subseteq S$ (και, επομένως, $x^2\in S$). Απομένει να δείξουμε ότι γιά κάθε ζεύγος (s_1,s_2) στοιχείων του S, υπάρχει, στο S+Sx, αντίστροφο του στοιχείου του s_1+s_2x. Γι' αυτό, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι, αφού $s_1+s_2x \neq 0$, η A^* έχει το στοιχείο $\dfrac{1}{s_1+s_2x}$· ακόμα, ότι $\dfrac{1}{s_1+s_2x} = (s_1+s_2x)\left(\dfrac{1}{s_1+s_2x}\right)^2$. Τώρα, αφού ο πρώτος παράγων ανήκη στο S+Sx και ο δεύτερος στο A^{*2}, άρα, και στο S, το γινόμενο αυτό είναι στοιχείο του S(S+Sx)· δηλαδή, του S^2+S^2x· επομένως, και του S. □

Προχωρεί, τώρα, ο Kaplansky, προς το θεώρημα 2.
Τώρα, αρχίζουμε την διαδικασία της επεκτάσεως. Σ' ένα τυπικά πραγματικό σώμα A, το ελάχιστο σύνολο που ικανοποιεί τις (a), (b) και (c) είναι το σύνολο των μη μηδενικών αθροισμάτων τετραγώνων του. [**Σημείωση.** Αν το A δεν είναι τυπικά πραγματικό, δεν υπάρχει τέτοιο υποσύνολο του A. Ιδιαιτέρως, όταν το A δεν είναι τυπικά πραγματικό, το θεώρημα 1 είναι κενό (vacuus).] Εφαρμόζουμε, τώρα, το λήμμα του Zorn. Ας είναι το P^* αξεπέραστο προς τα επάνω ως προς τις (a),(b) και (c). Έπεται, τότε, από το θεώρημα 1 ότι, γιά κάθε μη μηδενικό στοιχείο x του A, είτε το x είτε το -x θα ανήκη στο P^*. Είναι ζήτημα ρουτίνας, τώρα, να διαπιστώσουμε ότι, αν πάρουμε αυτό το P^* σαν σύνολο των > 0 στοιχείων του A, το A γίνεται διατεταγμένο σώμα. Συνοψίζουμε:

Θεώρημα 2. *Ας είναι το* A *ένα σώμα τυπικά πραγματικό. Τότε, το* A *είναι διατάξιμο. Ακόμα, αν το* S *είναι μιά υποομάδα του* A^* *που έχει τις ιδιότητες* (a), (b) *και* (c), *υπάρχει διάταξη του* A *στην οποία τα στοιχεία του* S *να είναι όλα* > 0.

Σχόλιά μας. 1. Το μέρος "Ας είναι . . . διατάξιμο" του θεωρήματος 2 είναι το θεώρημα Artin-Schreier [ακριβέστερα, η συνεπαγωγή 2) $\Rightarrow$ 1), στην διατύπωση του θεωρήματος αυτού στο *Πρώτο μέρος* της *Ενότητας* αυτής]. Το υπόλοιπο μέρος είναι πόρισμα του λήμματος του Serre. Γιά να φανή αυτό, αναδιατυπώνουμε έτσι το υπ' όψη λήμμα: *Σε τυπικά πραγματικό σώμα, γιά κάθε προθετικό κώνο του* P_o, *υπάρχει διάταξη του* A, *στην οποία όλα τα στοιχεία του* $P_0^* = P\backslash\{0\}$ *να είναι* > 0. Τώρα, οι υποομάδες της A^*, που θεωρεί ο Kaplansky, είναι, αν τις εμπλουτήσουμε, σαν σύνολα, με το 0, προθετικοί κώνοι. **Απόδειξη**. Θέτουμε: $P_0 = P_0^*\cup\{0\}$. Τώρα: Από την (b), $P_0+P_0 \subseteq \rho_0$, η P.1). Από την (a), $P_0P_0 \subseteq P_0$, η P.2). Από την (c), $A^2 \subseteq P_0$, η P΄.4) Απομένει, γιά εξακρίβωση, η P΄.3), δηλαδή, η $n\text{-}1 \notin P_0$. Θα τη εξαγάγουμε, σαν άμεσο πόρισμα, από την εξής, γενικώτερη, παρατήρηση: *Αν ένα υποσύνολο* Γ *του* A^**ικανοποιή τις* (b) *και* (c), *τότε,* $-1\notin\Gamma$. **Απόδειξη.** Με εις άτοπον απαγωγή. Έστω ότι $-1\in\Gamma$. Αφού $A^2 \subseteq \Gamma$, $1\in\Gamma$. Τώρα, αφού ισχύει η (b), $(-1)+(1)\in\Gamma$. Όμως, $(-1)+(1) = 0$, ενώ $0\notin\Gamma$. Άτοπο. Άρα, $-1\notin\Gamma$. □

Επομένως ο P_0 είναι προθετικός κώνος. Τώρα, αφού το A είναι, από υπόθεση, τυπικά πραγματικό σώμα, $-1\notin S_A$ και, επομένως, το S_A είναι προθετικός κώνος. Άρα, το A έχει έναν, τουλάχιστον, προθετικό κώνο.

2. Αναφερόμαστε στην μέσα σε παρένθεση "Σημείωση" του Kaplansky. Την βελτιώνουμε έτσι: *Αν το* A *δεν είναι τυπικά πραγματικό, δεν υπάρχει υποσύνολό του* A^* *που να ικανοποιή τις* (a) *και* (b).
Απόδειξη. Με εις άτοπον απαγωγή. Έστω ότι υπάρχει ένα τέτοιο υποσύνολο Γ. Αφού το A δεν είναι τυπικά πραγματικό, υπάρχει άθροισμα τετραγώνων στοιχείων του, όχι όλων μηδενικών, που να είναι ίσο με το μηδέν. Από την (c), τα τετράγωνα αυτά ανήκουν όλα στο Γ. Άρα, από την (b), και το άθροισμά τους ανήκει στο Γ. Επομένως, $0\in\Gamma$. Άτοπο, αφού $\Gamma \subseteq A^*$. □

3. Κάτι προφανές Ανεξάρτητα από το αν το $A \neq \{0\}$ είναι τυπικά πραγματικό (= διατάξιμα) ή όχι, $A^2 \subseteq S_A$, άρα, $A^{*2} \subseteq S_A^*$, όπου $S_A^* = S_A\backslash\{0\}$. Τώρα, αν β_1, και β_2 μη μηδενικά στοιχεία του S_A, και το γινόμενό τους είναι μη μηδενικό (γιατί είναι στοιχείο της ομάδας A^*). Εξ' άλλου, $S_AS_A \subseteq S_A$.
Επομένως, $S_A^*\, S_A^* \subseteq S_A^*$. Βέβαια, $1 \neq 0$ και $1\in S_A$. Άρα, $1\in S_A^*$. Τέλος, αν $\alpha\in S_A$, και $\alpha \neq 0$, από την Πρόταση 4.3) του *Πρώτου μέρους* έχουμε ότι και $\frac{1}{\alpha}\in S_A$ και βέβαια, $\frac{1}{\alpha}\neq 0$ επομένως, $\frac{1}{\alpha}\in S_A^*$. Συμπέρασμα: *Σε κάθε σώμα* A *με* $A \neq \{0\}$, *το* $S_A^* = S_A\backslash\{0\}$ *είναι υποομάδα της* A^* δηλαδή, *έχει την ιδιότητα* (a) και, καθώς είδαμε, *και την* (c).

4. Προφανής συνέπεια των 2 και 3: *Το* S_A^* *ικανοποιεί τις* (a), (b) *και* (c), *αν, και μόνον αν,* $-1\notin S_A^*$ (δηλαδή, *το* A *είναι τυπικά πραγματικό).*

5. Προφανής συνέπεια των 2 και 4: *Υπάρχει υποσύνολοτου* A^* *που να ικανοποιή τις* (b) *και* (c) *αν, και μόνον αν,* $-1\notin S_A^*$ (δηλαδή, *το* A *είναι τυπικά πραγματικό).*

6. *Γιά κάθε μη κενό υποσύνολο* B *του* A^* *που ικανοποιεί την* (b), $B\cap -B = \varnothing$.
Απόδειξη. Με εις άτοπον απαγωγή. Έστω ότι υπάρχει στοιχείο β του A^*, με $\beta\in B$ και $\beta\in -B$. Τότε, αφού $\beta\in -B$, υπάρχει στοιχείο β_1 του B, με $-\beta_1 = \beta$. Επομένως, από την (b), στο B, $\beta+\beta_1\in B$. Όμως, αφού $\beta = -\beta_1$, $\beta+\beta_1 = 0$. Άτοπο. Άρα, $B\cap -B = \varnothing$ □

7. Συνέπεια της παρατηρήσεώς μας 6 είναι και το επόμενο συμπέρασμα: *Έστω ότι* $A \neq \{0\}$ *και ότι ένα υποσύνολο* B *του* A, *με* $B \supseteq \{0\}$ *έχει, αν* $B \supset \{0\}$, *τις επόμενες ιδιότητες*: 1) *Το* $B^* = B\backslash\{0\}$ *ικανοποιεί την* (a) (δηλαδή, είναι υποομάδα της A^*).
2) $B+B \subseteq B$ [δηλαδή, την Π.1)] *και* 3) $-1\notin B$ [δηλαδή, την P΄.3)].
Τότε, $B \cap -B = \{0\}$. **Απόδειξη.** Το ότι $0\in B \cap -B$ είναι προφανής συνέπεια της υποθέσεως $B \supseteq \{0\}$. Κάνουμε, τώρα, εις άτοπον απαγωγή και επαναλαμβάνουμε τους συλλογισμούς του 6, που μας οδηγούν, γιά $\beta \neq 0$, και $\beta\in B \cap -B$, στο συμπέρασμα $\beta = -\beta_1$, άρα, αφού $\beta \neq 0$, και στο $\beta\frac{1}{\beta_1} = -1$. Από την υπόθεση (a), $\frac{1}{\beta_1}\in B^*$. Επομένως, $-1\in B^*$ άρα, $-1\in B$, άτοπο.
Επομένως, $B \cap -B = \{0\}$. ο.ε.δ.

8. Ας ξανάρθουμε, τώρα, στο αντικείμενο του λήμματος του Serre, όταν το A είναι *σώμα* $\neq \{0\}$. Κάνουμε την υπόθεση $-1\notin S_A^*$. Τότε, $-1\notin S_A$. και, επομένως, το S_A είναι προθετικός κώνος. Άρα, ισχύει η υπόθεση του λήμματος του Serre ότι το A έχει προθετικό κώνο. Εξ' άλλου το S_A^*, τότε, ικανοποιεί, σύμφωνα με το 4, τις (a), (b) και (c). Θεωρούμε, τώρα, το σύνολο των προθετικών κώνων του A(αυτοί αναγκαία, περιέχουν όλοι τον προθετικό κώνο S_A) που έχουν την

επί πλέον ιδιότητα: Αν το P_0 οποιοσδήποτε απ' αυτούς, το $P_0^* = P_0\setminus\{0\}$ έχει την ιδιότητα (a). [Από τις προηγούμενες υποθέσεις, ικανοποιεί και τις (b) και (c).] Ας εφαρμόσουμε *σ' αυτό* το σύνολο (υποσύνολο του συνόλου των προθετικών κώνων του A) την αποδεικτική διαδικασία με την οποία ο Serre φτάνει στο συμπέρασμα "$P \cup -P = A$". Εδώ, ο P είναι αξεπέραστο προς τα επάνω, ως προς το $\subseteq$, στοιχείο *του συνόλου των προθετικών κώνων που θεωρήσαμε.* Η απόδειξη του Serre, *γι' αυτό*, εξακολουθεί να ισχύη. Τώρα, αφού ο καθένας από τους *παραπάνω* προθετικούς κώνους P_0 ικανοποιεί τις υποθέσεις που γίνονται στο 7 γιά το B, $P_0 \cap -P_0 = \{0\}$. Άρα, και $P \cap -P = \{0\}$. Επομένως, ο P είναι θετικός κώνος. ο.ε.δ.

9. Η διαπίστωση, που κάνει ο Serre, στην περίπτωση του *δακτυλίου με* 1 ότι, στην αποδεικτική πορεία του, η $P \cup -P = A$ συμπληρώνεται με την $P \cap -P =$ πρώτο ιδεώδες, ρίχνει πρόσθετο φώς στο θέμα και είναι *αναντικατάστατη*. Όμως, στην ειδική περίπτωση που ο δακτύλιος αυτός είναι *σώμα* (δηλαδή, αυτήν που μας ενδιαφέρει γιά το θεώρημα Artin-Schreier και την πάνω σ' αυτό βασισμένη θεωρία των *διατεταγμένων σωμάτων),* ήταν λογικό να ζητήση κανείς ν' αντικαταστήση το δεύτερο αυτό μέρος (ιδεώδη) της αποδεικτικής πορείας του Serre με κάτι το *πιό άμεσο*. Αυτό κάναμε στο παραπάνω 8, συνέπεια της "ανατομικής" σπουδής (φανερά απλής) που κάναμε στα 1-8.

10. Καθώς είδαμε, την αφορμή (και περισσότερο) γιά την απλοποίησή μας της αποδείξεως του Serre στην περίπτωση του σώματος, μας την έδωσε το κείμενο του Kaplansky. Τώρα, στην συνοπτική απόδειξή του, που την εκθέσαμε πριν από την εκφώνηση του θεωρήματος 2, δεν εμφανίζεται καθόλου απόδειξη του ότι $P^* \cap -P^* = \emptyset$ (της ισότητας που αντιστοιχεί στην $P \cap -P = \{0\}$ του Serre). και δεν είναι καταφανές ότι η παραπάνω απόδειξή μας είναι "ζήτημα ρουτίνας". Το κυριώτερο, όμως, είναι το εξής: Όταν ο Kaplansky εφαρμόζει το θεώρημα 1 στο αξεπέραστο προς τα επάνω P^*, λαβαίνει ότι αν $-x \notin P^*$, το P^*+P^*x ικανοποιεί τις (a), (b) και (c) και ότι, $P^*+P^*x \subseteq P^*$. Πώς από την σχέση αυτή φτάνει στο συμπέρασμα ότι $x \in P^*$; Το ανάλογο συμπέρασμα έβγαινε στην πορεία του Serre, γιατί εκεί $R^* = P^* \cup \{0\}$ και, επομένως, από την
$P+Px \subseteq P$ έβγαινε ότι $0+1x \in P$. Εδώ, όμως, $0 \notin P^*$.

11. Ποιά είναι η ακριβής σχέση ανάμεσα στα $P = P^* \cup \{0\}$, όπου P^* υποομάδα του A^* που ικανοποιεί τις (a), (b) και (c) (ας καλέσουμε αυτούς τους προθετικούς κώνους P, "προθετικούς κώνους του Kaplansky") και τους προθετικούς κώνους του Serre; Ας είναι ο P_0 προθετικός κώνος του Serre και ας καλέσουμε P_0^* το $P_0\setminus\{0\}$. Από την $P_0P_0 \subseteq P_0$, ξέρουμε ότι το P_0 είναι ημιομάδα της πολλαπλασιαστικής ομάδας A^*. Αφού $A^2 \subseteq P_0$, $A^{*2} \subseteq P^*$ και, επομένως, $1 \in P_0^*$. Ας είναι, τώρα, τα p_1 και p_2 στοιχεία του P_0^*. Το $\frac{p_1}{p_2}$ είναι, βέβαια, στοιχείο της A^*. Τώρα, $\frac{p_1}{p_2} = p_1p_2\left(\frac{1}{p_2}\right)^2$. Αφού $A^{*2} \subseteq P_0^*$, το γινόμενο του δεξιού μέλους ανήκει στο P_0^*. Άρα, $\frac{p_1}{p_2} \in P_0^*$. Επομένως, το P_0^* είναι υποομάδα της A^* που, βέβαια, ικανοποιεί τις (b) και (c). Άρα, *οι προθετικοί κώνοι του* Serre *και του* Kaplansky *συμπίπτουν.*

Μέρος τρίτο

Πλήρωση των αρχιμηδείων διατεταγμένων σωμάτων.

Υπενθύμιση από την θεωρία των ολικώς διατεταγμένων συνόλων.

Συντομογραφία. Σύνολο = ολικώς διατεταγμένο σύνολο.

Χρησιμοποιούμε τα Προσαρτήματα στην Πρώτη Ενότητα.

Πλήρωση κατά Εύδοξο - Dedekind του συνόλου Q των ρητών αριθμών. Εδώ, Ε = **Q**. Παριστάνουμε με **R** το σύνολο **Q** ∪ Η, στο οποίο, αφού είναι Dedekind πλήρες, ισχύει το θεώρημα του Bolzano, και ζητάμε να επεκτείνουμε σ' αυτό τις πράξεις των ρητών (πρόσθεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση), κατά τρόπο συμβιβαστό με την διάταξη ≤ · δηλαδή, να το κάνουμε *διατεταγμένο σώμα.*

Ερχόμαστε, τώρα, στην επέκταση των πράξεων, στην οποία αναφερθήκαμε. Ξεκινάμε με την πρόσθεση. Ας είναι λ και λ΄ δύο στοιχεία του **R**. Οι λ και λ΄ (είτε είναι ρητοί είτε στοιχεία του Η) προέρχονται από μερισμούς σε δύο τάξεις (Α, Β) και (Α΄,Β΄) αντ., του **Q**. Παριστάνουμε με α (αντ. α΄) τον τυχόντα ρητό της Α (αντ. Α΄), που είναι < λ (αντ. λ΄) και με β (αντ. β΄) τον τυχόντα ρητό της Β (αντ. Β΄), που είναι > λ (αντ. λ΄). *Προσοχή στο εξής*: Αν ο λ (αντ. λ΄) είναι ρητός, υπάρχει, έτσι, στην μία από τις δύο τάξεις Α, Β (αντ. Α΄, Β΄) ακριβώς ένας ρητός, που δεν μπορεί να γραφτή με το μικρό γράμμα, που αντιστοιχεί σ' αυτήν· ο λ (αντ. λ΄).

Παράδειγμα. Αν λ = 3, οι μόνοι μερισμοί (Α, Β) από τους οποίους μπορεί να προέρχεται είναι οι 1) Α = το σύνολο των ρητών, των < 3 και 2) Α = το σύνολο των ρητών, των ≤ 3. Στην 1), λ =3 και, επομένως, γιά κάθε β, β > 3· και στην 2) λ = 3 και, επομένως, γιά κάθε α, α < 3.
Προφανής παρατήρηση: Πάντα, α+α΄ < β+β΄.

Θεωρούμε, τώρα, τον επόμενο μερισμό (Γ, Δ) του **R** σε δύο τάξεις: Στην Γ ανήκουν όλα τα στοιχεία του **R**, που είναι < απ' όλους τους ρητούς της μορφής β+β΄. Επομένως, στην Γ ανήκουν και όλα τα στοιχεία της μορφής α+α΄. Αφού το **R** είναι η κατά Εύδοξο-Dedekind πλήρωση του **Q**, ο μερισμός (Γ, Δ) είναι τομή και, επομένως, ή η Γ έχει μέγιστο στοιχείο ή η Δ ελάχιστο. Ομως, από τον τρόπο, που ορίσαμε την Δ (σύνολο των ρητών της μορφής β+β΄ και των στοιχείων του **Q** ∪ Η, που δεν είναι μικρότερα απ' όλους αυτούς τους ρητούς), δεν υπάρχει ελάχιστος στην Δ· γιατί, δεν υπάρχει ελάχιστος μεταξύ των ρητών της μορφής β+β΄. (**Απόδειξη**. Αν $\beta_1+\beta_1'$ είναι ένας τέτοιος ρητός, υπάρχουν στις Β και Β΄, αντ. ρητοί β_2 και β_2', με $\beta_2 < \beta_1$ και $\beta_2' < \beta_1'$). Επομένως, η Γ έχει μέγιστο στοιχείο. Αυτό το ονομάζουμε *άθροισμα* λ+λ΄. Αποδεικνύουμε, τώρα, ότι, όταν ο λ και ο λ΄ είναι ρητοί, ο ορισμός αυτός μας ξαναδίνει το συνηθισμένο άθροισμα λ+λ΄. Στην περίπτωση εκείνην, αν ο μερισμός (Α, Β) είναι ο (x ≤ λ, x > λ) και ο (Α΄, Β΄) είναι ο (x ≤ λ΄, x > λ΄), μέγιστο στοιχείο της Γ είναι ο λ+λ΄. Αν ο μερισμός (Α, Β) είναι ο (x < λ, x ≥ λ) και ο (Α΄, Β΄) ο (x ≤ λ΄, x > λ΄), πάλι, μέγιστο στοιχείο της Γ είναι ο λ+λ΄. Ομοια, στις δύο υπόλοιπες περιπτώσεις.

Εγινε φανερό, τώρα, πώς θα προχωρήσουμε και στον ορισμό του πολλαπλασιασμού δύο στοιχείων του **R**· κ.λ.π.

Στεκόμαστε, εδώ, σ' ένα σημείο (γιά τα άλλα, βλέπε τις παρακάτω παραπομπές), στο ότι το Παράδειγμα 2) έχει χάσματα. Εστω η εξίσωση $x^2 = 2$. Το βιβλίο αυτό άρχισε με την απόδειξη του Πυθαγόρα, ότι δεν υπάρχει ρητός (= στοιχείο του **Q**), που να είναι λύση (= ρίζα) της. Θεωρούμε, τώρα, τον επόμενο μερισμό του **Q** σε δύο τάξεις: Α = Το σύνολο των αρνητικών ρητών και των θετικών, με τετράγωνο < 2. Β = Το σύνολο των θετικών ρητών, με τετράγωνο > 2. Θα αποδείξουμε ότι στην Β δεν υπάρχει στοιχείο ελάχιστο (αναλόγως αποδεικνύεται ότι στην Α δεν υπάρχει στοιχείο μέγιστο). Εστω $\beta \in B$. Τότε, $\beta^2 > 2$. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ρητός $\varepsilon > 0$, με $(\beta-\varepsilon)^2 > 2$. Κάνουμε ανάλυση, (όπως, στην Γεωμετρία, ο Ευκλείδης). Εστω ότι υπάρχει τέτοιος ρητός. Τότε, $\beta^2-2\varepsilon\beta+\varepsilon^2 > 2$, δηλαδή, $\beta^2-2 > 2\varepsilon\beta-\varepsilon^2$, ρητός.

Επομένως, γιά ε με $0 < \varepsilon < 2\beta$, $\varepsilon < \dfrac{\beta^2-2}{2\beta-\varepsilon}$. Κάνουμε, τώρα, σύνθεση. Οταν ο ε είναι ρητός, > 0 και < από τον ελάχιστο από τους δυό ρητούς $2\beta-\varepsilon$, $\dfrac{\beta^2-2}{2\beta-\varepsilon}$, $(\beta-\varepsilon)^2 > 2$.

Ορολογία. Οταν συμπληρωθούν οι σχετικοί ορισμοί, αποδείξεις κ.λ.π., αποκτούμε το δικαίωμα να ονομάζουμε το **R** σύνολο των *πραγματικών αριθμών*.

Παρατήρηση (επάνω στον ορισμό του $\lambda+\lambda'$). *Δεν υπάρχει ρητός* $> \lambda+\lambda'$, *που να μην είναι της μορφής* $\beta+\beta'$. **Απόδειξη**. Το σύνολο των στοιχείων του **R**, που είναι $\geq$ από ρητό της μορφής $\beta+\beta'$αποτελεί, φανερά, την δεξιά τάξη ενός μερισμού του **R** σε δύο τάξεις. Μεταξύ των ρητών $\beta+\beta'$ δεν υπάρχει, καθώς είδαμε, ελάχιστος. Αρα, δεν υπάρχει στοιχείο του **R**, που να ανήκη στην δεξιά αυτή τάξη και να είναι < απ' όλους τους $\beta+\beta'$. ο.ε.δ.

Στην ουσία, δεν κάναμε τίποτ' άλλο στην παραπάνω απόδειξη, παρά να επαναλάβουμε τον ορισμό του $\lambda+\lambda'$. Ομως, η χρησιμότητα, που έχει η έμφαση, που δώσαμε εδώ, θα φανή αμέσως πιό κάτω, στην απόδειξη του ότι η πρόσθεση αυτή είναι προσεταιριστική.

Παρατήρηση (κλασική). *Η πρόσθεση, που ορίστηκε, στο* **R**, είναι αντιμεταθετική. **Απόδειξη**. Ας είναι οι λ και λ΄ στοιχεία του **R** και οι β και β΄ οποιοιδήποτε ρητοί, με $\lambda < \beta$, $\lambda' < \beta'$.
Φανερά, $\beta+\beta' = \beta'+\beta$. Επομένως, τα σύνολα των στοιχείων της μορφής 1) $\beta+\beta'$ και 2) $\beta'+\beta$ συμπίπτουν. Αρα, $\lambda+\lambda' = \lambda'+\lambda$. ο.ε.δ.

Παρατήρηση (κλασική). *Η πρόσθεση, που ορίστηκε, στο* **R**, *είναι προσεταιριστική.*
Απόδειξη. Ας είναι οι λ, λ΄ και λ΄΄ τρία στοιχεία του **R** και οι β, β΄ και β΄΄ οποιδήποτε ρητοί, με $\lambda < \beta$, $\lambda' < \beta'$ και $\lambda'' < \beta''$.
Φανερά, $\beta+(\beta'+\beta'') = (\beta+\beta')+\beta''$. Επομένως, τα σύνολα των στοιχείων της μορφής 1) $\beta+(\beta'+\beta'')$ και 2) $(\beta+\beta')+\beta''$ συμπίπτουν. Τώρα, ο $\lambda+(\lambda'+\lambda'')$ είναι το μέγιστο στοιχείο του **R**, που είναι < απ' όλους τους ρητούς της μορφής $\beta+\beta'''$, όπου ο β΄΄΄ είναι ο οποιοσδήποτε ρητός $> \lambda'+\lambda''$. Ομως, καθώς εδείξαμε πιό πάνω, γιά κάθε β΄΄΄, υπάρχει $\beta'+\beta''$ μικρότερός του. Επομένως, $\lambda+(\lambda'+\lambda'') = (\lambda+\lambda')+\lambda''$. ο.ε.δ.

Παρατήρηση (κλασική). *Τα παραπάνω σχετικά με την πρόσθεση στο* **R** *εξακολουθούν να ισχύουν, αν αντικαταστήσουμε την "πρόσθεση" με τον "πολλαπλασιασμό" μεταξύ στοιχείων του* **R**, *που να είναι* ≥ 0.

Παρατήρηση (Π. Κρικέλη). *Ας είναι το Χ ένα πυκνό ολικώς διατεταγμένο σύνολο, πλήρες κατά Εύδοξο-Dedekind, και το* X_1 *ένα υποσύνολό του, πυκνό* (ως προς την διάταξη του Χ), *που να είναι, ως προς μιά εσωτερική πράξη, αντιμεταθετική ημιομάδα. Τότε, η πράξη αυτή μπορεί να επεκταθή στο* Χ, *ώστε να γίνη κι αυτό αντιμεταθετική ημιομάδα.* **Απόδειξη**. Μεταφέρονται, άμεσα, ο ορισμός του λ+λ΄ και οι αποδείξεις, που ακολουθήσανε. Πουθενά, σ' αυτές, δεν έχει χρησιμοποιηθή η έννοια "αφαιρέσεως".

Παρατήρηση (συνέχεια στην προηγούμενη). *Στην ειδική περίπτωση, που το παραπάνω* X_1 *είναι αβελιανή* (= αντιμεταθετική) *ομάδα, και το* Χ *γίνεται αβελιανή ομάδα.* **Απόδειξη**. Την διατυπώνουμε γιά προσθετική ημιομάδα X_1. Ας είναι το ξ ένα στοιχείο του Χ, με $\xi \notin X_1$ και $\xi < 0$. Καλούμε Β (αντ. Α) το σύνολο των στοιχείων του X_1, που τα αντίθετά τους είναι $< \xi$ (αντ. $> \xi$). Ο μερισμός (Α,Β) του X_1 αποτελεί χάσμα, που ορίζει ένα στοιχείο λ του Χ (δηλαδή, του $X \backslash X_1$). Θέτουμε, τώρα, ξ = -λ και λ = -ξ. Η εφαρμογή του ορισμού του αθροίσματος στην ημιομάδα Χ δίνει λ+(-λ) = 0. Γενικώτερα, γιά κάθε στοιχείο λ του Χ, θεωρούμε, αν $\lambda \in X_1$, το -λ, και αν $\lambda \in X \backslash X_1$, το -λ, όπως ορίστηκε πιό πάνω. Φανερά, λ+(-λ) = 0. Καθώς το Χ είναι αντιμεταθετική ημιομάδα, αποδεικνύεται, έτσι, ότι αποτελεί αντιμεταθετική (= αβελιανή) ομάδα ο.ε.δ.

Παρατήρηση. Στην ειδική περίπτωση, που το X_1 είναι το σύνολο **Q** των ρητών αριθμών, το δεύτερο μέρος της παρατηρήσεως αποδεικνύει ότι το Χ είναι αβελιανή ομάδα, ως προς την πρόσθεση· και με την πολλαπλασιαστική διατύπωση, το σύνολο των $\neq 0$ στοιχείων του Χ είναι αβελιανή ομάδα ως προς τον πολλαπλασιασμό. Τι απομένει ν' αποδειχθή γιά να διαπιστωθή ότι αυτό το Χ είναι διατεταγμένο σώμα; 1) Οτι, ισχύουν οι "κανόνες των σημείων (= προσήμων)" δηλαδή, ότι γιά κάθε δυό στοιχεία λ και λ΄ του Χ,
(-λ)λ΄ = -(λλ΄), (-λ)(-λ΄) = λλ΄. 2) Οτι, γιά κάθε τρία στοιχεία λ, λ΄ και λ΄΄ του Χ, λ(λ΄+λ΄΄) = λλ΄+λλ΄΄. Η ιδέα της αποδείξεως είναι: Να δειχθή ότι το κάθε μέλος μιάς απ' αυτές τις (γιά απόδειξη) ισότητες ορίζει τον ίδιο μερισμό του Χ με το άλλο (στο πλαίσιο των ορισμών των πράξεων, που δόθηκαν παραπάνω). Αφήνουμε, σαν άσκηση, στον αναγνώστη, την υλοποίηση αυτής της ιδέας.
Μετά και από την ικανοποιητική απάντηση σ' αυτήν την άσκηση, αποκτούμε το δικαίωμα να ονομάζουμε αυτό το Χ, που είναι το **R**, σώμα των *πραγματικών αριθμών*. (Χρησιμοποιείται και ο όρος "σύνολο" αντί γιά "σώμα").

Μιά απλή αλλά χρήσιμη άσκηση: Αν γ και ε στοιχεία του **R**, με ε > 0, υπάρχουν στοιχεία α και β του **R**, με α < γ < β και β-α = ε. **Απόδειξη**. Θεωρούμε ένα στοιχείο x_o του **R**, με $\gamma - x_o > \varepsilon$, και σχηματίζουμε την ακολουθία x_o, $x_o+\varepsilon$, $x_o+2\varepsilon$, ... Αφού το **R** είναι αρχιμήδειο, υπάρχει φυσικός ν με $x_o+\nu\varepsilon > \gamma$. Μεταξύ των ν αυτών, υπάρχει, αναγκαία, ελάχιστος ν_o, με $x_o+\nu_o\varepsilon \geq \gamma$.
Αν $x_o+\nu_o\varepsilon > \gamma$, θέτουμε $\beta = x_o+\nu_o\varepsilon$. Αναγκαία, τότε, $x_o+(\nu_o-1)\varepsilon < \gamma$.
Θέτουμε $\alpha = x_o+(\nu_o-1)\varepsilon$. Οταν $x_o+\nu_o\varepsilon = \gamma$, αντικαθιστούμε τον x_o με τον $x_0 + \frac{\varepsilon}{2}$ και κάνουμε τα ίδια.

Σημείωση. Ο,τι γράψαμε πιό πάνω στο μέρος τρίτο, "Πλήρωση των αρχιμηδείων σωμάτων", εμπνέεται από την παρουσίαση του ορισμού, κατά Dedekind, του συνόλου των πραγματικών αριθμών, που γίνεται στο σύγγραμμα *Απειροστικός Λογισμός* του Π. Ζερβού (βλ.και ιστορική-βιβλιογραφική σημείωση, στην σελ. 22).

Στον ορισμό της ισότητας των ασυμμέτρων αριθμών, που αναφέρεται στην περίπτωση της σελ. 5 του βιβλίου εκείνου, περιέχεται η ουσία του ορισμού των ασυμμέτρων, δηλαδή, το να καθορίζεται ο καθένας τους *εντελώς* από τους μικροτέρους και από τους μεγαλυτέρους του *ρητούς*. Προκειμένου να καλύψουμε και την δεδομένη ισότητα μεταξύ ρητών, αναδιατυπώνουμε έτσι τον ορισμό της ισότητας δύο ασυμμέτρων: *Θα λέμε ότι δυό πραγματικοί αριθμοί* ξ *και* ξ' *είναι ίσοι αν, και μόνον αν, κάθε ρητός μικρότερος απ' τον έναν είναι μικρότερος κι απ' τον άλλο και κάθε ρητός, μεγαλύτερος απ' τον έναν είναι μεγαλύτερος κι απ' τον άλλο.*

Ας μεταφέρουμε, τώρα, τον ορισμό αυτόν, στην μέτρηση "ομοειδών" μεγεθών. Η μέτρηση αυτή δεν είναι κάτι το απόλυτο αλλά *σύγκριση ομοειδών μεγεθών μεταξύ τους. Λόγους ομοειδών μεγεθών μετρούμε, όχι τα μεγέθη τα ίδια.* Αν, λοιπόν, τέτοιοι λόγοι προσφέρωνται σε μέτρηση με πραγματικούς αριθμούς (αυτή είναι η υπόθεση, που γίνεται στη συνηθισμένη Γεωμετρία γιά τα "συνεχή" μεγέθη και στην Μηχανική γιά τον χρόνο, τις ταχύτητες, επιταχύνσεις, κ.λ.π.), ο ορισμός της ισότητας γι' αυτούς θα είναι ο ίδιος ο παραπάνω, με την λέξη "λόγος" στη θέση του "πραγματικος αριθμός". Μιά και η ουσία του ορισμού αυτού περιέχεται ήδη στην περίπτωση των θετικών λόγων, μπορούμε να την διατυπώσουμε κι έτσι: *Αν μας δώσουν δύο (ομοειδή) μεγέθη, το* α *και το* β, *κι άλλα δύο (ομοειδή), το* γ *και το* δ, *θα λέμε ότι οι λόγοι* $\frac{\alpha}{\beta}$ *και* $\frac{\gamma}{\delta}$ *είναι ίσοι αν, και μόνον αν, κάθε κλάσμα* $\frac{\mu}{\nu}$ *φυσικών αριθμών μικρότερο απ' τον έναν είναι και μικρότερο απ' τον άλλον και κάθε μεγαλύτερο, μεγαλύτερο.* Μ' άλλα λόγια: *Θα λέμε ότι οι λόγοι* $\frac{\alpha}{\beta}$ *και* $\frac{\gamma}{\delta}$ *είναι ίσοι αν, και μόνον αν, γιά κάθε δύο φυσικούς* μ *και* ν, *ή* $\nu\alpha > \mu\beta$ *και* $\nu\gamma > \mu\delta$ *ή* $\nu\alpha < \mu\beta$ *και* $\nu\gamma < \mu\delta$ (*ή* $\nu\alpha = \nu\beta$ *και* $\nu\gamma = \mu\delta$, θα προσθέταμε, αν θέλαμε, πλεοναστικά, να τονίσουμε την δυνατότητα να είναι οι $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ ίσοι ρητοί). Η τελευταία αυτή διατύπωση δεν είναι, όμως, παρά η απόδοση, στην γλώσσα που γράφουμε εδώ τα μαθηματικά, τού όρου ε΄ του βιβλίου V του Ευκλείδη: *Εν τω αυτώ λόγω μεγέθη λέγεται είναι πρώτον προς δεύτερον και τρίτον προς τέταρτον, όταν τα του πρώτου και τρίτου ισάκις πολλαπλάσια των του δευτέρου και τετάρτου ισάκις πολλαπλασίων καθ' οποιονούν πολλαπλασιασμόν εκάτερον εκατέρου ή άμα υπερέχη ή άμα ίσα ή άμα ελλείπη ληφθέντα κατάλληλα.*

Ποιά είναι η πρόοδος που έγινε, στον ορισμό των ασυμμέτρων αριθμών, μεταξύ διατυπώσεως Ευκλείδη (αποδίδεται στον Εύδοξο) και διατυπώσεως του βιβλίου (που εισήγαγε στην Ελλάδα την θεωρία του Dedekind);

Η αρχαιοελληνική θεωρία αναφέρεται στην σύγκριση και, με βάση αυτήν, μέτρηση των *μεγεθών* (των "συνεχών" μεγεθών). Στην προ του Dedekind ευρωπαϊκή επιστήμη, βασικά, θεωρούσαν ότι τα γεωμετρικά μεγέθη προϋπάρχουν και δικαιολογούν την θεώρηση των ασυμμέτρων μεγεθών, σαν *μέτρων τους* (δηλαδή, τιμών των λόγων τους). Δηλαδή γίνεται δεκτό το αίτημα ότι υπάρχουν συγκρίσιμα, με την έννοια αυτή, μετρήσιμα μεγέθη και, με βάση αυτό, όταν ο λόγος δύο μετρησίμων ομοειδών μεγεθών τύχη να μην είναι ρητός αριθμός, ονομάζεται (από τους τότε Ευρωπαίους) ασύμμετρος *αριθμός*. Στην πιό ώριμη διατύπωση αυτού του τρόπου αντιμετωπίσεως, ο J. Bertrand (μεγάλος Γάλλος μαθηματικός) προσθέτει στα προηγούμενα ότι ο ασύμμετρος αριθμός ορίζεται από τον προσδιορισμό όλων των μικροτέρων και όλων των μεγαλυτέρων του ρητών αριθμών. Από την θεμελιωτικού τύπου προθεώρηση των γεωμετρικών μεγεθών απελευθερώνει οριστικά την έννοια του ασυμμέτρου αριθμού ο R. Dedekind. Αυτός δίνει στο φαινόμενο της "τομής" ολόκληρη την σημασία του (ο ίδιος θεωρεί ότι το διαπιστώνει γιά πρώτη φορά) και ορίζει *μέσω αυτού* (της *τομής-χάσματος)* τον ασύμμετρο αριθμό σαν ένα ένα νέο είδος αριθμού, *εντελώς ανεξάρτητα* απ' οποιαδήποτε *θεμελιωτική* γεωμετρική θεώρηση· δηλαδή, η γεωμετρία είναι δεκτή σαν κάτι που προσφέρει αφορμές ή πεδίο εφαρμογής γιά τους ασυμμέτρους, *όχι όμως και σαν κάτι απαραίτητο γιά τον ορισμό τους.* Ετσι ο Dedekind έδωσε τον ορισμό των ασυμμέτρων καθαρά "αριθμητικά". (Ως προς την πεποίθησή του ότι πρώτος αυτός διαπίστωσε το φαινόμενο της τομής, η ακριβέστερη αποτίμηση είναι αυτή που γίνεται στην υποσημείωση 2 της σελ. 4 του βιβλίου του Π. Ζερβού: "Η καθαρώς αριθμητική έννοια της τομής οφείλεται εις τον Dedekind").

Παρατηρούμε ότι, σαν λογικές οργανώσεις, τόσο η θεωρία που αναπτύσεται στα βιβλίο V (και επόμενα) του Ευκλείδη όσο και η θεωρία του Dedekind είναι προτιμώτερες από τις ενδιάμεσες ευρωπαϊκές του είδους που αναφέραμε· Γιατί η ελληνική και η θεωρία του Dedekind είναι εννοιολογικά ενιαίες (η πρώτη αφορά μόνον λόγους μεγεθών, η δεύτερη μόνον αριθμούς), ενώ οι υπ' όψη ευρωπαϊκές είναι εννοιολογικά ανακατωμένες (χρησιμοποιούν, στη *θεμελίωσή τους, και* λόγους μεγεθών *και* αριθμούς). Την διαπίστωση αυτήν την κάνουμε όχι από σχολαστικότητα αλλά γιατί έχει σοβαρές συνέπειες. Αν σε κάθε λόγο των αρχαίων αντιστοιχίσουμε τον κατά Dedekind "ίσο μ' αυτόν" αριθμό, και στο μεταξύ λόγων σύμβολο ≤ (αντ., +, αντ., ∘) το μεταξύ αριθμών ≤ (αντ., +, αντ., ∘), βλέπουμε ότι τα δύο αυτά μαθηματικά συστήματα (των λόγων και των αριθμών) διαφέρουν *μόνο* κατά το ότι τα *αντίστοιχα* στοιχεία, στο ένα και στο άλλο, έχουν στο μεν πρώτο το όνομα "λόγος", στο δε άλλο, "αριθμός"· *Τίποτ' άλλο.* Οταν δύο μαθηματικά συστήματα παρουσιάζουν αυτήν την σχετική μαθηματική κατάσταση, συνηθίζουμε *σήμερα* να τα βλέπουμε σαν, μαθηματικώς, *τα ίδια* τα λένε "ισόμορφα". Είναι, λοιπόν, εκπληκτικό ότι οι αρχαίοι Ελληνες (τελικά, Εύδοξος, Ευκλείδης) βρήκαν τίποτα λιγώτερο από *ένα σύστημα ισόμορφο με το σύστημα των πραγματικών αριθμών που διαθέτουμε από τον Dedekind κι εδώ.*

Η υπεροχή της αρχαιοελληνικής ακριβολογίας απέναντι σε μερικές τωρινές σχολικές διατυπώσεις φαίνεται και στο εξής: Ο α΄ όρος του XI βιβλίου λέει: "Σύμμετρα μεγέθη λέγεται τα τω αυτώ μέτρω μετρούμενα, ασύμμετρα δε, *ων μηδέν ενδέχεται κοινόν μέτρον γενέσθαι"* . Κατά λέξη: "*Ασύμμετρα* ονομάζονται τα μεγέθη γιά τα οποία κανένα μέτρο δεν μπορεί να γίνη κοινό". Καθώς βλέπουμε, δεν υπάρχουν εδώ πρωθύστερα ή λογικές ασυνέπειες. Τέτοια υπάρχουν, όμως, φανερά στον επόμενο "ορισμό" (μερικών συγχρόνων βιβλίων γιά μαθητές): "*Ασσύμετρος* ή *άρρητος* ονομάζεται ο αριθμός, ο οποίος δεν είναι δυνατόν να γραφή ως κλάσμα ακεραίων αριθμών". Γιά να είναι λογικά δεκτός ο "ορισμός" αυτός, θα πρέπει να έχη δοθή προηγουμένως αληθινός ορισμός των *(πραγματικών)* αριθμών. Αν, όμως, ο τελευταίος αυτός ορισμός είχε δοθή με *οποιονδήποτε* από τους (σωστούς) τρόπους με τους οποίους ορίζουμε *από τους ρητούς* τους ασυμμέτρους, τι σκοπό θα εξυπηρετούσε ο περιττός πιά παραπάνω "ορισμός"; (Εκτός αν τα *γιά μαθητές* βιβλία προϋποθέτουν έναν *καθαρά αξιωματικό* ορισμό του διατεταγμένου σώματος των πραγματικών αριθμών . . .).

Γιά τον ορισμό του **R**, τρία άλλα σημαντικά κείμενα είναι τα εξής: 1) *Θεωρία των αρρήτων* (= ασυμμέτρων) *αριθμών, των ορίων και της συνεχείας* (στα γαλλικά) του Reni Baire (έκδοση Vuibert). Σύντομη μονογραφία, που είναι απόσπασμα από τον πρώτο τόμο του διτόμου αριστουργήματος "Μαθήματα επάνω στις γενικές θεωρίες της Αναλύσεως", του μεγαλοφυούς αυτού Γάλλου μαθηματικού. 2) και 3) Μονογραφίες του Νικολάου Κριτικού, που τις έχει προσφέρει στην Ελληνική Μαθηματική Εταιρία. Στην 2), βρίσκεται μιά από τις διεθνώς πιό πλήρεις πραγματείες του κατά Dedekind ορισμού. Στην 3), γίνεται η μοναδική *λεπτομερής* ανάπτυξη, που έχω υπ' όψη μου, του ορισμού με άπειρα δεκαδικά ψηφία. Ο τίτλος της είναι: "Εισαγωγή στα Ανώτερα Μαθηματικά. Οι Πραγματικοί Αριθμοί.".

Ξαναρχόμαστε, τώρα, στην παρουσίαση της θεωρίας των διατεταγμένων σωμάτων, που έχουμε κάνει *πριν* από την "Πλήρωση . . . " και που βασίζεται, ουσιαστικά, στο βιβλίο του A. Prestel, στο οποίο έχουμε, ήδη, αναφερθή.

Πρόταση. *Αν διατεταγμένο σώμα Α είναι πλήρες, κατά Εύδοξο-Dedekind, τότε είναι αρχιμήδειο.*
Απόδειξη. Αφού το Α είναι διατεταγμένο, περιέχει υπόσωμα ισόμορφο με το **Q**. Απλοποιώντας την διατύπωση, ας υποθέσουμε ότι αυτό είναι το **Q**. Αποδεικνύουμε, με εις άτοπον απαγωγή, ότι το σύνολο των ανωτέρων φραγμάτων του **Q** είναι κενό. Εστω ότι *δεν* είναι. Αφού το Α είναι πλήρες, κατά Εύδοξο-Dedekind, ισχύει το θεώρημα του Bolzano, επομένως, το **Q** έχει ανώτερο πέρας Μ, που, φανερά, *δεν* μπορεί να ανήκη στο **Q**. Επομένως, γιά κάθε $\rho \in \mathbf{Q}$, $\rho < M$ και δεν υπάρχει ανώτερο φράγμα Λ του **Q**, με $\Lambda < M$. Ομως, φανερά, και $\rho+1 < M$, άρα, $\rho < M-1$. Ατοπο. Αρα, στο Α δεν υπάρχουν στοιχεία > απ' όλα τα στοιχεία του **Q**. Επομένως, το Α είναι αρχιμήδειο. ο.ε.δ.

Θεώρημα. *Εστω ότι το Α είναι διατεταγμένο σώμα πλήρες κατά* Εύδοξο-Dedekind, *Τότε:* 1) *Κάθε αρχιμήδειο διατεταγμένο σώμα είναι ισόμορφο, και ως προς την διάταξη, με κάποιο υπόσωμα του* Α. 2) *Το* Α *είναι ισόμορφο και ως προς την διάταξη, με το σώμα των πραγματικών αριθμών* **R**.

Μιά καλή **ορολογία**: Ο και ως προς την διάταξη ισομορφισμός λέγεται, από ορισμένους Μαθηματικούς (Garrett Birkhoff, Paul Dubreil, . . .) *ισοτονία.*
Απόδειξη. 1) Ας καλέσουμε A_1 το θεωρούμενο σώμα. Από την προηγούμενη πρόταση 6, υπάρχει υπόσωμά του, πυκνό σ' αυτό, ισότονο με το **Q**. Ας το καλέσουμε αυτό $\mathbf{Q}_1$. Ας συμβολίζουμε με $\leq$ την διάταξη στο Α και με $\leq^*$ την διάταξη στο A_1. Ας είναι το λ_1 τυχόν στοιχείο του A_1. Θεωρούμε τις δυό τάξεις των "ρητών" (= στοιχείων του $\mathbf{Q}_1$), που είναι $\leq \lambda_1$ (αριστερή τάξη) και $> \lambda_1$ (δεξιά τάξη). Μεταβαίνουμε, τώρα, με την ισοτονία, στις αντίστοιχες τάξεις του **Q**. Αφού το Α είναι πλήρες, κατά Εύδοξο-Dedekind, ορίζουν κι αυτές ένα στοιχείο, που ας το καλέσουμε λ. Αντιστοιχίζουμε το λ στο λ_1. Αποδεικνύουν, ύστερα, ότι η επέκταση αυτή της αρχικής απεικονίσεως σ: $\mathbf{Q}_1 \to \mathbf{Q}$ στην $A_1 \to A$, είναι κι αυτή *ισοτονία.* 2) Οταν το A_1 είναι κι αυτό πλήρες κατά Εύδοξο-Dedekind, θεωρείται και η απεικόνιση $\mathbf{Q} \to \mathbf{Q}_1$, που ορίζεται σαν η αντίστροφη της σ, που ήταν 1-1 και επί. Η ίδια ακριβώς συλλογιστική την επεκτείνει σε μιά απεικόνιση φ: $A \to A_1$, επίσης *ισοτονία.* Η κάθε μιά από τις δυό αυτές ισοτονίες σ και φ είναι 1-1 και επί, και όταν τις συνθέτουμε, κατά την μία ή την άλλη φορά, δίνουν, και τις δύο φορές, *ταυτοτική απεικόνιση.*

Προσοχή. Τον όρο "αντίστροφη απεικόνιση" χρησιμοποιήσαμε, εδώ, με την απλή έννοια, που έχει, σε αντιστοιχίες 1-1 *και επί.*

Μέρος τέταρτο.
Πλήρωση των μη αρχιμηδείων σωμάτων.

Κάθε διατεταγμένο σώμα είναι *πυκνό*, ως προς την διάταξή του (γιατί, γιά τα στοιχεία του α και β, από την α < β έπονται οι
$\alpha < \frac{\alpha+\beta}{\alpha} < \beta$). Επομένως, *δεν έχει άλματα.* Αρα, έχει μόνο τομές και, ίσως, και χάσματα. Επομένως, αν είναι D-πλήρες (δηλαδή, αν δεν έχει χάσματα), θα είναι πλήρες κατά Εύδοξο-Dedekind. Τώρα, από την τελευταία πρόταση του τρίτου μέρους, ξέρουμε ότι *κάθε σώμα πλήρες κατά* Εύδοξο-Dedekind *είναι* αρχιμήδειο.
Επομένως, το να μιλάμε γιά "πλήρωση" των *μη* αρχιμηδείων σωμάτων, *ως προς την διάταξή τους,* δεν έχει νόημα αν δεν δώσουμε ένα νέο ορισμό της "πληρώσεως". Προϋπόθεση γιά κάτι τέτοιο, όμως, είναι να δούμε, σε παραδείγματα, πώς, ακριβώς, είναι "κατασκευασμένα" τα μη αρχιμήδεια σώματα. Αυτό, και κάνουμε, τώρα.

Παίρνουμε το **Q** και ένα *σύμβολο* (όχι αριθμό) x, και σχηματίζουμε, σαν συμβολικά "αθροίσματα γινομένων", τα ως προς x "πολυώνυμα", με συντελεστές απ' το **Q**· επίσης, τα "κλάσματα", με αριθμητή και παρονομαστή τέτοια πολυώνυμα (ο παρονομαστής, με τους συντελεστές του όχι όλους μηδενικούς). Ορίζουμε, τώρα, την πρόσθεση, την αφαίρεση, τον πολλαπλασιασμό και την διαίρεση, των "πολυωνύμων" και των "κλασμάτων" αυτών, όπως συνήθως, και με τις συνηθισμένες συμφωνίες. Ετσι, το σύνολο των "πολυωνύμων" αυτών, με τις τρείς πρώτες απ' αυτές τις πράξεις, γίνεται *αντιμεταθετικός δακτύλιος*· και, των "κλασμάτων" με τις τέσσερεις πράξεις, *αντιμεταθετικό σώμα.*

Διεθνής ορολογία και συμβολισμός. Τα υπ' όψη "πολυώνυμα" καλούνται *τυπικά πολυώνυμα* (γαλλικά: polynτmes formels· αγγλικά: formal polynomials)· τα "κλάσματα", *ρητές μορφές* (γαλλικά: formes rationelles· αγγλικά: rational forms). Ο δακτύλιος, συμβολίζεται με **Q**[x] και το σώμα, με **Q**(x).

Σημείωση. Η αντίστοιχη ορολογία και ο αντίστοιχος συμβολισμός επεκτείνονται στην περίπτωση του κάθε (αντιμεταθετικού) σώματος K, στην θέση του **Q**. Σε όλες τις περιπτώσεις, το x καλείται *απροσδιόριστη* (γαλλικά: indιterminιe· αγγλικά: indeterminate).

Το x δεν νοείται ως ρίζα αλγεβρικής εξισώσεως, με συντελεστές από το K.
Σχόλιο. Αν δεν υπάρχει λογική αντίφαση στα θεμέλια της θεωρίας συνόλων (αυτό, το ελπίζουμε), ούτε οι παραπάνω υποθέσεις οδηγούν σε λογική αντίφαση. Εξ' άλλου, σε άλλη γλώσσα, έτσι κάναμε, στην ουσία, τις πράξεις μεταξύ πολυωνύμων και κλασμάων από πολυώνυμα, στο σχολείο. Τα πολυώνυμα-συναρτήσεις, έρχονται μετά.

Ορολογία. Στην ειδική περίπτωση του "σταθερού" πολυωνύμου (δηλαδή, όπου όλες οι ≥ 0 δυνάμεις του x έχουν μηδενικούς συντελεστές), ονομάζουμε "μεγιστοβάθμιο" όρο του, τον "σταθερό" όρο του. Αυτός και ο "συντελεστής" του, συμπίπτουν.

Θεωρούμε, τώρα, το σύνολο P^* των στοιχείων $\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}$ του **Q**(x) [τα σ(x) και φ(x), τυπικά πολυώνυμα], με την ιδιότητα *οι συντελεστές των μεγιστοβαθμίων όρων στον αριθμητή και τον παρονομαστή να είναι ομόσημοι μη μηδενικοί*. Το

$P^*\cup\{0\}$ έχει τις ιδιότητες P.1), P.2), P.3) και P.4) και, επομένως είναι *θετικός κώνος.* Αρα, το **Q**(x), εφοδιασμένο με την διάταξη, που ορίζει ο P, είναι *διατεταγμένο σώμα.* Ας κάνουμε πιό "αισθητή" αυτή την διάταξη. Το x είναι > απ' όλους τους φυσικούς· το $\frac{1}{x}$, > 0 και < $\frac{1}{\nu}$, γιά κάθε φυσικό ν > 0. Γιά κάθε δύο μη μηδενικούς φυσικούς μ και ν, με ν > μ, $x^\nu > x^\mu$ και $0 < \frac{1}{x^\nu} < \frac{1}{x^\mu}$.

Γιά κάθε ρητό α > 0, $10^{1000}x^{1996} < \frac{1}{10^{100000}}x^{1997}$.

Άλλο παράδειγμα: Παίρνουμε το **Q**(x) και ας είναι το y μιά απροσδιόριστη, *ως προς αυτό.* Έτσι, *το* y *δεν είναι ρίζα αλγεβρικής εξισώσεως, με συντελεστές απ' το* **Q**(x). Θεωρούμε το σώμα **Q**(x)(y)· δηλαδή, το σώμα K(y) όπου το σώμα (των συντελεστών) είναι το **Q**(x). Το σώμα **Q**(x)(y) είναι, στην ουσία, το ίδιο με το **Q**(y,x)· δηλαδή, είναι το σύνολο των κλασμάτων $\frac{\sigma(x,y)}{\varphi(x,y)}$, όπου ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι πολυώνυμα ως προς x και y, με συντελεστές απ' το **Q**, οργανωμένο, με τις συνηθισμένες πράξεις και τους συνηθισμένους κανόνες τους, σε αντιμεταθετικό σώμα.

Επεκτείνουμε την διάταξη του **Q**(x) στο **Q**(x,y), ακριβώς, όπως πιό πάνω. Έτσι, γιά κάθε στοιχείο $\frac{f(x)}{g(x)}$ του **Q**(x) και γιά κάθε ρητό α > 0, $\frac{f(x)}{g(x)} < \alpha y$· ακόμα, $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$ κ.λ.π.

Εναλλάσσοντας τους ρόλους των x και y, λαβαίνουμε μιά άλλη διάταξη του **Q**(x,y), συμβιβαστή, κι' αυτήν με το + και το ∘ . Φανερά, η διαδικασία αυτή μπορεί να συνεχιστή γιά απροσδιόριστες x_1, x_2, ...

Αφήνουμε, τώρα, τα παραδείγματα και ερχόμαστε στην γενική περίπτωση.

Παρατηρούμε ότι, στην απόδειξη της τελευταίας προτάσεως του τρίτου μέρους, το άτοπο έβγαινε από το ότι, σε κάποιον μερισμό-χάσμα (A,B) του διατεταγμένου σώματος σε δύο τάξεις, *όποιο στοιχείο* > 0 *της* A *και να προσθέταμε σε στοιχεία* (π.χ. σε όλα τα στοιχεία) *των* A *και* B, *αυτός δεν άλλαζε* (δηλαδή, οι A και B μένανε οι ίδιες)· ενώ, βέβαια, η αφαίρεση του ίδιου στοιχείου από το "εμφυτευόμενο" μεταξύ των A και B "υποψήφιο" ελάχιστο της B, άλλαζε αυτό το ελάχιστο.

Έτσι, η αληθινή αιτία, που ένα *μη* αρχιμήδειο σώμα δεν δέχεται πλήρωση κατά Εύδοξο-Dedekind βρίσκεται στο ότι υπάρχουν μερισμοί-χάσματα (A,B) του σώματος αυτού σε δύο τάξεις, με 0∈A, που *η πρόσθεση στοιχείων* > 0 *της* A *στα στοιχεία των* A *και* B, *να μην τις μεταβάλη.* Το φαινόμενο αυτό δεν μπορεί να παρουσιαστή στα *αρχιμήδεια* σώματα, *ακριβώς, γιατί σε εκείνα ισχύει το αξίωμα του Αρχιμήδη* (που το χρησιμοποιεί, ήδη, ο Ευκλείδης).

Ιστορική σημείωση. Η επισήμανση, στα "στοιχεία" του Ευκλείδη, του ξεχωριστού ρόλου του "αιτήματος των παραλλήλων" και του αξιώματος του Αρχιμήδη, αρκεί γιά να καταδείξη τον *απίστευτα πρωτοποριακό χαρακτήρα* της αρχαίας ελληνικής σκέψης.

Προς τον νέο ορισμό "πληρώσεως" διατεταγμένου σώματος.

Ξεκινάμε απ' τα δύο παραδείγματα μη αρχιμηδείων σωμάτων, που αναφέραμε, λεπτομερώς. Στο πρώτο, ορίζουμε τον επόμενο μερισμό (A,B) σε δύο τάξεις:

Γιά γ∈**Q**(x) με γ > 0, το σύνολο των στοιχείων του **Q**(x), που είναι > από ένα, τουλάχιστον, από τα γ, $\gamma+\frac{1}{x}$, $\gamma+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$, . . . αποτελεί την Β. Έτσι, τα $\gamma+\frac{2}{x}$, $\gamma+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}$ ανήκουν στην Β· ενώ τα γ, $\gamma+\frac{1}{x}$, $\gamma+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$, . . . ανήκουν στην Α. Φανερά, αυτή αποτελείται από όλα τα στοιχεία του **Q**(x) που είναι ≤ από ένα, τουλάχιστον, απ' αυτό· γιατί, κάθε στοιχείο > από *όλα* της μορφής $\gamma+\frac{1}{x}+\ldots+\frac{1}{x^\nu}$ είναι, αναγκαία, ≥ από κάποιο στοιχείο της μορφής $\gamma+\frac{1}{x}+\ldots+\frac{1}{x^{\nu-1}}+\frac{2}{x^\nu}$. Έτσι, ούτε η Α έχει μέγιστο στοιχείο ούτε η Β ελάχιστο. Επομένως, ο μερισμός (Α,Β) είναι *χάσμα*· και, γιά κάθε φυσικό ν, υπάρχουν α∈Α και β∈Β, με β-α< $\frac{1}{x^\nu}$.

Φανερά, αν προσθέσουμε ένα, όποιο νά'ναι, > 0 στοιχείο της Α σε όλα τα στοιχεία των Α και Β, οι τάξεις αυτές μεταβάλλονται. Ακριβέστερα, γιά κάθε στοιχείο α > 0 της Α, Α+α ≠ Α και ο μερισμός-χάσμα (Α,Β) *μεταφέρεται* στον διαφορετικό μερισμό-χάσμα (Α+α, Β+α). Έτσι, η "εμφύτευση" ενός νέου στοιχείου "μεταξύ" *αυτών* των Α και Β *δεν* οδηγεί σε άτοπο.

Ανάλογη πορεία, στο δεύτερο παράδειγμα. Εδώ, το γ θα είναι στοιχείο, από το **Q**(x), > 0 και θα θεωρήσουμε τα γ, $\gamma+\frac{1}{y}$, $\gamma+\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}$, . . . και $\gamma+\frac{2}{y}$, $\gamma+\frac{1}{y}+\frac{2}{y^2}$, κτλ.

Οι υποθέσεις ότι η Α έχει και > 0 στοιχεία και (γι' αυτό) ότι γ > 0, που κάναμε, είναι μη απαραίτητες. Έγιναν, γιά την απλότητα της παρουσιάσεως.

Περνάμε, τώρα, στην γενική περίπτωση διατεταγμένου σώματος Κ, που έχει και χάσματα. Ας είναι ο μερισμός (Α,Β) ένα τέτοιο χάσμα. Ασχολούμαστε μ' αυτό *μόνον* όταν έχη την ιδιότητα: Γιά κάθε > 0 στοιχείο δ∈Κ, Α+δ ≠ Α.

Πρόταση. *Τότε, και μόνον τότε, γιά κάθε μη μηδενικό θετικό στοιχείο* ε *του* Κ, *υπάρχουν* α∈Α *και* β∈Β, *με* β-α < ε.

Απόδειξη. 1). Τότε: Μας δίνουν ένα, όποιο νάναι, ε > 0. Θεωρούμε το $\frac{\varepsilon}{2}$.

Αφού, από υπόθεση, Α+$\frac{\varepsilon}{2}$ ≠ Α, υπάρχει στοιχείο β του συνόλου Α+$\frac{\varepsilon}{2}$, με β∈Β. Το στοιχείο αυτό γράφεται β = α+$\frac{\varepsilon}{2}$, όπου α∈Α.

2) Έστω, τώρα, ότι Α+δ = Α. Παίρνουμε ε = δ. Αφού Α+ε = Α, δεν υπάρχουν στοιχεία α∈Α και β∈Β, με β-α < ε, σε αντίθεση με την υπόθεση.

Παράδειγμα. Στην περίπτωση *αρχιμηδείου* σώματος, με χάσματα (υποχρεωτικά, καθώς είδαμε στο τελευταίο θεώρημα, του τρίτου μέρους, τότε, *γνησίου υποσώματος του* **R**), *όλα τα χάσματα αυτά έχουν την υπ' όψη ιδιότητα.* Ο ορισμός των πράξεων στο εμπλουτισμένο, με τα "εμφυτευμένα" στα χάσματα αυτά στοιχεία, που ορίσαμε, τότε, σύνολο, μπορούσε να "λειτουργήση", γιατί ίσχυε η ιδιότητα ". . . β-α < ε". Είχαμε: Στην πρόσθεση: Από τις $\beta_1-\alpha_1<\frac{\varepsilon}{2}$ και $\beta_2-\alpha_2<\frac{\varepsilon}{2}$, έπεται η $\beta_1+\beta_2-(\alpha_1+\alpha_2)<\varepsilon$. Στον πολλαπλασιασμό: Γιά α_1, α_2, β_1, $\beta_2 \neq 0$, από τις $\beta_1 - \alpha_1 < \frac{\varepsilon}{2|\beta_2|}$ και $\beta_2 - \alpha_2 < \frac{\varepsilon}{2|\beta_1|}$, έπεται η $(\beta_1-\alpha_1)\beta_2+(\beta_2-\alpha_2)\alpha_1 < \varepsilon$. Στην διαίρεση: Γιά $\alpha\beta \neq 0$, $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} = \frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta}$. Άρα, από την $\beta-\alpha < \varepsilon|\alpha\beta|$, έπεται η $\left|\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right| < \varepsilon$ κτλ.

Παρατήρηση. Στις αποδείξεις τους, δεν χρησιμοποιήσαμε *πουθενά* το ότι το σώμα είναι *αρχιμήδειο.* Επομένως, *οι αποδείξεις αυτές εξακολουθούν να ισχύουν γιά τα χάσματα του τυχόντος διατεταγμένου σώματος* K, *που έχουν την ιδιότητα* ". . . $\beta-\alpha < \varepsilon$". Μ' άλλα λόγια, στα *τέτοια* χάσματα του K "εμφυτεύουμε" *από ένα* νέο στοιχείο και ορίζουμε τις πράξεις στο *έτσι επαυξημένο* σύνολο, ακριβώς, όπως κάναμε στην περίπτωση της πληρώσεως Ευδόξου-Dedekind. Από την ισχύ των αποδείξεων, που αναφέραμε, έπεται ότι το *έτσι επαυξημένο* σύνολο είναι, κι αυτό, *διατεταγμένο σώμα. Αυτή είναι και η μοναδική πλήρωση, που μπορεί να κάνη ένα διατεταγμένο σώμα, πάλι, διατεταγμένο σώμα.* (Ειδική περίπτωση: Η μετάβαση από το **Q** στο **R**.) Θα το ονομάσουμε, αυτό, *Γενικό λήμμα πληρώσεως των διατεταγμένων σωμάτων.* Αποτελεί ένα βήμα προς την κατεύθυνση του *Θεωρήματος της πληρώσεως των αλγεβρικώς κλειστών σωμάτων, χαρακτηριστικής μηδενός.*

Η διατύπωση και η απόδειξη του θεωρήματος αυτού χρειάζεται περισσότερες γνώσεις. Γι' αυτό, θα το παρουσιάσουμε αργότερα.