Διατεταγμένα σώματα - ΙΙ. (Άλγεβρα)

Χρησιμοποιούμε σαν κείμενο αφετηρίας το κείμενο του Kaplansky, που αναφέραμε στην **Σημείωση 3** της *Ενότητας Διατεταγμένα Σώματα Ι.*

Γράφει ο Kaplansky: « Προχωρούμε, τώρα, στην εξέταση αλγεβρικών επεκτάσεων τυπικά πραγματικών (= διαταξίμων) σωμάτων.

Θεώρημα 3. *Ας είναι το* Α *τυπικά πραγματικό σώμα και το* α *ένα στοιχείο του* Α *που δεν είναι τετράγωνο στοιχείου του. Ας υποθέσουμε ότι το* -1 *είναι άθροισμα τετραγώνων στοιχείων του σώματος* Α($\sqrt{\alpha}$). *Τότε, το* -α *είναι άθροισμα τετραγώνων στοιχείων του* Α. »

Διατυπώνουμε λίγο αναλυτικώτερα την απόδειξη του κειμένου. Υπενθυμίζουμε ότι το Α($\sqrt{\alpha}$) είναι το σύνολο των στοιχείων της μορφής u+v$\sqrt{\alpha}$, όπου τα u και τα v είναι στοιχεία του Α. Αφού το πολυώνυμο x^2-α είναι ανάγωγο στο Α, το υπ' όψη σύνολο αποτελεί σώμα {ισόμορφο με τον δακτύλιο - πηλίκον Α[x]/(x^2-a)}. (**Σχόλιο.** Η απόδειξη ότι το σύνολο αυτό αποτελεί σώμα αποτελεί, στην ειδική περίπτωση όπου Α = **Q**, κλασική σχολική άσκηση. Η σχολική απόδειξη μπορεί να μεταφερθή, όπως είναι και βρίσκεται, στην περίπτωση του τυχόντος σώματος Α.) Από την υπόθεση, υπάρχουν στοιχεία u_j και v_j του Α, με

$-1 = \sum_{j=1}^{\nu}\left(u_j + v_j\sqrt{\alpha}\right)^2$. Ούτε τα u_j ούτε τα v_j είναι όλα μηδενικά. Επομένως,

$-1 = \sum_{j=1}^{,} u_j^2 + \alpha\sum_{j=1}^{,} v_j^2 + 2\left(\sum_{j=1}^{,} u_j v_j\right)\sqrt{\alpha}$. Άρα, αν $\sum_{j=1}^{\nu} u_j v_j \neq 0$,

$$\sqrt{\alpha} = -\frac{1+\sum_{j=1}^{\nu} u_j^2 + \alpha\sum_{j=1}^{\nu} v_j^2}{2\sum_{j=1}^{\nu} u_j v_j}.$$

και, επομένως, $\sqrt{\alpha} \in$Α, σε αντίφαση με την υπόθεση ότι το α δεν είναι τετράγωνο στοιχείου του Α. Άρα, $\sum_{j=1}^{\nu} u_j v_j = 0$. Επομένως, $-1 = \sum_{j=1}^{\nu} u_j^2 + \alpha\sum_{j=1}^{\nu} v_j^2$.

Άρα, $-\alpha = \dfrac{1+\sum_{j=1}^{\nu} u_j^2}{\sum_{j=1}^{\nu} v_j^2} = \left(1+\sum_{j=1}^{\nu} u_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{\nu} v_j^2\right)^{-1}$.

Αφού το $S_A\backslash\{0\}$ είναι πολλαπλασιαστική ομάδα, ο δεύτερος παράγων είναι κι αυτός άθροισμα τετραγώνων. (Βλ. το 3 της Προτάσεως 4 του Πρώτου μέρους της *Ενότητας Διατεταγμένα Σώματα Ι.*). Άρα, το δεξιό μέλος της τελευταίας ισότητας είναι άθροισμα τετραγώνων. Επομένως, το -α είναι άθροισμα τετραγώνων στοιχείων του Α. Μ' άλλα λόγια, -$\alpha \in S_A$. ο.ε.δ. »

Από το κείμενο του Kaplansky:
Θεώρημα 4. *Ας υποθέσουμε ότι το* Α *είναι ένα τυπικά πραγματικό σώμα και ότι το* σ *είναι ένα πολυώνυμο περιττού βαθμού ανάγωγου στο* Α. *Έστω ότι η* θ *είναι μία ρίζα του* σ. *Τότε, το σώμα* Α(θ) *είναι τυπικά πραγματικό.*
Δηλαδή, μ' αυτές τις υποθέσεις, *όταν το* Α *είναι διατάξιμο, και το* Α(θ) *είναι διατάξιμο.*

Συμβολισμός. Γράφουμε, αδιάφορα, σ ή σ(x).

Διατυπώνουμε πολύ αναλυτικά την συνοπτική απόδειξη του κειμένου. Ας είναι βαθμού ν το υπ' όψη πολυώνυμο σ(x). Το σώμα Α(θ) είναι, βέβαια, μιά απλή αλγεβρική επέκταση του Α, ισόμορφη με τον δακτύλιο - πηλίκο Α(x)/(σ(x)) με διάσταση ν. Τα στοιχεία του είναι της μορφής $\alpha_0+\alpha_1\theta+ \ldots +\alpha_{\nu-1}\theta^{\nu-1}$, με τα $\alpha_0, \ldots ,\alpha_{\nu-1}$ στοιχεία του Α. Γιά να μπορούμε να κάνουμε επαγωγή στο ν, αναδιατυπώνουμε έτσι την υπόθεση του θεωρήματος γιά το σ: *Το σ είναι ένα πολυώνυμο περιττού βαθμού, που, αν* ν > 1, *είναι ανάγωγο.*

Γιά ν = 1, θ∈Α. Επομένως, Α(θ) = Α και το συμπέρασμα ισχύει, τετριμμένα. Έστω, λοιπόν, ότι ν > 1 περιττός (άρα ν ≥ 3) και ότι το συμπέρασμα ισχύει γιά κάθε πολυώνυμο βαθμού < ν, με την επί πλέον υπόθεση ότι, αν ο βαθμός αυτός είναι > 1, το πολυώνυμο είναι ανάγωγο. Σκοπός μας, να αποδείξουμε ότι ισχύει και γιά το ανάγωγο πολυώνυμο βαθμού ν.

Κάνουμε εις άτοπον απαγωγή. Έστω ότι θ ρίζα του σ(x) και ότι το Α(θ) δεν είναι τυπικά πραγματικό, δηλαδή˙ ότι $-1\in S_{A(\theta)}$. Υπάρχουν, τότε, στοιχεία του γραμμικού χώρου που θεωρήσαμε, που να έχουν άθροισμα τετραγώνων ίσο με -1. Μ' άλλα λόγια, υπάρχουν πολυώνυμα $\varphi_j(x)$, (j = 1, . . . ,ν), με συντελεστές από το Α, βαθμού < ν, με την ιδιότητα

(1) $$-1=\sum_{j=1}^{\nu}[\varphi_j(\theta)]^2 .$$

Ας μεταφερθούμε, τώρα, στον ισόμορφο με το Α(θ) δακτύλιο - πηλίκον Α(x)/(σ(x)). Τι σημαίνει, σ' αυτόν, η ισότητα (1); Ότι υπάρχουν πολυώνυμα, με συντελεστές από το Α (δηλαδή, αυτά, στοιχεία του δακτυλίου Α[x]) f(x), $f_j(x)$ (j = 1, . . . ,λ) και g(x), γιά τα οποία ισχύει η ισότητα (ταυτότητα, ως προς το x και το Α)

$$-1+f(x)\sigma(x)=\sum_{j=1}^{\nu}[\varphi_j(x)+f_j(x)\sigma(x)]^2+g(x)\sigma(x).$$

Η ισότητα αυτή, μετά από προφανείς στοιχειώδεις πράξεις, ανάγεται σε ισότητα, με την μορφή:

(2) $$-1=\sum_{j=1}^{\nu}[\varphi_j(x)]^2+h(x)\sigma(x),$$

όπου το h(x) πολυώνυμο με συντελεστές από το Α.

Ας ασχοληθούμε, τώρα, με το $\sum_{j=1}^{\nu}[\varphi_j(x)]^2$ της (2). Αποκλείεται να είναι όλα τα $\varphi_j(x)$ "σταθερά" πολυώνυμα˙ δηλαδή, στοιχεία του Α˙ γιατί, αφού, από υπόθεση, σ(θ) = 0, η αντικατάσταση του x με το θ, θα έδινε, τότε, το αποτέλεσμα $-1\in S_A$˙ αδύνατον, αφού το Α είναι, από υπόθεση, τυπικά πραγματικό σώμα. Επομένως, στο $\sum_{j=1}^{\nu}$ της (2) υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\varphi_j(x)$ στο οποίο εμφανίζεται, κατά μη τετριμμένο τρόπο, ≥ 1 δύναμη του x. Η δύναμη αυτή είναι, αναγκαία, ≤ ν-1˙ άρα, στο $[\varphi_j(x)]^2$ είναι ≤ 2ν-2 και, αναγκαία, άρτια.

Ας ασχοληθούμε, τώρα, με το h(x). Αφού η (2) είναι, στο Α, ταυτότητα ως προς το x, θα πρέπει το h(x)σ(x) να μην έχη βαθμό > από τον βαθμό του $\sum_{j=1}^{\nu}[\varphi_j(x)]^2$, άρα, > 2ν-2. Επομένως, το h(x)σ(x) έχει βαθμό ≤ 2ν-2. Τώρα, από υπόθεση, το σ(x) έχει βαθμό ν, περιττό. Άρα, το h(x) πρέπει να έχη βαθμό περιττό και ≤ ν-2.

Αφού το h(x) έχη βαθμό περιττό, δύο πράγματα μπορεί να συμβαίνουν: Είτε να έχη ρίζα α από το Α είτε να έχη ανάγωγο παράγοντα περιττό. Στην πρώτη περίπτωση, η αντικατάσταση του x από το α δίνει ισότητα $-1 = \sum_{j=1}^{\nu}[\varphi_j(\alpha)]^2$, που συνεπάγεται ότι $-1\in S_A$, δηλαδή, άτοπο. Άρα, το h(x) δεν έχει ρίζα από το Α. Επομένως, βρισκόμαστε στην δεύτερη περίπτωση.

Τώρα, αφού το h(x) δεν έχη ρίζα από το A, αναλύεται σε ανάγωγους, στο A, παράγοντες, από τους οποίους, αναγκαία, ένας, τουλάχιστον, είναι περιττού βαθμού· φυσικά, < ν. Ας καλέσουμε $h_1(x)$ έναν τέτοιον παράγοντα. Η ταυτότητα (2) γράφεται, τώρα,

$$(2') \qquad -1 = \sum_{j=1}^{\nu}[\varphi_j(x)]^2 + h_1(x)h_2(x)\sigma(x).$$

Ανεξάρτητα από το πώς φτάσαμε σ' αυτήν την ταυτότητα, αντιπροσωπεύονται ισότιμα, σ' αυτήν, τα ανάγωγα πολυώνυμα $h_1(x)$ και σ(x)· δηλαδή, μπορούμε να την διαβάζουμε με το $h_1(x)$ στην θέση του σ(x). Γιά το $h_1(x)$, όμως, περιττού βαθμού < ν, ισχύει η υπόθεση της επαγωγής· δηλαδή, ότι το $A[x]/(h_1(x))$ είναι τυπικά πραγματικό σώμα. Έχουμε, όμως, τότε, στο σώμα αυτό, από την (2΄), την ισότητα -1 = $\sum_{j=1}^{\nu}[\varphi_j(x)]^2$, που είναι αδύνατη. Άτοπο.

Επομένως, γιά κάθε ανάγωγο πολυώνυμο σ(x) περιττού βαθμού, όταν το A είναι τυπικά πραγματικό (= διατάξιμο) και το A[x]/(σ(x)) είναι τυπικά πραγματικό (= διατάξιμο). ο.ε.δ.

Θα έρθουμε, τώρα, σε μία θεμελιώδη έννοια, γιά την οποία οι διεθνείς όροι είναι "corps ordonné maximal" (= διατεταγμένο σώμα αξεπέραστο), του Bourbaki, και "real closed field" (= κλειστό πραγματικό σώμα), που χρησιμοποιείται, συχνά, στην αγγλόφωνη βιβλιογραφία. Εδώ, θα εισαγάγουμε έναν όρο, που τον θεωρούμε αντικειμενικά πιό σωστό: *Σώμα διατακτικά - αλγεβρικά αξεπέραστο.* Τώρα, επειδή είναι μακρός, θα χρησιμοποιούμε την συντομογραφία: *Σώμα δ.α.α.*

Ορισμός. Ένα διατεταγμένο σώμα καλείται *διατακτικά - αλγεβρικά αξεπέραστο* (σώμα δ.α.α.) όταν δεν υπάρχη γνήσια αλγεβρική επέκτασή του στην οποία να μπορή να επεκταθή η διάταξή του· δηλαδή, να γίνεται και η επέκταση αυτή, με την υπ' όψη διάταξη, διατεταγμένο σώμα.

Παράδειγμα. Το **R**.
Απόδειξη. Στην *Ανάλυση*, αποδεικνύεται ότι κάθε πολυώνυμο σ(x) βαθμού ν, με συντελεστές από το **R**, έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα, μιγαδική ή πραγματική. Έστω, τώρα, ο μιγαδικός αριθμός γ+iδ, με $\delta \neq 0$. Τότε, ο γενικός όρος $\alpha_\mu x^{\nu-\mu}$ δίνει, γιά x = γ+iδ, τον μιγαδικό αριθμό $(\gamma+i\delta)^{\nu-\mu}$. Εξετάζουμε, τώρα, τις διάφορες δυνατές περιπτώσεις. Γιά μ = ν, έχουμε τον πραγματικό αριθμό α_ν. Γιά μ = ν-1, τον μιγαδικό γ+iδ. Γιά μ < ν-1 (και βέβαια ≥ 0), το ανάπτυγμα του διωνύμου $(\gamma+i\delta)^{\nu-\mu}$ επί α_μ. Στο ανάπτυγμα αυτό, εμφανίζονται, σαν πολλαπλασιαστές πραγματικών αριθμών, *ανεξαρτήτων από τις δυνάμεις του* i, οι τέσσερεις δυνατές τιμές δυνάμεων του i: 1, -1, i, -i. Ας θεωρήσουμε, τώρα, και το σ(γ-iδ). Το α_μ μένει, βέβαια, αναλλοί-ωτο, το $\alpha_{\nu-1}(\gamma+i\delta)$ γίνεται $\alpha_{\nu-1}(\gamma-i\delta)$ και το ανάπτυγμα του $(\gamma-i\delta)^{\nu-\mu}$ γιά μ < ν-1, παρουσιάζει τις εξής μεταβολές: Το 1 = i υψωμένο σε δύναμη της μορφής 4λ (λ ≥ 0), παραμένει αναλλοίωτο, γιατί $(-i)^{4\lambda} = 1$. Το -1 = το i υψωμένο σε δύναμη που είναι πολλαπλάσιο του 2 αλλά όχι του 4, παραμένει αναλλοίωτο, γιατί
$-1 = (i^2)^{2\lambda+1} = ((-1)^2 i^2)^{2\lambda+1} = 9(-i)^2)^{2l+1}$. Τα i και -i, παίρνουν το ένα την θέση του άλλου, καθώς δείχνουν οι ισότητες:
Γιά λ > 0, $i^{2\lambda+1}$ (με το λ περιττό) = $i^{2\lambda}i = (i^2)^\lambda i = -i$,
ενώ $(-i)^{2\lambda+1}$ (με το λ περιττό) = $((-i)^2)^\lambda(-i) = (-i)(-i) = i$· κλπ.

Συμπέρασμα. Αν, μετά την αναγωγή των ομοίων όρων, το σ(γ+iδ) έχη την μορφή Γ+iΔ, όπου τα γ και δ πραγματικοί αριθμοί, το
σ(γ-iδ) θα έχη την μορφή Γ-iΔ. Έτσι, το γ+iδ είναι ρίζα της εξισώσεως σ(x) = 0 αν, και μόνον αν, η γ-iδ είναι ρίζα της. Αυτό είναι το κλασικό θεώρημα ότι *οι μιγαδικές και μη πραγματικές ρίζες αλγεβρικής εξισώσεως με πραγματικούς συντελεστές είναι, ανά δύο, συζυγείς* (η απόδειξη, που κάναμε, είναι, ουσιαστικά, σχολική). Έτσι, οι καθαρά μιγαδικοί παράγοντες του σ(x), όταν υπάρχουν, παίρνουν την μορφή $\alpha[x-(\gamma+i\delta)][x-(\gamma-i\delta)] = \alpha[(x-\gamma)^2+\delta^2]$, όπου τα α, γ και δ πραγματικοί αριθμοί. Ξαναρχίζοντας απ' την αρχή και χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της Αναλύσεως, που αναφέραμε, ξεκινώντας, καθώς και την διαίρεση πολυωνύμου διά

πολυωνύμου, στο **R**, διαπιστώνουμε ότι το σ(x) αναλύεται σε κ $(0 \leq \kappa \leq \nu)$ παράγοντες $(x\text{-}\rho_j)$ $(0 \leq j \leq \kappa)$, σε $\frac{\nu-\kappa}{2}$ δευτεροβάθμιους παράγοντες της μορφής $(x\text{-}\gamma)^2+\delta^2$ και στον συντελεστή α_0 του μεγιστοβαθμίου όρου του. Τα ρ_j είναι, βέβαια, στοιχεία του **R**. Έτσι, *δεν υπάρχει πολυώνυμο με πραγματική ρίζα ανάγωγο στο* **R**. Επομένως, *δεν υπάρχει πεπερασμένη αλγεβρική επέκταση του* **R** *στην οποία να μπορή να επεκταθή η διάταξή του.Επίσης, δεν υπάρχει αλγεβρική επέκταση του* **R** *στην οποία να μπορή να επεκταθή η διάταξή του*. ο.ε.δ.

Συμπληρωματική παρατήρηση. Οι μόνες γνήσιες πεπερασμένες αλγεβρικές επεκτάσεις που έχει το **R** είναι της μορφής $\mathbf{R}[x]/((x\text{-}\gamma)^2+\delta^2$. Τώρα, μιά τέτοια επέκταση που έχει στοιχείο της το γ+δi, έχει και το -γ+(γ+iδ) = iδ· άρα, και το $\frac{1}{\delta}$iδ· επομένως, και το i. Άρα, η επέκταση αυτή περιέχει το **R**(i), δηλαδή, το **C**. Όμως, καθώς αποδεικνύεται στην Ανάλυση, κάθε αλγεβρική εξίσωση με συντελεστές από το **C** έχει ρίζα μέσα στο **C**· και, επομένως, αναλύεται σ' αυτό σε πρωτοβάθμιους παράγοντες. Άρα, το **C** είναι αλγεβρικά κλειστό. Επομένως, συμπίπτει μ' αυτή του την επέκταση. Συνεπώς, *όλες οι γνήσιες αλγεβρικές επεκτάσεις του* **R** *συμπίπτουν με την* **R**(i) = **C**.

Η συμπληρωματική παρατήρηση μας προετοιμάζει γιά το σημαντικό θεώρημα: *Όταν το* A *είναι σώμα δ.α.α., το* A(i) *όπου* i *ρίζα της* $x^2+1 = 0$. είναι αλγεβρικά κλειστό.

Γράφει, γιά δ.α.α. σώματα, ο Kaplansky: « Την έννοια του τυπικά πραγματικού σώματος, την ενέπνευσε η εξέταση των διατε-ταγμένων σωμάτων. Με τον ίδιο τρόπο, την έννοια του σώματος δ.α.α. (real closed), την ενέπνευσε το παράδειγμα του σώματος των πραγματικών αριθμών.

Ορισμός 1. Ένα σώμα A είναι *δ.α.α.* αν το A είναι τυπικά πραγμα-τικό και δεν υπάρχη γνήσια επέκτασή του με διάσταση πεπερασμέ-νη, που να είναι τυπικά πραγματική. »

Μ' άλλα λόγια: Ένα σώμα A είναι *δ.α.α.* αν το A είναι διατάξιμο και δεν υπάρχη γνήσια αλγεβρική επέκτασή του, στην οποία να μπορεί να επεκταθή η διάταξή του.

Βλέπουμε, έτσι, ότι ο ορισμός 1 είναι ταυτόσημος με τον ορισμό που αναφέραμε πιό πρίν.

Συνεχίζει ο Kaplansky: Ισοδύναμα μπορούμε να πούμε ότι το A, είναι, μέσα στην αλγεβρική κλειστότητά του, ως προς το $\subseteq$ μεταξύ τυπικά πραγματικών υποσωμάτων της, αξεπέραστο προς τα επάνω.

Εφαρμόζοντας το λήμμα Zorn μέσα σε μιά αλγεβρική κλειστότητα του A, λαβαίνουμε:

Θεώρημα 5. *Κάθε τυπικά πραγματικό σώμα έχει αλγεβρική επέκταση που να είναι σώμα δ.α.α.*

Ας αναλύσουμε λίγο την παραπάνω συνοπτική απόδειξη του κειμένου του Kaplansky. Ας είναι το A ένα τυπικά πραγματικό (= διατάξιμο) σώμα. Ξέρουμε ότι, γιά κάθε σώμα, άρα, και γιά το A, υπάρχει αλγεβρική κλειστότητά του. Ας καλέσουμε B μιά τέτοια κλειστότητα του A. Θεωρούμε, τώρα, το σύνολο των υποσωμάτων της που περιέχουν το A και που είναι τυπικά πραγματικά. Το σύνολο αυτό δεν είναι κενό, αφού, από υπόθεση, το A ανήκει σ' αυτό. Εξ' άλλου, είναι, φανερά, επαγωγικό· γιατί, αν το -1 δεν είναι άθροισμα τετραγώνων στοιχείων κανενός μέλους ολικώς διατεταγμένης, με το $\subseteq$ οικογενείας από τέτοια σώματα, δεν μπορεί να είναι και άθροισμα τετραγώνων στοιχείων της ενώσεώς τους. (Αφού κάθε πεπερασμένο πλήθος τετραγώνων στοιχείων της ενώσεως, αναγκαία, βρίσκεται σε κάποιο μέλος της). Τώρα, με συλλογισμούς που έχουμε κάνει στην *Πέμπτη Ενότητα* αποδεικνύεται ότι και η ένωση αυτή αποτελεί σώμα· άρα, σώμα τυπικά πραγματικό. Επομένως, εφαρμόζεται το λήμμα του Zorn. Υπάρχει ένα, τουλάχιστον, τυπικά πραγματικό σώμα A΄, με $A \subseteq A' \subseteq B$, που είναι, ως προς το $\subseteq$ μεταξύ τυπικά πραγματικών σωμάτων Γ που να ικανοποιούν τις σχέσεις $A \subseteq \Gamma \subseteq B$, αξεπέραστο προς τα επάνω. Αυτό το Α΄ είναι, φανερά, σώμα δ.α.α. ο.ε.δ.

Σχόλιό μας. Αποδεικνύεται ότι *κάθε δυό αλγεβρικές επεκτάσεις ενός τυπικά πραγματικού (= διατάξιμου) σώματος, οι οποίες είναι δ.α.α., είναι ισόμορφες.*

Συνεχίζει, ο Kaplansky: Εξάγουμε, τώρα, μερικές συνέπειες των θεωρημάτων 3 και 4.

Θεώρημα 6. *Ένα σώμα* δ.α.α. Α *δεν έχει γνήσιες επεκτάσεις περιττού βαθμού. Κάθε στοιχείο του* Α *είναι είτε τετράγωνο στοι-χείου του* Α *είτε το αντίθετο τετραγώνου στοιχείου του* Α (αλλά όχι και τα δύο, αν είναι μη μηδενικό). *Το* Α *επιδέχεται μιά και μοναδική διάταξη.* »

Το κλασικό αυτό θεώρημα είναι, βέβαια, σωστό, η απόδειξη του Kaplansky, όμως, είναι ανεπαρκής. Γιατί θεωρεί το ότι το Α δεν έχει γνήσιες επεκτάσεις περιττού βαθμού, προφανή συνέπεια του θεωρήματος 4. Το οποίο, όμως, αναφέρεται μόνον σε *απλές αλγεβρικές* επεκτάσεις περιττού βαθμού. Ας δείξουμε, λεπτομερώς, πού βρίσκεται το πρόβλημα. Έστω ότι το $B \supset A$ είναι γνήσια επέκταση του Α, περιττού βαθμού. Τότε, το Β έχει, αναγκαία, προέλθει από μιά πεπερασμένη διαδοχή απλών αλγεβρικών επεκτάσεων του Α.
$A \subset B_1 \subset \ldots \subset B_\nu = B$. Από το θεώρημα 4 και την υπόθεση ότι το Α είναι δ.α.α. και το B_1 γνήσια επέκτασή του, έπεται ότι το B_1 δεν μπορεί να είναι επέκταση περιττού βαθμού. Άρα, αν υπάρχη γνήσια αλγεβρική επέκταση του Α, θα είναι αρτίου βαθμού. Έτσι, η επέκταση B_1 αν υπάρχη, θα είναι αρτίου βαθμού. Τώρα, αφού το Α είναι δ.α.α., το B_1 δεν θα είναι διατάξιμο. [**Παράδειγμα.** $A = \mathbf{R}$, $B_1 = \mathbf{R}(i)$, όπου το i ρίζα της $x^2+1 = 0$].

Τώρα, δεν έχουμε, ως τώρα, αποδείξει ότι το γενικό B_1 είναι κλειστό, Επομένως, δεν αποκλείεται, από πρώτα, να υπάρχη γνήσια επέκτασή του περιττού βαθμού. Στην πραγματικότητα, μας χρειάζεται, εδώ, ένα ισχυρό θεώρημα, που βρίσκεται στο πέμπτο κεφάλαιο *"Αντιμεταθετικά σώματα"* της *Άλγεβρας* των Bourbaki και που, στην περίπτωσή μας, λέει ότι: *Κάθε πεπερασμένη επέκταση σώματος με χαρακτηριστική* 0, *μπορεί να ληφθή σαν απλή αλγεβρική επέκταση.* (Καθώς η απόδειξή του χρειάζεται θεωρία Galois, δεν την δίνουμε, εδώ). Με χρήση του θεωρήματος αυτού, το συμπέρασμα γίνεται προφανής συνέπεια του θεωρήματος 4. Σημειώνουμε, όμως, ότι σ' αυτό το θεώρημα αναφερόντουσαν οι Birkhoff και MacLane, κάτω από το Πόρισμα στο Θεώρημα 9.

Ερχόμαστε, τώρα, στο υπόλοιπο μέρος του θεωρήματος, που πρέπει να αποδείξουμε.

Θα αποδείξουμε ότι κάθε άθροισμα τετραγώνων στοιχείων του Α είναι τετράγωνο στοιχείου του Α· δηλαδή, ότι $S_A \subseteq A^2$. Το κάνουμε με εις άτοπον απαγωγή. Έστω ότι $\alpha = \sum_{i=1}^{\nu} \beta_i^2$, με $\alpha \neq 0$ και ότι το α δεν είναι τετράγωνο στοιχείου του Α. Τότε, το $A(\sqrt{\alpha})$ είναι γνήσια αλγεβρική επέκταση του Α. Τώρα, αφού το Α είναι, από υπόθεση, σώμα δ.α.α., το $A(\sqrt{\alpha})$ δεν είναι τυπικά πραγματικό. Άρα, το -1 είναι, σ' αυτό, άθροισμα τετραγώνων στοιχείων του. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα 3, στο Α, το -α είναι άθροισμα τετραγώνων στοιχείων του· δηλαδή, υπάρχουν στοιχεία c_j ($j = 1, \ldots, \mu$) του Α, με $-\alpha = \sum_{j=1}^{\mu} c_j^2$.

Τώρα, αν προσθέσουμε, κατά μέλη, τις ισότητες $\alpha = \sum_{i=1}^{\nu} \beta_i^2$ και $-\alpha = \sum_{j=1}^{\mu} c_j^2$, λαβαίνουμε ότι $\sum_{i=1}^{\nu} \beta_i^2 + \sum_{j=1}^{\mu} c_j^2 = 0$· δηλαδή, στο Α, ένα άθροισμα τετραγώνων στοιχείων του όχι όλων μηδέν είναι ίσο με μηδέν. Άτοπο. Άρα, κάθε τετράγωνο στοιχείων του Α είναι τετράγωνο στοιχείου του Α.

Αναφέρει, τώρα, χωρίς απόδειξη (γι' αποδείξεις παραπέμπει αλλού), ο Kaplansky, το κλασικό

Θεώρημα 7. *Αν το σώμα* Α *είναι* δ.α.α., *τότε, το* Α(i), *όπου* $i^2 = -1$, *είναι αλγεβρικά κλειστό.*

Θ' ακολουθήσουμε γιά την απόδειξη αυτού του θεωρήματος σε μιά πληρέστερη μορφή την πορεία του Bourbaki. (*"Άλγεβρα",* Κεφάλαιο VI, Διατεταγμένες ομάδες και διατεταγμένα σώματα. Παρίσι, 1962, σελ. 39-41). Θα διατυπώσουμε, βέβαια, τα πράγματα πιό αναλυτικά.

Θεώρημα. (Euler - Lagrange). *Ας είναι το* Α *ένα διατεταγμένο σώμα. Οι επόμενες τρείς ιδιότητες είναι ισοδύναμες:*

1) *Το σώμα* Α(i) *είναι αλγεβρικά κλειστό* (το $i = \sqrt{-1}$).
2) *Το σώμα* Α *είναι* δ.α.α. .
3) *Κάθε θετικό στοιχείο του* Α *είναι τετράγωνο στοιχείων του και κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού, στο* Α, *έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο* Α.

Ορολογία. Οι Bourbaki, όπως και οι Birkhoff και MacLane, λένε "περιττού βαθμού *επάνω* στο Α" αντί "περιττού βαθμού *στο* Α", που γράψαμε. Χρησιμοποιήσαμε και τις δύο διατυπώσεις, χωρίς διάκριση.

Απόδειξη. Θ' αποδείξουμε, πρώτα, ότι το 1) συνεπάγεται το 2). Αφού, στο Α(i), $-1 = i^2$, το Α(i) δεν είναι διατάξιμο. Τώρα, αφού το Α(i) είναι αλγεβρικά κλειστό, κάθε αλγεβρική επέκταση L του Α είναι, αναγκαία, υπόσωμα του Α(i). Έτσι, αν το L είναι διατάξιμη αλγεβρική επέκταση του Α, θα έχουμε: $A \subseteq L \subset A(i)$. Άρα, σε βαθμούς:
$[A(i):A] = [A(i):L][L:A]$. Όμως, το Α(i) είναι, φανερά, επέκταση βαθμού 2 του Α. Άρα, $[A(i):L][L:A] = 2$.
Τώρα, αφού $L \neq A(i)$, θα είναι, αναγκαία, $[A(i):L] = 2$. Άρα, $[L:A] = 1$. Επομένως, L = Α. Άρα, δεν πρέπει να υπάρχη γνήσια επέκταση του Α. Επομένως, το Α είναι δ.α.α. Αποδείχθηκε, έτσι, ότι η 1) συνεπάγεται την 2).

Τώρα, το ότι η 2) συνεπάγεται την 3), είναι το ίδιο το παραπάνω Θεώρημα 6. Στ' αλήθεια, το να πούμε ότι *"ένα σώμα* δ.α.α. *δεν έχει γνήσιες αλγεβρικές επεκτάσεις περιττού βαθμού"* και ότι *"σ' ένα σώμα* δ.α.α., *κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει, μία τουλάχιστον, ρίζα"* είναι, ακριβώς, το ίδιο πράγμα. Γιατί, σύμφωνα με το ισχυρό θεώρημα, που χρησιμοποιήσαμε χωρίς να το αποδείξουμε (ακόμα), κάθε πεπερασμένη επέκταση διατεταγμένου σώματος μπορεί να ληφθή ως *απλή* αλγεβρική επέκτασή του. Έτσι, μπορούμε να περιοριστούμε, *εδώ*, σε πολυώνυμα *ανάγωγα* στο Α και σε *απλές* αλγεβρικές επεκτάσεις. Τώρα, *και οι δύο* διατυπώσεις λένε: *Σε σώμα* δ.α.α. *δεν υπάρχουν ανάγωγα πολυώνυμα περιττού βαθμού.*

Απομένει, λοιπόν, ν' αποδείξουμε ότι το 3) συνεπάγεται το 1). (Τα άλλα, θα έπωνται κυκλικά). Η συνεπαγωγή αυτή θα εξαχθή ως πόρισμα των επομένων δύο προτάσεων 1 και 2.

Πρόταση 1. *Ας είναι το* Α *ένα διατεταγμένο σώμα, που κάθε θετικό στοιχείο του είναι τετράγωνο στοιχείων του. Τότε, κάθε στοιχείο του* Α(i) *είναι τετράγωνο στοιχείων του και κάθε πολυώνυμο δευτέρου βαθμού* (= τριώνυμο) *στο* Α(i) *έχει ρίζα στο* Α(i).

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε ότι το τυχόν στοιχείο $\alpha+\beta i$ (τα α και β στοιχεία του Α) είναι τετράγωνο. Ψάχνουμε, λοιπόν, γιά ένα στοιχείο $x+iy$ με $(x+iy)^2 = \alpha+\beta i$. Γιά να συμβαίνη αυτό, πρέπει να έχουμε: $x^2-y^2 = \alpha$ και $2ax = \beta$. (Δηλαδή, στον ανυσματικό χώρο επάνω στο Α, με μονάδιαία, *ανεξάρτητα* στοιχεία, το 1 στο Α και το i στο Αi, να είναι ίσες οι συντεταγμένες στο Α και ίσες οι συντεταγμένες στο Αi). Απ' αυτές λαβαίνουμε:

$$(x^2-y^2)^2 = \alpha^2$$
$$4x^2y^2 = \beta^2.$$

Επομένως, $x^4-2x^2y^2+y^4 = \alpha^2$ και $4x^2y^2 = \beta^2$. Άρα, $x^4+2x^2y^2+y^4 = \alpha^2+\beta^2$.
Επομένως, $(x^2+y^2)^2 = \alpha^2+\beta^2$.
Ας συμβολίσουμε με c την θετική ρίζα του $\alpha^2+\beta^2$. Φανερά, $|\alpha| \leq c$ και $|\beta| \leq c$, ενώ $x^2+y^2 = c$.
Επομένως:

$$x^2-y^2 = \alpha^2$$
$$x^2+y^2 = c.$$

Από το σύστημα αυτό λαβαίνουμε, $x^2 = \frac{c-\alpha}{2}$. Καθώς c ≥ |α|, οι δύο αυτές εξισώσεις έχουν λύση μέσα στο A. Ας καλέσουμε x_0 και y_0 δύο τέτοιες λύσεις.. Τότε, $x_0^2-y_0^2 = \alpha$, $2x_0y_0 = \pm\beta$. Αν πάρουμε $y_0 = \frac{\beta}{2x_0}$, έχουμε, μ' αυτό το ζεύγος (x_0,y_0), λύση της εξισώσεως

$(x+iy)^2 = \alpha+\beta i$. Θεωρούμε, τώρα, το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, με τα α, β και γ, στοιχεία του A(i). Είναι,

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma = \alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta^4-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right].$$

Σύμφωνα με τα προηγούμενα το β^2-4αγ είναι τετράγωνο. Επομένως, και το $\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$ είναι τετράγωνο. Ας καλέσουμε d μία τετραγωνική ρίζα του. Τότε, το $\frac{-\beta}{2\alpha}+d$ είναι ρίζα του τριωνύμου. □

Πρόταση 8. *Ας είναι το* A *άπειρο σώμα αντιμεταθετικό (οποι-ασδήποτε χαρακτηριστικής). Ας υποθέσουμε ότι το* A *και* A΄ = A΄(i) *είναι τέτοια ώστε: α) Κάθε πολυώνυμο στο* A, *με περιττό βαθμό, έχει ρίζα στο* A. β) *Κάθε δευτεροβάθμιο τριώνυμο στο* A΄ *έχει ρίζα στο* A΄. *Τότε, το* A΄ *είναι αλγεβρικά κλειστό.*

Απόδειξη. Θα παριστάνουμε με $\overline{\alpha}$ το στοιχείο το συζυγές στο α· δηλαδή, την εικόνα του α στον αυτομορφισμό του A΄, που διατηρεί άθικτα τα στοιχεία του A και αντιστοιχίζει στο i το -i. Γιά κάθε πολυώνυμο f στο A΄, θα παριστάνουμε με $\overline{f}$ το πολυώνυμο που οι συντελεστές του είναι συζυγείς των αντιστοίχων συντελεστών του f. Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε πολυώνυμο στο A έχει ρίζα στο A΄. Στ' αλήθεια, αν το f είναι πολυώνυμο στο A΄, το $g = f\circ\overline{f}$ είναι πολυώνυμο στο A. (**Απόδειξη.** Ο παραπάνω αυτομορφισμός εναλλάσσει τα f και $\overline{f}$ και, επομένως, αφήνει το g άθικτο. Άρα, οι συντελεστές του g ανήκουν στο A). Τώρα, όταν το g έχη ρίζα στο A΄, αυτή θα είναι ρίζα είτε του f είτε του $\overline{f}$. Αν είναι ρίζα, τελειώσαμε. Αν είναι ρίζα του $\overline{f}$, η συζυγής της θα είναι ρίζα του f. [**Απόδειξη.** Εφαρμόζουμε τον παραπάνω αυτομορφισμό στο A΄. Η $\overline{f}$ (α+βi) = 0 πηγαίνει, έτσι, στην f(α-βi) = 0]. Έτσι, τελειώσαμε και πάλι. Ας είναι, τώρα, το f ένα πολυώνυμο στο A, βαθμού $2^n p$, όπου ο p περιττός. Από την υπόθεση α), η πρόταση αληθεύει γιά n = 0. Θα εφαρμόσουμε, τώρα, τελεία επαγωγή. Ας είναι το σώμα E μιά επέκταση του A, στην οποία το f αναλύεται σε πρωτοβάθμιους παράγοντες. f(x) = $\prod_i (x-\alpha_i)$. Παίρνουμε, τώρα, ένα, οποιοδήποτε, στοιχείο b του A και σχηματίζουμε το πολυώνυμο h, που έχει σαν ρίζες του τις $y_{ij} = \alpha_i+\alpha_j+b\alpha_i\alpha_j$ (j < i). Το πολυώνυμο αυτό έχει σαν συντελεστές του συμμετρικές συναρτήσεις των α_i, με συντελεστές (προερχομένους από το b) απ' το A. Επομένως, οι συντελεστές του h ανήκουν στο A. (Χρησιμοποιούμε, εδώ, ένα βασικό θεώρημα, που αποδεικνυότανε κλασικά με αλγοριθμικές μεθόδους, που έχουνε και πάλι έρθει στην "μόδα"· και αποδεικνύεται εύκολα με θεωρία Galois. Λέγεται *θεώρημα των συμμετρικών συναρτήσεων.*) Το πολυώνυμο αυτό, στο A, έχει, σαν βαθμό του, το πλήθος των συνδυασμών των $2^n p$ γραμμάτων, ανά δύο· δηλαδή,

$$\frac{2^n p(2^n p-1)}{2} = 2^{n-1}p(2^n p-1) = 2^{n-1}p',$$

όπου p΄ περιττός. Γι' αυτό, ισχύει η υπόθεση της επαγωγής. Επομένως, έχει μιά ρίζα y_{ij} στο A΄. Τώρα, αυτό ισχύει γιά κάθε b∈A και το A είναι άπειρο. Δηλαδή, υπάρχουν άπειρες, στο πλήθος, σχέσεις της μορφής $\alpha_i+\alpha_j+b\alpha_i\alpha_j \in A'$.Τώρα, αφού τα α_λ είναι πεπερασμένα, στο πλήθος, δύο, τουλάχιστον, τέτοιες σχέσεις με *διαφορετικά* b θα έχουν το *ίδιο* ζεύγος (α_i,α_j). Έτσι,

$$\begin{cases} \alpha_i + \alpha_j + b\alpha_i\alpha_j \in A' \\ \alpha_i + \alpha_j + b'\alpha_i\alpha_j \in A' \end{cases}.$$

Φανερά, αυτό είναι πρωτοβάθμιο σύστημα, με “αγνώστους” $x = \alpha_i+\alpha_j$ και $y = \alpha_i\alpha_j$. Άρα, τα $\alpha_i+\alpha_j$ και $\alpha_i\alpha_j$ εκφράζονται ρητώς συναρτήσει των b, b΄ και στοιχείων του A΄. Άρα, $\alpha_i+\alpha_j \in A'$ και $\alpha_i\alpha_j \in A'$. Έτσι, έχουμε, στο A΄, την εξίσωση $z^2-(\alpha_i+\alpha_j)z+ \alpha_i\alpha_j = 0$, με ρίζες τις α_i και α_j. Καθώς τα α_i και α_j είναι ρίζες της f, η απόδειξη τελείωσε. □

Καθώς είπαμε, την παραπάνω απόδειξη την πήραμε, ουσιαστικά, από τον Bourbaki. Τώρα, είναι φανερό γιά τον κάθε σκεπτόμενο μαθηματικό, ότι αυτή η με συγκλονιστικά πρωτότυπες ιδέες απόδειξη υπήρξε έργο μεγάλων μαθηματικών. Γιά τον λόγο αυτόν, μεταφέρουμε, εδώ, το ιστορικό σημείωμα του Bourbaki (*Άλγεβρα,* Κεφάλαιο VI, σελ. 163-164).

« Από τα μέσα του 18ου αιώνα, η αναζήτηση μιάς αποδείξεως του “θεμελιώδους θεωρήματος της Αλγέβρας” (δηλαδή, ότι κάθε αλγεβρική εξίσωση με μιγαδικούς συντελεστές έχει μιά, τουλάχιστον, ρίζα) βρίσκεται στην ημερησία διάταξη. Δεν είναι ανάγκη να υπενθυμίσουμε, εδώ, την προσπάθεια του d’ Alembert, με τον οποίο ξεκίνησε η σειρά των αποδείξεων, που χρησιμοποιούν τον Απειροστικό Λογισμό . . . Αλλά, το 1749, ο Euler κάνει μιά εντελώς διαφορετική προσπέλαση στο θέμα: Γιά κάθε πολυώνυμο f με πραγματικούς συντελεστές, προσπαθεί να αποδείξη την ύπαρξη μιάς αναλύσεώς του $f = f_1f_2$ σε δύο μη σταθερά πολυώνυμα f_1, f_2 με *πραγματικούς* συντελεστές. Μιά τέτοια ανάλυση (αν υπήρχε, πάντα) θα του έδινε την δυνατότητα να αποδείξη το “θεμελιώδες θεώρημα”, με αναδρομή στον βαθμό του f (δηλαδή, επαγωγικά). Αρκεί, μάλιστα, όπως παρατηρεί ο Euler, να σταματήση στον πρώτο παράγοντα περιττού βαθμού. (Γιατί, γιά κάθε τέτοιο πραγματικό πολυώνυμο, αποδεικνύεται, με Ανάλυση, ότι έχει ρίζα. Δεν εξετάζουμε, τώρα, το ότι, *αυστηρά*, το θεώρημα αυτό αποδείχθηκε μόλις τον 19ο αιώνα. Σ.τ.μ.) Έτσι, η δυσκολία εντοπίζεται στην περί-πτωση, όπου ο βαθμός n του f είναι άρτιος. Ο Euler αρκείται, τότε, στην περίπτωση, όπου οι ζητούμενοι παράγοντες f_1, f_2 είναι, και οι δύο, βαθμού $\frac{n}{2}$ και δείχνει πώς, με μία κατάλληλη διαδικασία απαλοιφής, μπορούμε να εκφράσουμε τους αγνώστους μας συντελεστές του f_1 και του f_2 ρητά, συναρτήσει μιάς ρίζας μιάς εξισώσεως με πραγματικούς συντελεστές, που οι ακραίοι όροι της έχουν *αντίθετα πρόσημα* και η οποία, επομένως, έχει μιά, τουλάχιστον, πραγματική ρίζα. Όμως, η απόδειξη του Euler δεν είναι παρά ένα σκίτσο, όπου σε πολλά ουσιώδη σημεία μένει σιωπηλός. Μόνον ο Lagrange, το 1772, κατορθώνει να κάνη πέρα όλες τις δυσκολίες . . . το κατορθώνει αυτό με μιά πολύ μακρά και πολύ λεπτομερειακή ανάλυση (δηλαδή, λογική ανάλυση), στην οποία δείχνει να είναι αριστοτέχνης στην χρήση των μεθόδων “Galois” που μόλις ο ίδιος είχε δημιουργήσει. (Σ.τ.μ. τα εισαγωγικά, επειδή ο Galois ήρθε μετά τον Lagrange).

Όμως, ο Lagrange, όπως και ο Euler και όλοι οι σύγχρονοί του, δεν διστάζει να κάνη συλλογισμούς φορμαλιστικούς μέσα σε ένα “σώμα ριζών” ενός πολυωνύμου (δηλαδή, στην γλώσσα του, να θεωρή “φανταστικές ρίζες” του πολυωνύμου αυτού).

Η Μαθηματική (Επιστήμη) της εποχής του δεν του παρείχε καμμιά δικαιολογία γι’ αυτόν τον τρόπο σκέψης. Έτσι, ο Gauss από το ξεκίνημά του ανοικτά εχθρικός στον τρελό φορμαλισμό του 18ου αιώνα, διαμαρτύρεται έντονα, στην διδακτορική διατριβή του, κατά αυτής της καταχρήσεως . . . . Δεν θα ήταν, όμως, ο Gauss, αν δεν είχε νιώσει ότι επρόκειτο, σ’ αυτήν την περίπτωση, γιά μιά εξωτερικά ελλατωματική παρουσίαση ενός συλλογισμού, κατά βάθος, σωστού. Τον βλέπουμε, έτσι, μερικά χρόνια αργότερα, να παίρνη μιά απλούστερη παραλλαγή της αποδείξεως του Euler, που την είχε αποδείξει, το 1759, ο de Fontenex (αλλά που δεν είχε μπορέσει, ο ίδιος, να την ολοκληρώση, αποδεικτικά) και να βγάζη απ’ αυτήν μιά καινούργια απόδειξη του “θεμελιώδους θεωρήματος”, όπου, επιμελώς, αποφεύγει κάθε χρήση “φανταστικών” ριζών. Έχει αντικαταστήσει αυτή την χρήση με έξυπνες (habiles) εισαγωγές (adjunctions) και εξειδικεύσεις (specialisations) απροσδιο-ρίστων. Αυτή την απόδειξη του Gauss, ουσιαστικά, εκθέσαμε πιό πάνω, με τς απλοποιήσεις που φέρνει η χρήση των αλγεβρικών επεκτάσεων. Ο ρόλος της Τοπολογίας στο “θεμελιώδες θεώρημα” έχει, έτσι, αναχθή στο μοναδικό θεώρημα, σύμφωνα με το οποίο ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές δεν μπορεί ν’ αλλάξη πρόσημο σ’ ένα διάστημα, χωρίς, προηγουμένως, να μηδενιστή. Το θεώρημα αυτό βρίσκεται, επίσης, στην βάση όλων των κριτηρίων διαχωρισμού των πραγματικών ριζών ενός πολυωνύμου (με πραγματικούς συντελεστές), που είναι ένα από τα προτιμημένα θέματα της αλγέβρας στον 19ο αιώνα. Στην διάρκεια αυτών των ερευνών, δεν μπορούσαν να μη διαπιστώσουν ότι η δομή διατάξεως (ολικής) του **R**, πολύ περισσότερο από την τοπολογία του **R**, παίζει τον ουσιαστικό ρόλο. Π.χ. το θεώρημα του Bolzano γιά τα πολυώνυμα ισχύει και στην περίπτωση, όπου, αντί γιά το **R**, έχουμε το σώμα, όλων των πραγματικών αλγεβρικών αριθμών. Το ρεύμα αυτό ιδεών βρήκε την κατάληξή του στην αφηρημένη θεωρία των διατεταγμένων σωμάτων που δημιούργησαν ο Emil Artin και ο Otto Schreier. Ένα από τα πιό αξιοσημείωτα αποτελέσματα, είναι, αναμφισβήτως, η ανακάλυψη ότι η ύπαρξη (συμβιβαστή με το + και το >) σχέσης διατάξεως σε ένα σώμα συνδέεται με καθαρά αλγεβρικές ιδιότητές του. »

Αναγκαστήκαμε, πιό πάνω, μερικές φορές, να δεχθούμε σημαντικά θεωρήματα χωρίς απόδειξη, γιατί αυτή χρειαζόταν θεωρία Galois, που δεν την έχουμε κάνει. Γιά να μην εμφανίζωνται αυτά τα κενά, θα καλύψουμε, στην επόμενη *Ενότητα* τον πυρήνα της θεωρίας Galois. Θα ακολουθήσουμε, σ’ αυτό, την γενική πορεία του Emil Artin, γιατί είναι, σε ό,τι αφορά το θεωρητικό μέρος της θεωρίας, πολύ “επιχειρησιακή”.