<< 1-10-2008 >>

Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά

Σημαντική Πηγή: Πρόκλος ($5^{ος}$ μ.Χ. αιώνας)

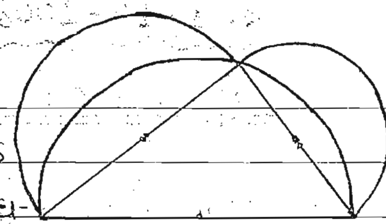
Υπάρχει ιστορία των αρχαίων μαθηματικών (Γεωμετρίας) γραμμένη από τον Εύδημο τον Ρόδιο (μαθητής Αριστοτέλη) της οποίας τα κύρια σημεία διασώζει ο Πρόκλος.

Κατάλογος Μαθηματικών:

1) Θαλής ο Μιλήσιος
2) Μάμερκος
3) Ιππίας ο Ηλειος
4) Πυθαγόρας
5) Αναξαγόρας
6) Οινοπίδης ο Χίος
7) Ιπποκράτης ο Χίος
8) Θεόδωρος ο Κυρηναίος ($\sqrt{2}, \ldots, \sqrt{17}$)
9) Πλάτωνας
10)
11) Αρχίλαος ο Ταραντίνος
12)
13)
14)
15) Εύδοξος ο Κνίδιος (άρρητους, εξάντληση)

Ευκλείδης
Αρχιμήδης
Ερατοσθένης

Ιπποκράτης ο Χίος



Σχολιαστής: Σιμπλίκιος όπου διασώζει την απόδειξη.

Θαλής ο Μιλήσιος (~600 π.Χ.)

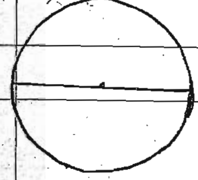
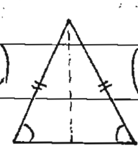
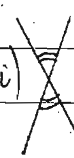
Θεωρείται ο άνθρωπος που θεμελίωσε την επιστήμη.

Θρύλοι για την ζωή του:
- μέτρησε απόσταση πλοίου από το λιμάνι.
- μέτρησε το ύψος πυραμίδας

Το βέβαιο είναι η Αναζήτηση Πρώτων Αρχών

Μαθηματικά Αποτελέσματα:

1) Η διάμετρος διαιρεί τον κύκλο σε δύο ίσα μέρη.
2) Οι παρά τη βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες
3) Κριτήριο ισότητας τριγώνων ΓΠΓ
4) Οι κατακορυφήν είναι ίσες
5) Γωνίες που βαίνουν σε ημικύκλιο είναι ορθές

(i)  (ii)  (iii)  Υποκρύπτουν αρχές "συμμετρίας" κ "δίπλωσης"

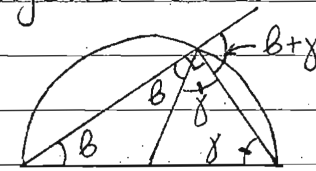
Τα "απέδειξε"? , Τα "δικαιολόγησε"?

Παραπομπή στα "Στοιχεία του Ευκλείδη"

Το (i) αποτελεί αξίωμα

(ii) & (iii) αποδεικνύονται στο 1ο βιβλίο.

"ισότητα" δια της "εφαρμογής" να συμπίπτουν επιβίωσε στα στοιχεία: << και τα εφαρμόζοντα ίσα εσί >>.



όλα όσα απαιτούνται παρουσιάζονται στα στοιχεία.

Το εμβαδό ορθογωνίου να ισούται με την περίμετρο: $x\cdot y = 2(x+y) \Leftrightarrow y = \frac{2x}{x-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = 2 + \frac{4}{x-2}$

δηλ $(x-2)|4$ άρα $x-2 = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 4 \end{cases}$ άρα $x = \begin{cases} 3 \\ 4 \\ 6 \end{cases}$,

$y = \begin{cases} 6 \\ 4 \\ 3 \end{cases}$ και $x \cdot y = \begin{cases} 18 \\ 16 \\ 18 \end{cases}$

Άρα θεωρούσαν τα 16 και 18 μοναδικά με αυτή την ιδιότητα και το 17 που είναι ανάμεσα το θεωρούσαν γκαντέμικο.

Ο Πυθαγόρας και η Εποχή του

1) Τα "μαθηματικά" κατείχαν κεντρική θέση στη διδασκαλία του.
- το σύμπαν διατάσσεται με βάση τους αριθμούς.
- Ο κόσμος συνίσταται από αντιτεθέμενα στοιχεία.
- το θείο είναι ενωποιούν στοιχείο
- η αρμονία είναι στοιχείο μετάβασης.
- οι αριθμητικοί λόγοι συνιστούν την αρμονία.

2) Μουσική - Αρμονία - Αριθμοί.

3) Ο αριθμός αποκτούσε μια μυστική δύναμη ανύψωση ψυχής, πίστευαν στη μετεμψύχωση

Παράδειγμα! Η τελειότατη αναλογία

Με σημερινούς όρους

A, B αριθμοί $R = \frac{A+B}{2}$, (αριθμητικός μέσος)

$H = \frac{2AB}{A+B}$, (αρμονικός μέσος)

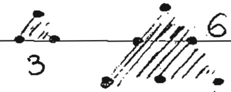
και ισχύει: $A : H = R : B$

π.χ. $R = \frac{12+6}{2} = 9$, $H = \frac{2 \cdot 12 \cdot 6}{12+6} = \frac{144}{18} = 8$

και ισχύει $12 : 8 = 9 : 6$

Δείγματα της Αριθμοθεωρίας των Πυθαγορείων:

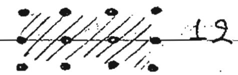
▷ Παραστατικοί αριθμοί: $1 \rightarrow \bullet$

α) Τριγωνικοί αριθμοί: 

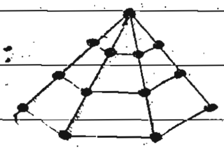
γενικός τύπος: $\frac{1}{2} n(n+1)$

β) Τετραγωνικοί αριθμοί: 

γεν. τύπος: n^2

γ) Ορθογώνιοι αριθμοί: 

γεν. τύπος: $n(n+1)$

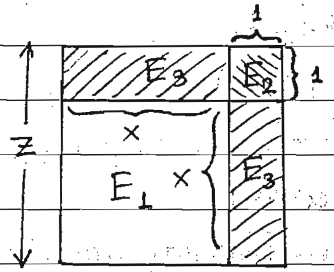
δ) Πολύγωνοι αριθμοί: 

γεν. τύπος: $\frac{1}{2} n(3n-1)$

Πρόβλημα: Να βρούμε ακέραιες λύσεις για την εξίσωση $x^2 + y^2 = z^2$

Απάντηση: $x = \frac{1}{2}(m^2 - 1)$, $y = m$, $z = \frac{m^2+1}{2}$

όπου m περιττός (απάντηση που υπάρχει στα στοιχεία του Ευκλείδη)



Μεθοδολογικό Εργαλείο: ο γνώμονας (που χρησιμοποιείται από ξυλουργούς)

$E_3 = x \cdot 1$

$2E_3 + E_2 = 2x + 1 \longrightarrow y^2$

Εφαρμογή των χωρίων.

<< 8-10-2008 >>

Αριθμητική των Πυθαγορείων

(α) Αριθμητ. βιβλία των "Στοιχείων" (3ος π.Χ αιώνας)

(β) Αριθμητ. του Νικόμαχου Γερασινού (4ος μ.Χ αιώνας)

Τέλειοι αριθμοί: Το άθροισμα των γνησίων διαιρετών είναι ο αριθμός

(6, 28, 496, 8128, ... και ο μεγαλύτερος ως τώρα!!! που είναι ο $2^{126}(2^{127}-1)$)

Ερώτημα: Πώς βρίσκονται οι τέλειοι;

Θεώρημα: Αν ο αριθμός $p=(1+2+2^2+\dots+2^n)$ είναι πρώτος τότε ο αριθμός $2^n\cdot p$ είναι τέλειος (με σημερινή ορολογία)

Σχόλια: (α) Παρατηρούμε ότι το Θεώρημα οδηγεί σε άρτιους τέλειους.

ο αλγόριθμος: $n \to 2^{n+1}-1 \to$ πρώτος $\to$ τέλειος $2^n(2^{n+1}-1)$
$\searrow$ όχι πρώτος

πρώτοι του Mersene (1644)

(β) Ανοιχτό πρόβλημα: $\exists$? τέλειοι & άρτιοι;

Απόδειξη Θεωρήματος:

(Α) Χρειάζεται η έννοια της Γεωμετρ. Προόδου

(Β) Ας πούμε ότι υπολογίστηκε το p και βγήκε πρώτος!

Φτάνουμε $2^n\cdot p$ και θέλω να διαπιστώσω ότι είναι τέλειος.

(Β1) Να βρω τους γνήσιους διαιρέτες του $2^n\cdot p$

"Η θεωρία είναι η ανάλυση σε πρώτους παράγοντες"

$\Sigma_1 \to 1, 2, 2^2, \dots, 2^n \to \Sigma_1 = 2^{n+1}-1$

$\Sigma_2 \to p, 2p, 2^2p, \dots, 2^n p \to \Sigma_2 = (2^n-1)\cdot p$

$\Sigma_1 + \Sigma_2 = 2^n\cdot p$

(Γ) Εξήγηση ορολογίας και παραπομπές στον γεωμετρ. μέσο.

- γεωμετρική πρόοδος $\{x,y,z\} \Leftrightarrow y^2 = xz \Leftrightarrow$

Αναλογία $\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{\omega} = \dots$ αριθμοί με συνεχή αναλογία.

- Πως υπολογίζουμε το άθροισμα των όρων γεωμετρ. προόδου.

$\Rightarrow$ Ιδιότητα (σε σημερινή ορολογία) $a_1, a_2, \dots a_{\nu-1}, a_\nu$ γεωμ. πρόοδος

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_\nu}{a_{\nu-1}} \Rightarrow \frac{a_2-a_1}{a_\nu-a_1} = \frac{a_1}{a_1+a_2+\dots+a_\nu}$$

Στοιχεία Ευκλείδη: (Βιβλίο: IX. Πρόταση: 35)

- αριθμοί σε συνεχή αναλογία.
- από τον δεύτερο και τον τελευταίο αφαιρώ τον πρώτο.
- Ο λόγος των διαφορών που προκύπτουν είναι ίσος.
- Με το λόγο των διαφορών του πρώτου και

του αθροίσματος όλων πλην του τελευταίου.
(Απόδειξη: το κάνει για τέσσερεις όρους!!!)

Πρόταση IX.36: ($p = 1+2+\dots+2^n$ πρώτος $\Rightarrow$
$\Rightarrow 2^n \cdot p$ τέλειος!)

Αν το άθροισμα ενός δοσμένου πλήθους αριθμών που βρίσκονται σε συνεχή αναλογία με πρώτο όρο το 1 και λόγο τον 2, είναι πρώτος αριθμός.
Τότε το γινόμενο του αθροίσματος με τον τελευταίο όρο της αναλογίας είναι τέλειος.

Απόδειξη:

$1,\ \alpha=2,\ \beta=4,\ \gamma=8,\ \delta=16,\ \varepsilon=1+\alpha+\beta+\gamma+\delta=31$

$\zeta=\delta\cdot\varepsilon=496$

Θεωρία του άρτιου και του περιττού:
Ζεύξη στη Πυθαγόρεια Φιλοσοφία

Μετά τα Φυσικά Αριστοτέλη
- πεπερασμένο $\longrightarrow$ άπειρο
- περιττό $\longrightarrow$ άρτιο (αριθμοθεωρία)
- μονάδα $\longrightarrow$ πολλαπλότητα
- άρρεν $\longrightarrow$ θήλυ

Αριθμοθεωρία
(IX. 21-34)

30. Αν περιττός διαιρεί άρτιο τότε διαιρεί το μισό του.

[$\alpha | \beta$, β: άρτιος, τότε $\alpha \,\Big|\, \frac{\beta}{2} \Leftrightarrow$
άρτιος

$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha | 2\kappa \\ (\alpha,2)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha | \kappa$

$\Downarrow$

$\alpha x + 2y = 1$ πολ/ζω με κ.
$\alpha\kappa x + 2\kappa y = \kappa$

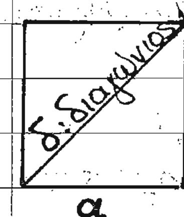
Απαιτεί θεωρητικό Υπόβαθρο!!!

Λόγος αριθμών $\Leftrightarrow$ αναλογία (ισότητα λόγων)
άλλου τύπου "αριθμός" (?) ($\longrightarrow$ "ρητούς")
"Η ουσία της Πυθαγόρειας κοσμοθεώρησης" $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ "Αρμονία"

Με χρήση λόγων $\Leftrightarrow$ Ερμηνεία του κόσμου.

Σημαντικό: Η θεωρία των λόγων προήλθε από τη φύση. Ο ισχυρισμός ότι τα πάντα βρίσκονται σε αναλογία αριθμών "κατέρρευσε".

Τρόπος: με την ανακάλυψη 2 μεγεθών που δεν υπόκεινται στον παραπάνω κανόνα.



α: πλευρά

όπου α και δ δεν μπορεί να περιγραφεί ως λόγος αριθμών.

Απόδειξη:

όπου $\underbrace{\delta^2=\alpha^2+\alpha^2}_{\text{Πυθαγ. Θεώρημα}}=2\alpha^2$, (1) Παρέκβαση → Γεωμετρικά Επιτεύγματα των Πυθαγορείων.

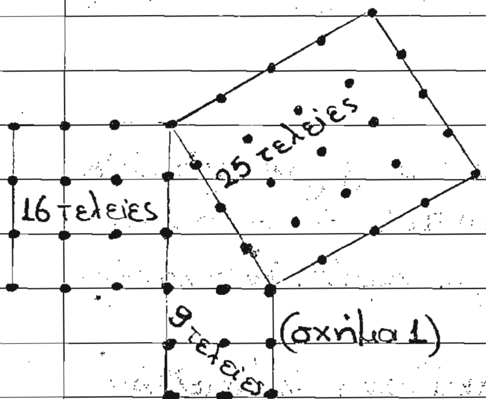
Μελέτη των ιδιοτήτων των σχημάτων, όπου εντάσσεται και το Πυθαγ. Θεώρημα.

δηλ. $5^2 = 4^2 + 3^2$ (τετράγωνοι αριθμοί)

π.χ. 9 ⟺ ⁝⁝⁝

Πρόβλημα (Ι.47):

Αρχίζοντας από ένα ορθογώνιο τρίγωνο και σχηματίζοντας τετράγωνα στις πλευρές του. Το τετράγωνο που σχηματίζεται στην υποτείνουσα είναι ίσο (ισεμβαδικό) με το άθροισμα των τετραγώνων που δημιουργούνται στις κάθετες πλευρές.



(σχήμα 1)

(2) Χ στοιχείων σ' ένα παράρτημα (Αριστοτέλη)

Χρήση της εις άτοπο επαγωγής:

Έστω $\frac{\delta}{\alpha} = \left(\frac{m}{\nu}\right)$ λόγος αριθμών m, ν σχετικά πρώτοι ↳ ανάγωγο κλάσμα.

οπότε $m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2$ άρτιος $\Rightarrow m$ άρτιος (*) $\Rightarrow n$ περιττός

(*) Θεωρία μονά-ζυγά: περιττές φορές περιττός περιττός.

$m = 2h \Rightarrow m^2 = 4h \Rightarrow 4h^2 = 2n^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow n^2 = 2h \Rightarrow n^2$ άρτιος $\Rightarrow n$ άρτιος

άτοπο.

Άρα τα δ και α δεν είναι σε ρητό λόγο (λόγος αριθμών) ⟹ α, δ άρρητα (που οδήγησε σε διάλυση της σχολής)

Υπέρβαση!

τρόποι: { • Γεωμετρικοποίηση των Μαθ/κών μέχρι την εποχή του Πλάτωνα
• Θεωρία των αρρήτων μεγεθών Εύδοξος

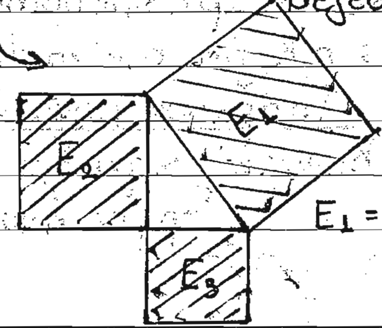
« 15-10-2008 »

Γεωμετρία των Πυθαγορείων:

Πυθαγόρειο Θεώρημα (?)

(500 π.Χ.) Πυθαγόρειες τριάδες ⇝ Πυθαγ. Θεωρ. (300 π.Χ)
(αφορά αριθμούς) (αφορά Εμβαδά "μεγέθη")

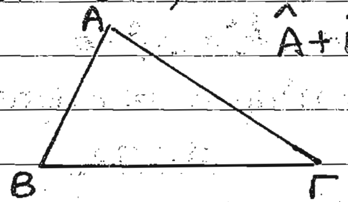
(σχήμα 1.)



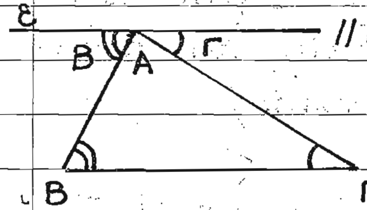
$E_1 = E_2 + E_3$

2) Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου
Πρόκλος 5ος μ.Χ αιώνας (σχόλια στα στοιχεία)

$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ$



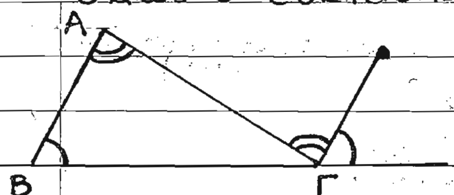
Απόδειξη:



//ΒΓ(βάση)

Σχόλιο: Αυτή η απόδειξη είναι θεωρητική (π.χ απαιτεί παραλ. εναλλάξ)

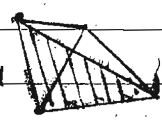
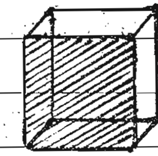
Όμως ο Ευκλείδης:



3) Κανονικά στερεά (Θαυμαστό!)

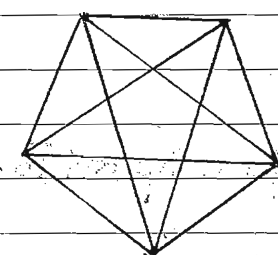
Κυρτό στερεό που οι έδρες του είναι ίδιου τύπου (ίσα) κανονικά πολύγωνα.
Σήμερα ονομάζονται Πλατωνικά στερεά γιατί τα χρησιμοποίησε ο Πλάτων (4ος αιώνας π.Χ για την κοσμολογία του.

Υπάρχουν μόνο 5

- Κανονικό τετράεδρο
  τριγωνική πυραμίδα 
- Κύβος  (έδρες τετράγωνα)
- Οκτάεδρο
- δωδεκάεδρο
- Εικοσάεδρο

Η λύση παρουσιάζεται πλήρως στο βιβλίο XIII των στοιχείων. Οι ιστορικοί τον αποδίδουν στον Θεαίτητο της Σχολής του Πλάτωνα. Και είναι επίτευγμα των αρχαίων Ελληνικών Μαθημ/κών

Τώρα: Τι απ'αυτά γνωρίζουν οι Πυθαγόρειοι?
Τετράεδρο, κύβος και δωδεκάεδρο απαντούν στις κρυσταλλώσεις των μετάλλων στη φύση.
Ειδικά για το δωδεκάεδρο υπάρχει το ορυκτό σαπωνίτης που κρυσταλλώνεται σ'αυτή τη μορφή στη Σικελία και υπάρχουν ομοιώματα σε Μουσείο.

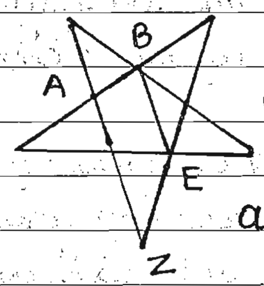


κανονικό πεντάγωνο

αστεροειδές πεντάγωνο

Το αστεροειδές πεντάγωνο ήταν το σήμα της σχολής των Πυθαγορείων, στο οποίο υπάρχουν μαθηματικές αναλογίες "Δομή".

Γεγονός: οι διαγώνιοι του κανονικού πενταγώνου (ή οι πλευρές του αστεροειδούς πενταγώνου) τέμνονται σε μέσο και άκρο λόγο



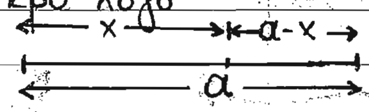
όπου $\widehat{A\Gamma Z} \simeq \widehat{B\Gamma E}$

$$\frac{x = A\Gamma}{\alpha = \Gamma Z} = \frac{B\Gamma = \alpha - x}{\Gamma E = x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \alpha(\alpha - x)$$

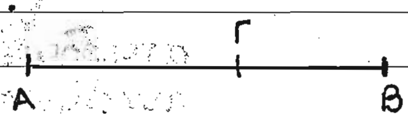
α: πλευρά του αστεροειδούς πενταγώνου.

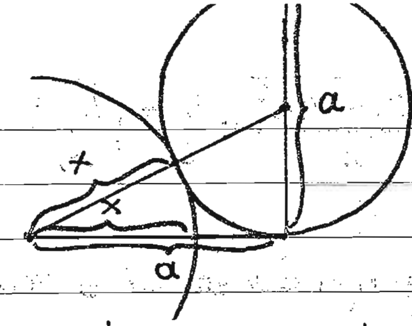
Δηλαδή: Χώρισα (διαίρεσα) ένα ευθύγραμμο τμήμα σε δύο μέρη ώστε το μεγαλύτερο από αυτά να είναι μέσο ανάλογο του τμήματος και του υπολοίπου δηλ. ο χωρισμός σε μέσο και άκρο λόγο

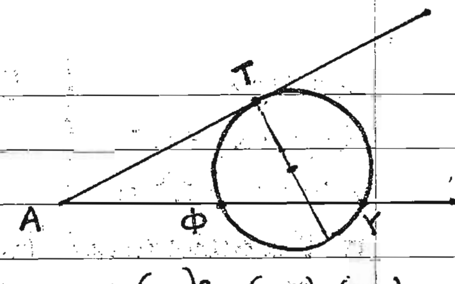


Δοσμένου του $\alpha \leftrightarrow AB$

• Πώς βρίσκω το Γ που το ορίζει η Χρυσή Τομή?







δεν υπάρχουν στοιχεία

$$(AT)^2 = (A\Phi)\cdot(AX)$$

Άλγεβρα: (προϋποθέτει "Λογισμό")

$x(\alpha+x) = \alpha^2$ "εξισώσεις με άγνωστο το x"

Ερώτημα: Υπάρχουν "αλγεβρικές" αντιμετωπίσεις πριν τη σύγχρονη εποχή?

(Βαβυλωνιακή Άλγεβρα) ⇔ συνδέεται ευθέως με λύση εξισώσεων

(Γεωμετρική Άλγεβρα) ⇔ βιβλίο ΙΙ των στοιχείων.

$$x(\alpha+x) = \alpha^2 \Leftrightarrow \begin{cases} xy = \alpha^2 \\ y - x = \alpha \end{cases} \quad \Bigg\| \quad \text{(ή π.χ. } x\cdot y = c^2 \text{ (εμβαδό)}, \; x + y = b \text{ (περίμετρος)}$$

Υπάρχουν γραπτές πηγές?

$x \cdot y = c^2$, $x + y = b$ |
• Χώρισε το b σε 2 μέρη, αποτέλεσμα $b/2$
• Πολλαπ/σε το $b/2$ με τον εαυτό του, αποτέλεσμα $(b/2)^2$.

Όμως μας δόθηκε c^2. Αφαίρεσε το c^2 από το $(b/2)^2$. Βρήκες $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c^2$. Βρες έναν αριθμό F ώστε $F^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c^2$.

Ζητάς:
• Πρόσθεσε το F στο $b/2$
• Αφαίρεσε το F από το $b/2$

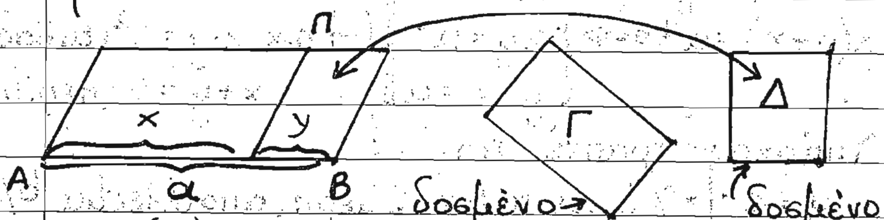
$$\left.\begin{array}{l} y=b-x \\ x\cdot(b-x)=c^2 \\ x^2-bx+c^2=0 \end{array}\right\} \quad \frac{b\pm\sqrt{b^2-4c^2}}{2}=\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-c^2}$$

Η Βαβυλωνιακή Άλγεβρα δεν επιβιώνει στα Ελληνικά Μαθηματικά.

Αναπτύσσεται κάτι καινούριο → Παραβολή των χωρίων!

όπου παραβολή χωρίων ≡ σύγκριση εμβαδών.

Πρόβλημα: Σε δοσμένη ευθεία ΑΒ να παραβληθεί παραλληλόγραμμο (ΑΠ) ίσο προς δεδομένο ευθύγραμμο σχήμα Γ, από το οποίο να λείπει σχήμα παραλληλόγραμμο (ΒΠ) όμοιο προς το δεδομένο σχήμα Δ.



$Εμ(ΑΠ)=Γ=F^2$

Στην εφαρμογή το Δ → ορθογώνιο → τετράγωνο

$x+y=α$

$x\cdot y=F^2$

τώρα: $\begin{cases} x+y=α \\ x\cdot y=α^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=α-x \\ x(α-x)=α^2 \end{cases}$

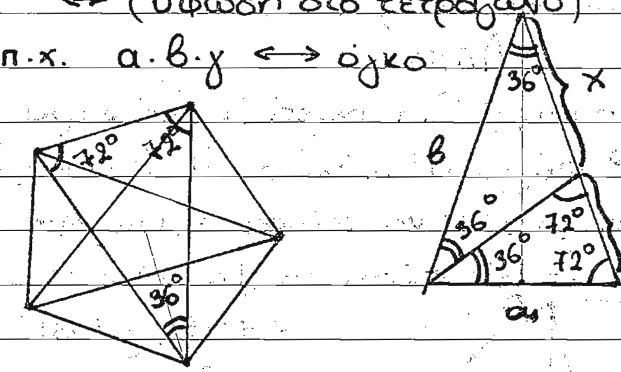
Μετά τους Πυθαγορείους τα πάντα επενδύονται με μια "γεωμετρική γλώσσα".

έτσι:

γινόμενο ευθυγρ. τμημάτων ↔ εμβαδό χωρίου ↔

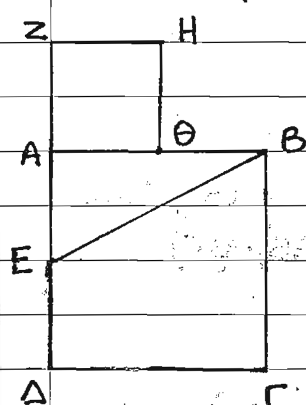
↔ (ύψωση στο τετράγωνο)

π.χ. $α\cdot β\cdot γ$ ↔ όγκο



$\frac{x}{β-x}=\frac{β}{x} \Leftrightarrow x^2=β(β-x)$ ↪ σε μέσο και άκρο λόγο

Ι.11 (χωρίς κύκλο)



ΑΒ → τετράγωνο ΑΒΓΔ

Ε → μέσο της ΑΔ

ΕΖ = ΕΒ

ΖΗΘΑ τετράγωνο

⇓

Θ είναι το ζητούμενο.

1ο βήμα: βρίσκω ΕΒ με Πυθαγ. Θεώρ.

2ο βήμα: βρίσκω ΑΕ άρα βρίσκω ΑΖ και κατ' επέκταση το ΑΘ.

Εφαρμογή της Παραβολής των Χωρίων (Γεωμετρική Άλγεβρα)

Πρόβλημα: Η κατασκευή μέσης αναλόγου (δι-

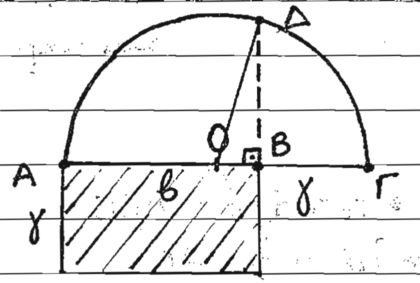
νονται β και γ και ζητείται x : $\frac{\beta}{x} = \frac{x}{\ }$.)
Γεωμετρική διατύπωση: Δίνεται ορθογώνιο και ζητείται να κατασκευασθεί τετράγωνο "ίσο" (ισεμβαδικό) με αυτό.

Λύση:

Κάνω τα β και γ διαδοχικά με διάμετρο (β+γ) ⟶ φέρω ημικύκλιο ⟶ Στο β φέρω την κάθετη, συναντά την ημιπεριφέρεια στο Δ. Το ΒΔ είναι το ζητούμενο

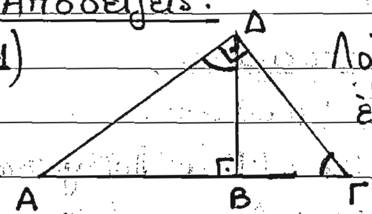
$\beta \equiv AB$, $\gamma \equiv B\Gamma$

$\beta + \gamma \equiv A\Gamma$



Αποδείξεις:

1) Λόγω ομοιότητας τριγώνων έχω: $B\Delta^2 = (AB)\cdot(B\Gamma)$



2) (Στοιχεία) Ο το κέντρο του κύκλου

Από Πυθαγ. Θεώρημα: $(B\Delta)^2 = (O\Delta)^2 - (OB)^2 =$

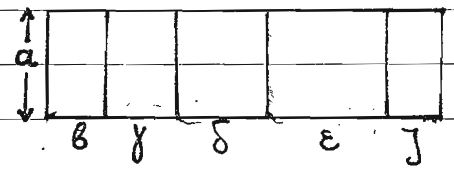
$= [(O\Delta)+(OB)][(O\Delta)-(OB)] =$

$= [(AO)+(OB)][(\Gamma O)-(OB)] =$

$= (AB)\cdot(B\Gamma)$

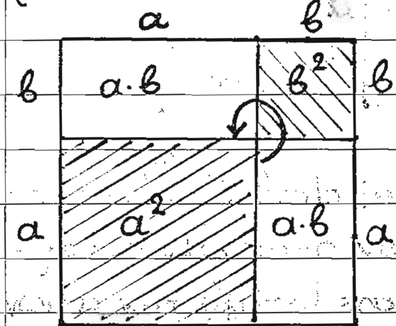
"ταυτότητα" ⟶ γεωμετρ. υφή ⟶ αντικείμενο της γεωμετρικής Άλγεβρας (βιβλίο ΙΙ Στοιχείων)

Παραδείγματα: (ΙΙ.1): $\alpha(\beta+\gamma+\delta+\ldots) = \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\ldots$



(ΙΙ.4): $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

Γεωμ. διατύπωση: Εαν ευθεία τμηθεί ως έτυχεν σε δύο τμήματα τότε το τετράγωνο όλης είναι ίσο με τα τετράγωνα που ορίζουν τα τμήματα αυξημένο κατά δύο ορθογώνια με πλευρές τα τμήματα.

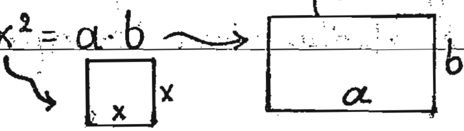


« 22-10-2008 »

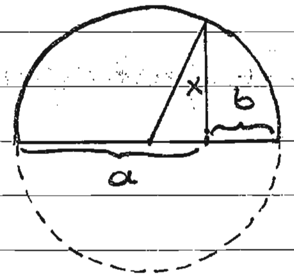
Σύντομη επανάληψη:

1. Γεωμετρικός τρόπος διατύπωσης προβλημάτων

$\frac{\alpha}{x} = \frac{x}{b} \xLeftrightarrow[\text{μέσου αναλόγου}]{\text{εύρεση}} x^2 = a\cdot b \longrightarrow$



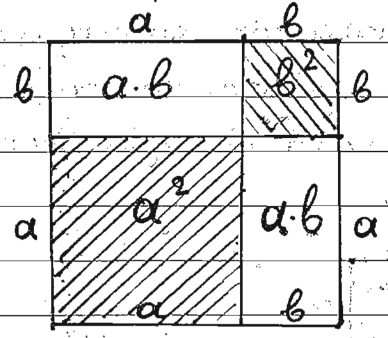
Ειδική "μεθοδολογία" → Γεωμετρ. Άλγεβρα



$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

Ταυτότητες: (i) $a(b+c)=ab+ac$

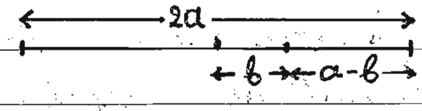
(ii) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$



εργαλείο: "ο γνώμονας"

(II.5) "Εαν ευθεία γραμμή τμηθεί εις ίσα και άνισα το υπό των ανίσων περιεχόμενου ορθογωνίου μετά του από της μεταξύ των τομών τετραγώνου ίσο εστί τω από της ημισείας τετραγώνων."

Μετάφραση: Εαν ευθεία γραμμή τμηθεί σε ίσα και άνισα τμήματα της ευθείας με το τετράγωνο που σχηματίζεται από το μεταξύ των τομών τμήμα είναι ίσο προς το τετράγωνο που έχει πλευρά το μισό της τμηθείσας ευθείας.

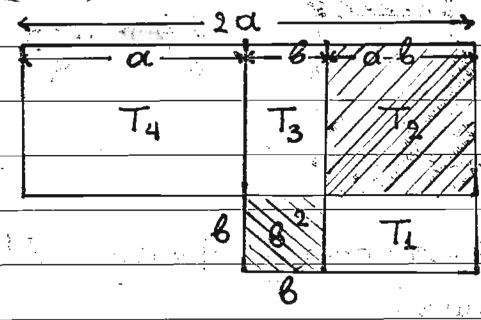


$(a+b)(a-b)$ → το ορθογώνιο από τα άνισα

b^2 → το τετράγωνο από το μεταξύ των τομών

a^2 → το τετράγωνο που έχει πλευρά το μισό της τμηθείσας ευθείας.

$$(a+b)(a-b)+b^2=a^2$$



T_1 → ορθογώνιο$(b, a-b)$

T_2 → τετράγωνο$(a-b, a-b)$

T_3 → ορθογώνιο$(b, a-b)$

T_4 → ορθογώνιο$(a, a-b)$

$a^2=T_1+T_2+T_3+b^2$ όπου

T_1+T_2 = ορθογώνιο διάστασης $(a, a-b) \equiv T_4$

$a^2=(T_4+T_3)+b^2$

T_4+T_3 → ορθογώνιο διάστασης $(a+b, a-b)$

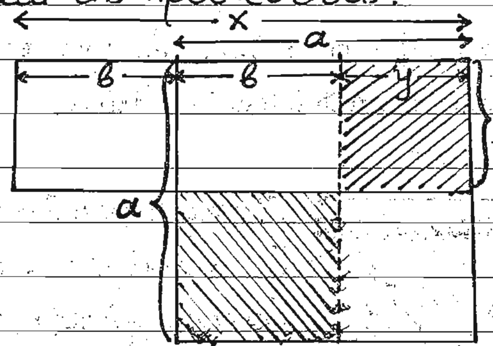
$a^2=(a+b)(a-b)+b^2$

Αναδιατύπωση (με σύγχρονους όρους):

$$\left.\begin{array}{l}2a=x+y\\ 2b=x-y\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \frac{x+y}{2}=a,\ \frac{x-y}{2}=b \text{ τότε:}$$

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=x\cdot y \quad (\text{II}.6)$$

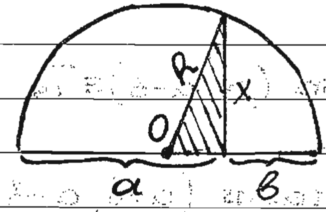
(II.6) Εαν ευθεία γραμμή τμηθεί στο μέσον, προστεθεί δε στην προέκταση της μία ευθεία, το ορθογώνιο που περιέχεται από την ευθεία και την προστεθείσα μαζί με το τετράγωνο από το μισό της ευθείας είναι ίσο με το τετράγωνο που έχει πλευρά το μισό της ευθείας και της προστεθείσας. (όχι απόδειξη)



$$\alpha \leftrightarrow \frac{x+y}{2}$$

$$\beta \leftrightarrow \frac{x-y}{2}$$

Εφαρμογή 1: Εύρεση του γεωμετρικού μέσου (επανάληψη)



$$x^2 = \alpha \cdot \beta$$

$$x^2 = R^2 - y^2 = \underbrace{(R+y)}_{\alpha}\underbrace{(R-y)}_{\beta}$$

Διαίρεση τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο (II.11) (Ολοκλήρωση της απόδειξης)

Υπενθυμίσεις: $\underbrace{\overbrace{\qquad}^{x}\overbrace{\qquad}^{\alpha-x}}_{\alpha}$

$$x^2 = \alpha(\alpha - x)$$

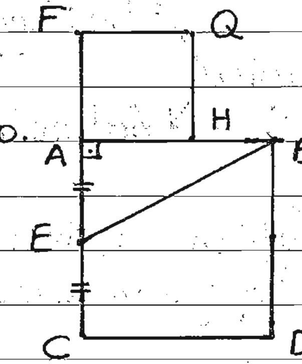
Κατασκευή: Στο δοσμένο AB κατασκευάζουμε τετράγωνο ABCD.

E → μέσο της AC, φέρω EB

EF = EB

FQAH → τετράγωνο

Το H είναι το ζητούμενο.



Απόδειξη: (σύγχρονη απόδοση)

Θα γίνει με χρήση του (II.6.)

δηλ. $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + x \cdot y$

$$\left.\begin{array}{l} X = FC \\ Y = AF \end{array}\right\} \quad \frac{x+y}{2} = EF \ , \ \frac{x-y}{2} = AE$$

$$(\text{II}.6) \Rightarrow (EF)^2 - (AE)^2 = (AF)(FC), (1)$$

Το τρίγωνο $A\hat{E}B$ είναι ορθογώνιο $\Rightarrow$ Πυθαγόρειο Θεωρ. $\Rightarrow (AE)^2 + (AB)^2 = (EB)^2, (2)$

$(1),(2) \Rightarrow (AB)^2 = (AF)(FC) = AH \cdot [(AB)+(AH)]$

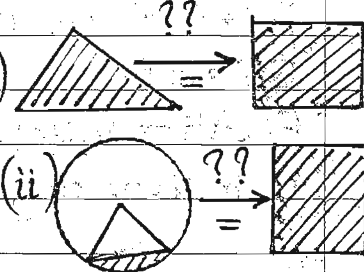
που είναι σχέση εμβαδών $\Leftrightarrow$ χωρισμό σε μέσο και άκρο λόγο

- Οι διατυπώσεις είναι Πυθαγόρειες
- Οι αποδείξεις δε γνωρίζουμε

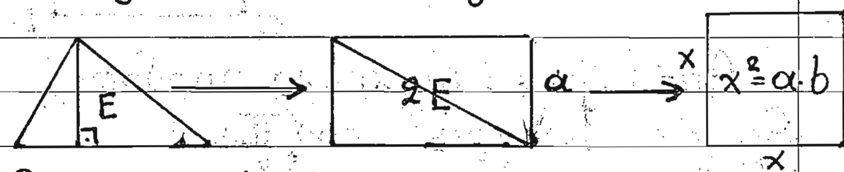
Πρόβλημα: $\left.\begin{array}{l} x+y=5 \\ x \cdot y = 6 \end{array}\right\} \underset{\text{II}.6}{\Rightarrow} x-y \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y \\ x-y \end{array}\right. \Rightarrow x, y$

Τετραγωνισμός χωρίων:

Χωρία
- ↗ Ευθύγραμμα (i)
- ↘ Καμπυλόγραμμα (ii)



(i) Συζήτηση: Αν από το τυχαίο φτάσω σε τρίγωνο τελείωσα γιατί:

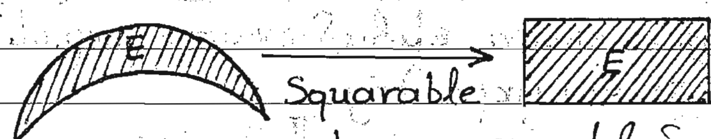


(ii) Βασική αναφορά:
χωρίο → όλος ο κύκλος → "τετραγωνισμός του κύκλου" → "Άλυτο!!!"

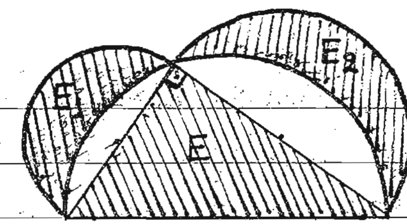
Ιπποκράτης ο Χίος (450-380 π.Χ.)

Τετραγωνισμός Μηνίσκου, που απαιτεί μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες.

Ο Μηνίσκος καθορίζεται από 2 τόξα διαφορετικών κύκλων.



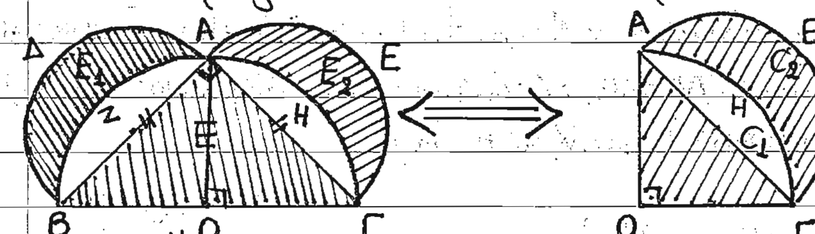
Squarable Luna — ισεμβαδικό ευθύγραμμο σχήμα



$E = E_1 + E_2$

Το κείμενο του Ιπποκράτη δε σώζεται. Όμως σε σχολιαστές (Σιμπλίκιο) σώζεται αναφορά στην Ιστορία της Γεωμετρίας του Εύδημου (3ος π.Χ αιώνας) με λεπτομέρειες που περιγράφονται από τον Ιπποκράτη. Είναι σημαντική Ιστορική πηγή προ-Ευκλείδειων Μαθηματικών, που δείχνει ότι υπήρχε σοβαρό μαθηματικό υπόβαθρο.

1ος Τετραγωνισμός του Ιπποκράτη.



σχήμα 2.

$\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$: ορθογώνιο ισοσκελές

$E_1 + E_2 = E$

C_1: κέντρο το O

C_2: διάμετρος ΑΓ

Ο μηνίσκος ΑΕΓΗΑ είναι ισεμβαδικός του τριγώνου $\overset{\triangle}{ΟΑΓ}$

Θεμελιώδες Θεώρημα που υπόκεινται οι αποδείξεις:

(**) {Όμοια τμήματα 2 κύκλων είναι όπως τα τα τετράγωνα των διαμέτρων των κύκλων

<u>Σχόλιο</u>: Αποκλείεται να το απέδειξε! (γιατί η απόδειξη δόθηκε από τον Εύδοξο 100 χρόνια μετά και υπάρχει στα στοιχεία XII 2

- <u>Απόδειξη με αναφορά στο Σχήμα 2.</u>

ημιπεριφέρεια(ΒΖΑΗΓ) έχει διάμετρο ΒΓ
ημιπεριφέρεια(ΒΔΑΒ) έχει διάμετρο ΒΑ

Το τρίγωνο $A\hat{B}\Gamma$ ορθογ. ισοσκελές => από Πυθαγορ. Θεωρ. $2(AB)^2=(B\Gamma)^2$ οπότε:

από (**) => $\dfrac{\text{ημ}(BZAH\Gamma)}{\text{ημ}(B\Delta AB)} = \dfrac{(B\Gamma)^2}{(BA)^2} = 2$

Πάλι από το Σχήμα 2 έχουμε:

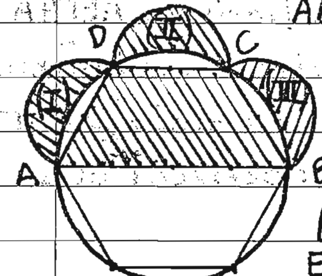
Τρίγωνο(ΑΟΒ) + Κυκλ.τμήμα(ΑΒΖΑ) = ΚυκλΤομ(ΟΒΖΑΟ)

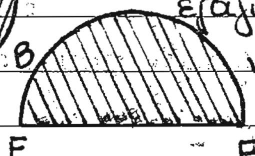
μηνίσκος(ΑΔΒΖΑ) + Κυκλ.τμήμα(ΑΒΖΑ) = ημικυκλ(ΑΔΒ)

τριγ(ΑΟΒ) = μην(ΑΔΒΖΑ)

▷ Το 2ο πρόβλημα αφορά στην αναγωγή του τετραγωνισμού του κύκλου, σ'ένα πρόβλημα τετραγωνισμού μηνίσκων.

ABCD: τραπέζιο





Αν αρχίζω με ένα κανονικό εξάγωνο καταλήγω σ'ένα τραπέζιο (ABCD) για το οποίο έχουμε: AD = DC = CB , AB = 2AD.

Πάνω στις τρεις ίσες πλευρές γράφει ημικύκλια και παίρνει και μία EF = AD και γράφει πάλι ημικύκλιο.

(**) => $\dfrac{\text{ημ}(AD)}{\text{ημ}(AB)} = \dfrac{1}{4}$ <=> 4ημ(AD) = ημ(AB) <=>

<=> ημ(AD) + ημ(DC) + ημ(CB) + ημ(EF) = ημ(AB) <=>

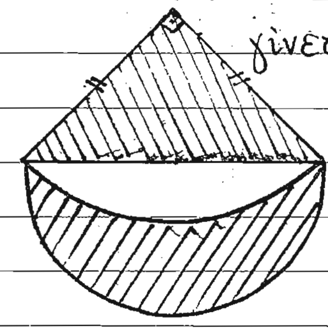
<=> μην(I) + μην(II) + μην(III) + ημ(EF) = ημ(AB) −
− [τμήμα(I) + τμ(II) + τμ(III)] = εμβαδό τραπ.(ABCD)

Εμβ.ημικ.(EF) = Εμβ.τραπ(ABCD) − 3·(Εμβ. μηνίσκου)

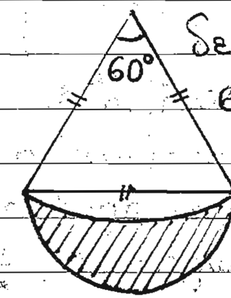
Αν τετραγωνισθεί ο μηνίσκος => τετραγωνίζεται ο κύκλος!!!

Σήμερα γνωρίζουμε ότι δε γίνεται

Έτσι, λοιπόν:



γίνεται

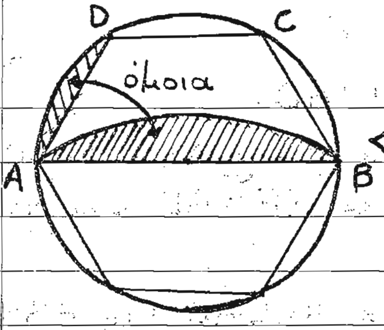


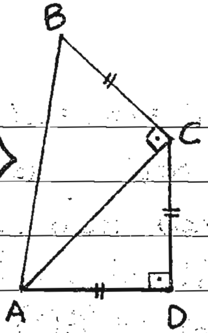
δε γίνεται $60° = \frac{2}{3} \cdot 90°$

<u>Περιγραφή ενός άλλου τετραγωνισμού:</u>

=> Κατασκεύασε ένα εγγεγραμμένο τραπέζιο ώστε AD = DC = CB , όμως τώρα $(AB)^2 = 3(AD)^2$

Σημαντικά:
- (i) Η ύπαρξη τέτοιου σχήματος!
- (ii) Η κατασκευή του όμοιου μηνίσκου
- (iii) Η απόδειξη





$(AC)^2 = 2(AD)^2$ (πυθ. θεωρ.)

και $(AB)^2 = (AD)^2 + 2(AD)^2 = 3(AD)^2$ (πυθ. θεωρ.)

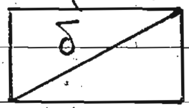
<<29-10-2008>>

Ερώτημα: Πως μετράμε;

1ον) Επιλογή μονάδας

2ον) Διαίρεση → αρχίζουν προβλήματα

π.χ.



δ: προς μέτρηση

α: μονάδα

σχήμα 3.

Το αποτέλεσμα της μέτρησης ενδέχεται να είναι προβληματικό.

τώρα: $1, \frac{1}{5}, 4 \cdot \frac{1}{5}, \ldots$

Τα κλάσματα είχαν κυρίαρχη θέση στα Μαθηματικά των Βαβυλωνίων και Αιγυπτίων.

Αρχαίοι Έλληνες & κλάσματα

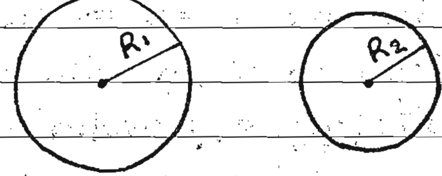
"Λογαριαστική χρήση" ~ λογιστικά κλάσματα

Θεωρητική υφή μέσω της Θεωρίας των αναλογιών $\left[\frac{a}{b} = \frac{\gamma}{\delta} \Longleftrightarrow \frac{a}{\gamma} = \frac{b}{\delta} \right]$

Πυθαγόρας μέχρι τον Πλάτωνα.

περίοδο Πλάτωνα: έχουμε τη θεωρία των "Λόγων" που οδηγεί σε μέτρηση "μεγεθών".

"ποσά" π.χ.



$$\frac{Εμ.1}{Εμ.2} = \frac{R_1^2}{R_2^2}$$

Εύδοξος ⟺ Πραγματικοί αριθμοί

VII.1 – VII.4. (Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης)

Το μαθηματικό υπόβαθρο προτάσεων είναι ο Ευκλείδιος αλγόριθμος ("Η δοκιμή της διαίρεσης με υπόλοιπο"). $Δ = δ \cdot π + υ$, $0 \leq υ < δ$

ανάλυση: Δ, δ αριθμοί, Δ ο μεγαλύτερος και θέλω να μετρήσω με μονάδα το δ

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

1) Το δ να είναι μέρος του Δ, οπότε είναι δυ-

νατή η μέτρηση.

2) Το δ είναι μέρη του Δ, όπου $\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$, $\upsilon < \delta$.

όπου:

Εκ πρώτης όψεως η μέτρηση απέτυχε.

Όμως "μήπως μικραίνοντας το δ επιτύχω αποτέλεσμα;"

Πόσο μικραίνοντας;

Απάντηση: Αντί για (Δ, δ) παίρνω το ζευγάρι (δ, υ) και εφαρμόζω τον αλγόριθμο:

$$\delta = \upsilon \cdot \pi_1 + \upsilon_1 \ , \ 0 \le \upsilon_1 < \upsilon$$

Οπότε αν $\upsilon_1 = 0 \Rightarrow$ τα Δ, δ έχουν κοινό μέτρο το υ, αν όχι συνεχίζουμε.

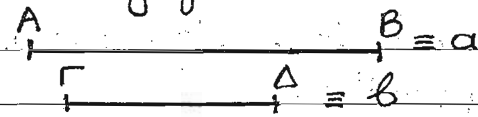
<u>ανθυφαίρεση</u>: ονομάζουμε τη διαδικασία της ευκλείδιας διαίρεσης

<u>Πρόταση 1. (VII.1)</u>: Δίνονται δύο άνισοι αριθμοί και ανθυφαιρούμε συνεχώς το μικρότερο απ' το μεγαλύτερο. Αν ο αριθμός που προκύπτει κάθε φορά δεν μετρά ποτέ τον προηγούμενό του μέχρι να εμφανίσει μονάδα τότε οι αρχικοί αριθμοί είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Σχόλια πριν την απόδειξη:

αριθμοί → παράσταση με ευθύγραμμα τμήματα

Θα χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της εις άτοπο επαγωγής



Μετράω τον α με τον $\beta \Rightarrow$ θα προκύψει υπόλοιπο γ, πιο μικρό από το β.

Μετράω τον β με τον $\gamma \Rightarrow$ θα προκύψει υπόλοιπο δ, πιο μικρό από το γ.

Μετράω το γ με τον $\delta \Rightarrow$ θα προκύψει υπόλοιπο 1, πιο μικρό από το δ.

Έστω, τώρα, α και β έχουν κοινό μέτρο $\varepsilon (\neq 1)$.

Το ε μετρά α και $\beta \Rightarrow$ μετρά το γ $[\gamma = \alpha - \pi o \lambda \beta]$

Το ε μετρά β και $\gamma \Rightarrow$ μετρά το δ

Το ε μετρά γ και $\delta \Rightarrow$ μετρά το 1, <u>άτοπο</u>

Μια σύγχρονη φορμαλιστική απόδειξη:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \beta \cdot \pi_0 + \upsilon_0 \\ \beta = \upsilon_0 \cdot \pi_1 + \upsilon_1 \\ \upsilon_0 = \upsilon_1 \cdot \pi_2 + \upsilon_2 \\ \vdots \\ \upsilon_{\nu-1} = \upsilon_\nu \pi_{\nu+1} + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 1 = \kappa\alpha + \lambda\beta \\ \text{αν τώρα } \varepsilon \mid \alpha, \beta \Rightarrow \\ \Rightarrow \varepsilon \mid \kappa\alpha + \lambda\beta \Rightarrow \varepsilon \mid 1 \\ \Rightarrow \varepsilon = 1 \text{, άτοπο} \end{array}$$

(VII.2) Αν δοθούν 2 αριθμοί που δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους να βρεθεί το μέγιστο κοινό τους μέτρο.

Απόδειξη:

Ανθυφαιρώ τον β από τον α συνεχώς ($\alpha > \beta$).

<u>1ο βήμα</u>: (i) αν ο β είναι μέρος του α τότε είναι ο ζητούμενος.

(ii) αλλοιώς $\alpha = \text{πολ}\cdot\beta + \gamma \to (\alpha,\beta) \to (\beta,\gamma)$

Γνωρίζω ότι θα καταλήξω σε $\varepsilon \neq 1$, αλλοιώς (Πρ. VII 1): α, β πρώτοι.

Ισχυρίζομαι ότι το ε είναι το μέγιστο κοινό μέτρο, (είναι μέτρο και είναι το μεγαλύτερο)

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \iff \begin{cases} \text{αν } \alpha = n\beta \Rightarrow \gamma = n\cdot\delta, & (i) \\ \text{αν } \beta = m\alpha \Rightarrow \delta = m\cdot\gamma, & (ii) \\ \text{αν } \kappa\alpha = \lambda\beta \Rightarrow \kappa\gamma = \lambda\delta, & (iii) \end{cases}$$

Γιατί ο ορισμός είναι καλός;

Δηλαδή, γιατί τα (i)-(iii) καλύπτουν όλες τις δυνατές περιπτώσεις;

Αυτό γίνεται:

Με τη χρήση της Πρότασης VII.2 (Μ.Κ.Δ)

$\delta = o$: ο μ.κ.δ των α & β

οπότε: $\alpha = \rho\cdot\delta$ & $\beta = \sigma\cdot\delta$

άρα: $\sigma\cdot\alpha = \sigma\rho\delta$ & $\rho\cdot\beta = \rho\sigma\delta$

<u>Η μετάβαση από τους αριθμούς στα μεγέθη</u>

παρουσιάζει δυσκολίες και κατ' αρχήν εφαρμόζεται για σύμμετρα μεγέθη (δηλ. ποσά που βρίσκονται σε ρητό λόγο.)

Για τα άρρητα?

π.χ. $\frac{\delta}{\alpha}$?, όταν $\delta^2 = 2\alpha^2$.

Στα μαθηματικά πριν τον Εύδοξο ⟺ Ορίζοντας τους πραγματικούς αριθμούς.

- Για τα Ελληνικά υπάρχουν νύξεις πως αντιμετωπίστηκε.
- Για τα Βαβυλωνιακά υπάρχουν ενδείξεις ότι χρησιμοποιείται προσέγγιση $\to x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$, $[2x^2 = x^2 + 2$ ή $x^2 = 2]$

Πλούταρχος: αρχιερέας των Δελφών

▷ πλευρά, διαγώνιος (σχήμα 3.)

πλευρά	διαγώνιος
1	1
2	3
5	7
12	17
29	41
⋮	⋮
a_n	δ_n

$$\left.\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + \delta_n \\ \delta_{n+1} &= 2a_n + \delta_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{(γραμμ. εξάρτηση)}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ \delta_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A = P^{-1}BP} \begin{pmatrix} a_n \\ \delta_n \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ \delta_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix}$$ διαγώνιος

<u>Λύκειο</u>: <u>Ισχυρισμός</u>: $\delta_n^2 = 2a_n^2 \pm 1$

Ταυτότητα: $A^2 + B^2 = 2\cdot\left\{\left(\frac{A+B}{2}\right)^2 + \left(\frac{A-B}{2}\right)^2\right\}$, (Π 10 Γεωμ. Αλγ.)

$$\delta_{n+1}^2 = (2a_n+\delta_n)^2 = 2a_n^2 + 2(a_n+\delta_n) - \delta_n^2 =$$
$$= 2a_n^2 + 2(a_n+\delta_n)^2 - 2a_n^2 - 1 =$$
$$= 2\cdot(a_n+\delta_n)^2 - 1 = 2a_{n+1}^2 - 1$$

οπότε: $\left(\dfrac{\delta_n}{a_n}\right)^2 = 2 \pm \dfrac{1}{a_n^2}$, $\Bigg\{$ προσεγγίσεις του $\sqrt{2}$, κατ' έλλειψην και καθ' υπερβολήν

Ερώτημα: Μπορεί κάποια ανθυφαιρετική διαδικασία να οδηγήσει στην ακολουθία των πλευρικών και διαγώνιων αριθμών;;

<< 5-11-2008 >>

Πλευρικοί και Διαγώνιοι αριθμοί

Πολιτεία Πλάτωνα: Ο 7 είναι ρητή διαγώνιος που συνδέεται με το 5.

Σχόλιο: (Θέωνα του Σμυρναίο)

Το οποίο οδηγεί σε αναδρομή

$a_{n+1} = a_n + \delta_n$ ‖ $a_1 = \delta_1 = 1$

$\delta_{n+1} = 2a_n + \delta_n$ ‖ $a_2 = 2,\ \delta_2 = 3$

$a_3 = 5,\ \delta_3 = 7$

Πρόταση: $\delta_n^2 = 2a_n^2 \pm 1$, $n \to +1$ | $\kappa \to -1$

$n+1 \to -1$ | $\kappa+1 \to +1$

$\left(\dfrac{\delta_n}{a_n}\right)^2 = 2 \pm \dfrac{1}{a_n^2}$, $\dfrac{\delta_n}{a_n} \approx \dfrac{\delta}{a}$ $\begin{matrix}\leftarrow \text{διαγώνιος} \\ \leftarrow \text{πλευρά}\end{matrix}$

για n μεγάλο

Πως σχετίζονται αυτά με τη μέτρηση;

Για αριθμούς μέτρηση $\longleftrightarrow$ Ευκλείδιος Αλγόριθμος.

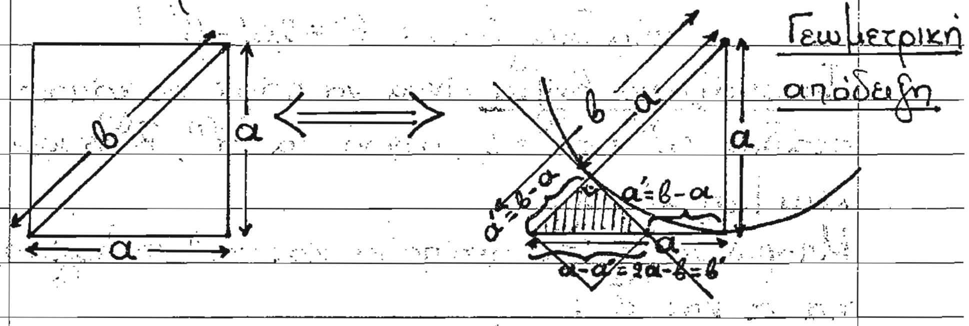
έτσι: $7/5$: $7 = \boxed{1}\cdot 5 + 2$
$5 = \boxed{2}\cdot 2 + 1$
$2 = \boxed{2}\cdot 1 + 0$
} ανθυφαίρεση $(7,5) \to (5,2) \to (2,1)$

επίσης: $14/10$: $14 = \boxed{1}\cdot 10 + 4$
$10 = \boxed{2}\cdot 4 + 2$
$4 = \boxed{2}\cdot 2 + 0$
} ανθυφαίρεση $(14,10) \to (10,4) \to (4,2)$

οπότε: $\dfrac{7}{5}, \dfrac{14}{10}, \dfrac{28}{20}, \ldots$ $[1;22]$

Στόχος: Η "μεταφορά" αυτής της διαδικασίας σε μεγέθη. Κάθε φορά θα εξαρτάται από το είδος των μεγεθών.

Θα παρουσιαστεί μια ανακατασκευή που θα ερμηνεύσει τους πλευρικούς και διαγώνιους αριθμούς, ως προσπάθεια μέτρησης της διαγωνίου τετραγώνου με μονάδα τη πλευρά.



Αλγεβρική απόδειξη:

1ο βήμα: $\beta = 1\cdot\alpha + \alpha'$, Για να είναι αυτό αποδεκτό πρέπει $\alpha' < \alpha$ που ισχύει εφ' όσον: $\alpha' < \alpha \Rightarrow (\alpha')^2 < \alpha^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\beta-\alpha)^2 < \alpha^2 \Rightarrow$

* [$\alpha - \alpha' = \alpha - (\beta - \alpha) = 2\alpha - \beta = \beta'$]

$\Rightarrow \beta^2 - 2\alpha\beta + \alpha^2 < \alpha^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta^2 - 2\alpha\beta < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta(\beta - 2\alpha) < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta - 2\alpha < 0 \Rightarrow \beta < 2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\alpha - \beta > 0 \overset{*}{\Rightarrow} \beta' > 0$

2ο βήμα: Πρέπει να αντικαταστήσω το ζεύγος (β, α) με το ζεύγος (α, α')

[εντελώς γεωμετρικά παίρνω:

νέα πλευρά: $\alpha' = \beta - \alpha$

νέα διαγώνιο: $\beta' = 2\alpha - \beta$]

3ο βήμα: Πρέπει να αντικαταστήσω το ζεύγος (α, α') με το ζεύγος (α', β').

[εντελώς γεωμετρικά παίρνω:

νέα πλευρά: $\alpha'' = \beta' - \alpha'$

νέα διαγώνιο: $\beta'' = 2\alpha' - \beta'$]

Το επόμενο βήμα είναι να πάρω σε κάποιο στάδιο $\alpha^{(\kappa)} = \beta^{(\kappa)} = 1$, αφού τα $\alpha^{(\nu)}, \beta^{(\nu)}$ συνέχεια μικραίνουν.

Μπορώ να γυρίσω ανάποδα και να "υπολογίσω" τα α και β.:

• Αν σταματήσω στο 2ο βήμα:

$\left.\begin{matrix} 1 = \alpha' = \beta - \alpha \\ 1 = \beta' = 2\alpha - \beta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 3 \end{cases}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4}$

• Αν σταματήσω στο 3ο βήμα:

$\begin{matrix} \alpha = 3\alpha'' + 2\beta'' \\ \beta = 4\alpha'' + 3\beta'' \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = 7 \end{cases}$, $\left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{49}{25} = 2 - \frac{1}{25}$

$\alpha'' = \beta'' = 1$

• Αν σταματήσω στο 4ο βήμα:

$\begin{matrix} \alpha = 7\alpha''' + 5\beta''' \\ \beta = 10\cdot\alpha''' + 7\beta''' \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 12 \\ \beta = 17 \end{cases}$, $\left(\frac{17}{12}\right)^2 = \frac{289}{144} = 2 + \frac{1}{144}$

$\alpha''' = \beta''' = 1$

Για να καταλάβουμε την έννοια της ανθυφαίρεσης:

▷ Euler: $\frac{355}{113} = 3 + \cfrac{1}{7 + \frac{1}{16}}$

$(355, 113)$: $\left.\begin{matrix} 355 = 3\cdot 113 + 16 \\ 113 = 7\cdot 16 + 1 \end{matrix}\right\}$ δηλαδή

έχουμε: $\frac{355}{113} = 3 + \frac{16}{113} = 3 + \cfrac{1}{\frac{113}{16}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \frac{1}{16}}$.

οπότε: $\frac{3}{1} < \frac{355}{113} < \frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{7}$

$\left.\begin{matrix} \delta_{n+1} = 2\alpha_n + \delta_n \\ \alpha_{n+1} = \alpha_n + \delta_n \end{matrix}\right\}$ $\frac{\delta_{n+1}}{\alpha_{n+1}} = \frac{2\alpha_n + \delta_n}{\alpha_n + \delta_n} = \cfrac{2 + \frac{\delta_n}{\alpha_n}}{1 + \frac{\delta_n}{\alpha_n}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\delta_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{1+1+\frac{\delta_n}{a_n}}{1+\frac{\delta_n}{a_n}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{\delta_n}{a_n}} = $$
$$= 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{\delta_{n-1}}{a_{n-1}}}}$$

<u>Παράδειγμα</u>: Να γίνει ανθυφαίρεση 2 μεγεθών a, δ, όπου $\delta^2 = 2a^2$.

** [<u>Λήμμα</u>: αν $\delta^2 = 2a^2 \Leftrightarrow \frac{a}{\delta - a} = \frac{\delta + a}{a} (\Leftrightarrow a^2 = \delta^2 - a^2)$]

$(\delta, a) \rightarrow \delta = 1 \cdot a + (\delta - a)$

άρα $(\delta, a) \leftrightarrow (a, \delta - a) \overset{\text{λήμμα}}{\longleftrightarrow} (\delta + a, a)$

$(\delta + a, a) \rightarrow \delta + a = 2a + (\delta - a)$

άρα $(\delta, a) \leftrightarrow (a, \delta - a) \leftrightarrow (\delta + a, a) \leftrightarrow (a, \delta - a)$

οπότε εμφανίζεται περιοδικότητα.

Η ακολουθία των πηλίκων είναι: $[1; 2222..]$, παριστάνεται $[1; \bar{2}]$ και θα συμβολίζει την ανθυφαίρεση των a, δ με $\delta^2 = 2a^2$

$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1)$, $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+x_n} = 1 + \cfrac{1}{1+1+\cfrac{1}{1+x_{n-1}}}$

<u>Θεώρημα Euler</u>: Έστω ότι θέλουμε να εκφράσουμε το $x \in \mathbb{R}$ σε συνεχές κλάσμα. Θεωρούμε την αναδρομική ακολουθία a_n, z_n ως εξής: $z_0 = x$, $a_n = [z_n]$ και $z_{n+1} = \frac{1}{z_n - a_n}$, αν $z_n \neq a_n$. Για πεπερασμένα συνεχή κλάσματα: $x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{z_n}}}}$

Για άπειρα συνεχή κλάσματα:
$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots}}$$

<u>Εφαρμογή</u>: $x = \sqrt{2}$

οπότε: $z_0 = \sqrt{2}$, $a_0 = [\sqrt{2}] = 1$

$z_1 = \frac{1}{z_0 - a_0} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{1} = \sqrt{2}+1$

$a_1 = [z_1] = 2$, $z_2 = \frac{1}{z_1 - a_1} = \frac{1}{1+\sqrt{2}-2} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$

$a_2 = [z_2] = 2$

δηλ $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}$

<u>Εφαρμογή</u>: $\frac{71755875}{61735500} = 1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \dots}}}$

οπότε $\frac{71755875}{61735500} \approx 1 + \cfrac{1}{6 + \frac{1}{6}} = \frac{43}{37}$

<u>Εφαρμογή</u>: $x = \sqrt{3}$

Ζητούνται δηλαδή a & b ώστε $a^2 = 3b^2$

Ζητείται "μέτρηση" a με μονάδα το b.

$\alpha = 1\cdot\beta + (\alpha-\beta)$

οπότε: $(\alpha,\beta)\to(\beta,\alpha-\beta)$

στη συνέχεια εξ' αιτίας του Λήμματος(**)

όπου $\beta/(\alpha-\beta) = (\alpha+\beta)/2\beta$, θα έχω:

$(\alpha,\beta)\to(\beta,\alpha-\beta)\to(\alpha+\beta,2\beta)$

όμως: $\alpha+\beta = 1\cdot(2\beta) + (\alpha-\beta)$, εφ' όσον

$\alpha-\beta<2\beta \Leftrightarrow \alpha<3\beta \Leftrightarrow \alpha/\beta<3$

οπότε:

$(\alpha,\beta)\to(\beta,\alpha-\beta)\to(\alpha+\beta,2\beta)\to(2\beta,\alpha-\beta)$

και τέλος πάλι εξ' αιτίας του Λήμματος(**)

όπου: $\dfrac{2\beta}{\alpha-\beta} = \dfrac{\alpha+\beta}{\beta}$ οπότε: $\alpha+\beta = 2\cdot\beta+(\alpha-\beta)$

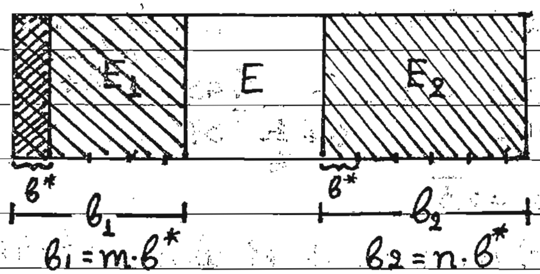
θα έχω εν' τέλει:

$(\alpha,\beta)\to(\beta,\alpha-\beta)\to(\alpha+\beta,2\beta)\to(2\beta,\alpha-\beta)\to(\beta,\alpha-\beta)$

και άρα έχω την ακολουθία [1;121212...]

"μέγεθος" ≡ "ποσό"

<u>Εφαρμογή:</u> Ο λόγος δύο ορθογωνίων παραλ/μων με ίσα ύψη είναι ίσος με τον λόγο των βάσεών τους.



$\dfrac{E_1}{E_2} = \dfrac{\beta_1}{\beta_2}$

σχήμα 4

1η περίπτωση: αν $\lambda\beta_1 = \mu\beta_2 \Rightarrow \lambda E_1 = \mu E_2$

μπορώ να έχω κοινό μέτρο των β_1 και β_2 όπως στο (σχήμα 4), δηλ $\beta_1 = m\cdot\beta^*$ & $\beta_2 = n\cdot\beta^*$

2η περίπτωση: αν $\lambda\beta_1 > \mu\beta_2 \Rightarrow \lambda E_1 > \mu E_2$

3η περίπτωση: αν $\lambda\beta_1 < \mu\beta_2 \Rightarrow \lambda E_1 < \mu E_2$

<<12-11-2008>>

Σύντομη Επανάληψη

(Από τους αριθμούς στα μεγέθη)

Μέγεθος ⟷ "ποσό"

1ον Για δύο μεγέθη, τότε κάποιο πολ/σιο του ενός υπερβαίνει το άλλο, δοσμένων Α, Β, για κάποιο ν, $\nu A > B$ και για κάποιο μ, $\mu B > A$.

2ον Για Α, Β, Γ, Δ μεγέθη $\dfrac{A}{B} = \dfrac{\Gamma}{\Delta}$?

σύγχρονη απόδοση:

αν $\kappa A > \lambda B \Rightarrow \kappa\Gamma > \lambda\Delta$, (1)

αν $\kappa A = \lambda B \Rightarrow \kappa\Gamma = \lambda\Delta$, (2)

αν $\kappa A < \lambda B \Rightarrow \kappa\Gamma < \lambda\Delta$, (3)

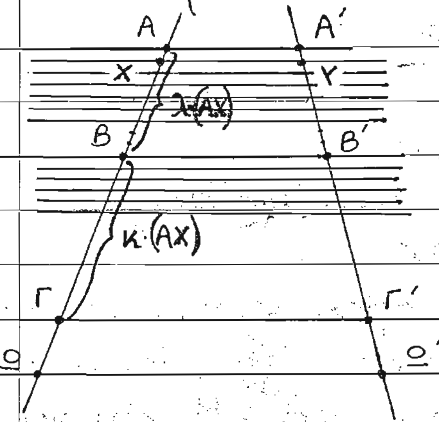
(που αποτελεί τον ορισμό ισότητας λόγου κατά Εύδοξο.)

Σχόλιο: η περίπτωση (2) αντιστοιχεί στα σύμμετρα μεγέθη. Δηλαδή τα Α, Β μετρώντας σε κοινό μέτρο ως εξής:

$\kappa A = \lambda B \Rightarrow A = \lambda\dfrac{B}{\kappa}$, $B^* = \dfrac{B}{\kappa}$ οπότε:

$\begin{cases} B = \kappa B^* \\ A = \lambda B^* \end{cases}$, δηλ. το B^* μετράει τα A & B.

Παράδειγμα: (Εφαρμογή του ορισμού)
"Θεώρημα του Θαλή" (Λύκειο)

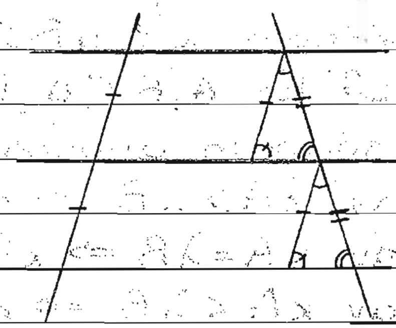


$\left[\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}\right] = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$

$\Updownarrow$

$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'}$ ← ισότητα λόγων

Γεγονός: αν η οικογένεια των παραλλήλων ορίζει ίσα ευθύγραμμα τμήματα στη μία τέμνουσα, θα ορίζει ίσα και στην άλλη:



Απόδειξη:

2η συνθήκη: Έστω $\kappa\cdot(AB) = \lambda\cdot(B\Gamma) \Rightarrow \kappa\cdot(A'B') = \lambda\cdot(B'\Gamma')$

Υπάρχει κοινό μέτρο ας πούμε το ευθύγραμμο τμήμα $\frac{AB}{\lambda} = AX \Rightarrow AB = \lambda(AX)$, $B\Gamma = \kappa\cdot(AX)$

Αλλά X είναι σημείο επί του AB

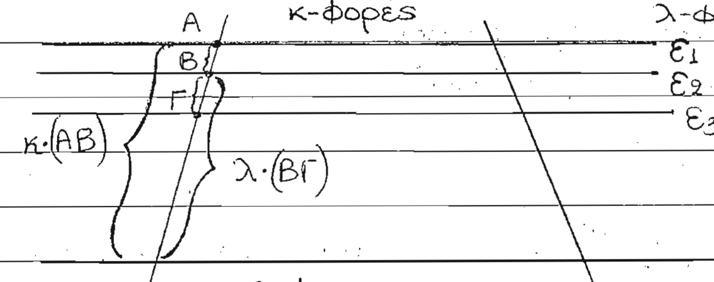
Φέροντας XY // δέσμη παραλλήλων και λόγω του Πλήθους $\left.\begin{array}{l} A'B' = \lambda\cdot(A'Y) \\ B'\Gamma' = \kappa\cdot(A'Y) \end{array}\right\}$!

1η συνθήκη: Έστω $\kappa\cdot(AB) > \lambda\cdot(B\Gamma) \Rightarrow \kappa\cdot(A'B') > \lambda(B'\Gamma')$

$\Rightarrow \kappa\cdot\left(\frac{AB}{\lambda}\right) > B\Gamma$, όμως $AB = \lambda(AX)$ και συνεπώς $B\Gamma < \kappa\cdot(AX)$

Άλλη απόδειξη: $\kappa\cdot(AB) = \lambda\cdot(B\Gamma)$

$\underbrace{AB + AB + \ldots + AB}_{\kappa\text{-φορές}}$ $\quad$ $\underbrace{B\Gamma + B\Gamma + \ldots + B\Gamma}_{\lambda\text{-φορές}}$



επίσης γνωρίζουμε ότι: $\frac{x}{y} = \frac{z}{\omega} = \frac{x+z}{y+\omega}$

εξάλλου αν $\frac{x}{y} = \frac{z}{\omega} = \sigma$ τότε:

$\left.\begin{array}{l} x = \sigma\cdot y \\ z = \sigma\cdot\omega \end{array}\right\} +$

$x + z = \sigma\cdot(y+\omega) \Rightarrow \frac{x+z}{y+\omega} = \sigma$

2η συνθήκη: αν $\kappa x = \lambda y$ τότε $\kappa z = \lambda\omega$

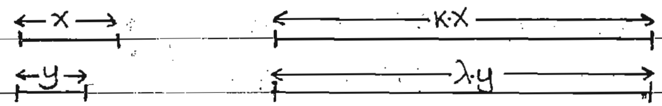
αντίστοιχα θα έχουμε: $\kappa(x+z) = \lambda(y+\omega)$

1η συνθήκη: αν $\kappa x < \lambda y$ τότε $\kappa z < \lambda\omega$

αντίστοιχα θα έχουμε: $\kappa(x+z) < \lambda(y+\omega)$

3η συνθήκη: αν $\kappa x > \lambda y$ τότε $\kappa z > \lambda\omega$

αντίστοιχα θα έχουμε: $\kappa(x+z) > \lambda(y+\omega)$



Σύμμετρα & Ασύμμετρα μεγέθη

Η θεωρία των ασύμμετρων μεγεθών αναπτύσσεται στο βιβλίο X των στοιχείων.

Ορισμός 1: σύμμετρα μεγέθη λέγεται τα τω αυτώ μέτρω μετρούμενα
Ασύμμετρα δε, ὧν μηδεν ενδέχεται κοινό μέτρο γένεσθαι.

Πρόβλημα: Πώς διαπιστώνω την ασυμμετρία

Πριν απαντήσουμε κάποιες υπενθυμίσεις.
Προκειμένου για αριθμούς: Η "μέτρηση" εδώ παραπέμπει στον Ευκλείδιο αλγόριθμο.
με σημερινούς όρους Δ: διαιρετέος, δ: διαιρέτης όπου $\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$, $0 \le \upsilon < \delta$
έστω, λοιπόν $\Delta = \delta \cdot \pi_0 + \upsilon_0$, αν $\upsilon_0 > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ παίρνω για νέα μονάδα αυτό το υπόλοιπο.
και έχω: $\delta = \upsilon_0 \cdot \pi_1 + \upsilon_1$
αν $\upsilon_1 = 0$ τότε $\Delta = \upsilon_0 \cdot \pi_1 \cdot \pi_0 + \upsilon_0 = (\pi_1 \cdot \pi_0 + 1) \cdot \upsilon_0$,
το υ_0 κοινό μέτρο και μάλιστα για αριθμούς μέγιστο.

$(\Delta, \delta) \to (\delta, \upsilon_0) \to \underbrace{(\upsilon_0, \upsilon_1)}$

Μ.Κ.Δ (πριν το μηδέν)

1 : τότε Δ,δ είναι πρώτοι

0 : τότε έχουν τα Δ,δ κοινό μέτρο

Τι πρόβλημα έχει αυτή η διαδικασία για τα μεγέθη?
ΒΑΣΙΚΟ: ενδέχεται να μην τερματίζει!!

Πρόταση X.2 (Κριτήριο ασυμμετρίας)
Δύο μεγέθη θα είναι ασύμμετρα αν η ανθυφαίρεσή τους δεν τερματίζει.

Απόδειξη:

σύγχρονη απόδοση: A, B τα μεγέθη και
$A = B \cdot n_0 + \Gamma_0$
$B = \Gamma_0 \cdot n_1 + \Gamma_1$, όπου $\underbrace{\Gamma_0 > \Gamma_1 > \Gamma_2 > \ldots}_{\text{συνεχώς μικραίνουν}}$
$\Gamma_0 = \Gamma_1 \cdot n_2 + \Gamma_2$
που σημαίνει ότι κανένα Γ_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ δεν γίνεται μηδέν.
- Συμπέρασμα: δεν υπάρχει κοινό μέτρο.
η απόδειξη θα γίνει με το άτοπο ως εξής:
Αν υπήρχε κοινό μέτρο E τότε σε κάποιο βήμα της διαδικασίας $\Gamma_K < E$.
τότε το E μετρά τα A, B $\Rightarrow$ μετρά το $\Gamma_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ μετρά τα $B, \Gamma_0 \Rightarrow$ μετρά το $\Gamma_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow$
$\Rightarrow$ μετρά το Γ_K (δηλαδή το E που είναι μεγαλύτερο από το Γ_K μετρά το Γ_K) Αυτό είναι ΑΤΟΠΟ!

Παραδείγματα - Εφαρμογή του κριτηρίου:

Έστω A,B με $A^2 = 2B^2 \Rightarrow$ A,B ασύμμετρα

$(A,B) \to (B, A-B)$, εφ' όσον $A = B\cdot 1 + (A-B)$

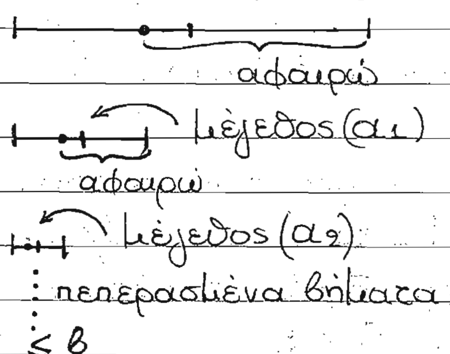
$(A,B) \to (B,A-B) \to (A+B, B)$ αφού $\frac{A+B}{B} = \frac{B}{A-B}$

και $(A,B) \to (B,A-B) \to (A+B,B) \to (B,A-B) \ldots$

εφ' όσον $A+B = B\cdot 2 + (A-B)$

Πρόταση X.1 (Η ιδιότητα Αρχιμήδους-Ευδόξου): Αν δοθούν δύο μεγέθη και από το μεγαλύτερο αφαιρώ κάθε φορά μεγαλύτερο από το μισό του τότε σε κάποιο στάδιο αυτής της διαδικασίας θα προκύψει μέγεθος μικρότερο του μικρότερου.

- Ερμηνεία: μέγεθος(α) μέγεθος(β)



Επίπτωση: Αφού μπορώ να επιλέξω το β πολύ μικρό, έτσι "εξαντλώ" το α.

Σχόλια:

- Εισαγωγή: A,B μεγέθη ομοειδή τότε $\exists κ$: $κA > B$ (δηλ. έχει νόημα ο λόγος $\left(\frac{A}{B}\right)$)
- Σήμερα: το $\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα Αρχ-Ευδ.

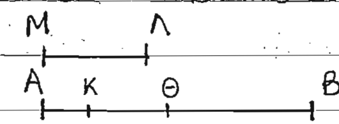
όπου αν $x,y \in \mathbb{R}^+$ $\exists\, n \in \mathbb{N}$: $nx > y \Leftrightarrow \frac{y}{n} < x$

(βγαίνει από τα αξιώματα ή είναι αξίωμα)

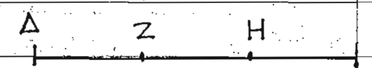
- Ας παρατηρήσουμε ότι $2^k \geq k \Rightarrow 2^{k+1} \geq 2k \Rightarrow$ $\Rightarrow 2^{k+1} \geq k+1$, που συμβαίνει αν $2k \geq k+1$ δηλ. αν $k \geq 1$
- Αν $nx > y$ έχω: $\exists\, n$: $2^n \cdot x > y \Rightarrow$ $\Rightarrow x > \frac{y}{2^n} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdots(y)\right)\right) < x$

1η Απόδειξη:

Έστω ΑΒ, ΜΛ τα μεγέθη, όπου ΑΒ το μεγαλύτερο, που τα παριστάνουμε με ευθύγρ. τμήματα. Αφού τα ΑΒ, ΜΛ μεγέθη κάποιο πολλαπλάσιο του ΜΛ υπερβαίνει το ΑΒ. Ας είναι $3ΜΛ = ΔΓ > ΑΒ$



- Χωρίζουμε το ΑΒ σε τρία μέρη με τα σημεία Θ, Κ.



- Χωρίζουμε το ΔΓ σε τρία ίσα μέρη με τα σημεία Ζ, Η.

Βήμα 1ον:

1η σχέση: $ΑΘ < \frac{ΑΒ}{2}$

2η σχέση: $ΔΗ > \frac{ΔΓ}{2}$

3η σχέση: $ΔΓ > ΑΒ$

$\frac{ΔΓ}{2} > \frac{ΑΒ}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow ΑΘ < \frac{ΑΒ}{2} < \frac{ΔΓ}{2} < ΔΗ$

Βήμα 2ον: Φτάνουμε στα τμήματα ΑΘ και ΔΗ. Χωρίζω το ΑΘ σε 2 μέρη (με το σημείο Κ).
Χωρίζω το ΔΗ σε 2 ίσα μέρη (με το σημείο Ζ) οπότε:

$$\left.\begin{array}{l} 1^{\eta}\ \text{σχέση}: AK < \frac{A\Theta}{2} \\ 2^{\eta}\ \text{σχέση}: \Delta Z = \frac{\Delta H}{2} \\ 3^{\eta}\ \text{σχέση}: \Delta H > A\Theta \end{array}\right\} \Rightarrow AK < \Delta Z = M\Lambda$$

2η απόδειξη: (Ανακατασκευή)

a ———— $3b > a$

b ——

1ο βήμα: $a_1 < \frac{a}{2}$

2ο βήμα: $a_2 < \frac{a_1}{2} < \frac{a}{4} \Rightarrow 4a_2 < a < 3b \Rightarrow$
$\Rightarrow a_2 < \frac{3}{4}b < b$

σύγχρονη απόδειξη: $\exists\, n_0 : n_0 \cdot b > a$ τότε $2^{n_0+1} > n_0$ απ' όπου $2^{n_0+1} b > a \Rightarrow b > \frac{a}{2^{n_0+1}}$

<< 26-11-2008 >>

Μέτρηση των μεγεθών: Είναι μία καθαρά Μαθηματική Θεωρία

Σύντομη επανάληψη

A. Μέτρηση στους αριθμούς

διαίρεση $\longrightarrow$ τέλεια, (i)
$\searrow$ μπορεί να υπάρχει και υπόλοιπο, (ii)

$a, b \to$ ή Το a είναι πολ/σιο του b } (i)
ή Το b είναι πολ/σιο του a }
ή αν π.χ. $a > b$, $a = b \cdot m + v$, $0 < v < b$, (ii)

Τώρα αλλάζω μονάδα, παίρνω πιο μικρή μονάδα: το v

"Μετράω" το b με μονάδα το v

$b = v \cdot n$ ή $b = v \cdot m_1 + v_1$

$b = v \cdot n$, $a = v \cdot n \cdot m + v$, $a = (n \cdot m + 1) \cdot v$

$\left.\begin{array}{l} a = \text{πολ/σιο}\ v \\ b = \text{πολ/σιο}\ v \end{array}\right\}$ $\rightsquigarrow$ v χρησιμεύει ως κοινό μέτρο

συνεχίζω... Ερώτημα: Που φτάνω?

ή να τερματίσω σε κάποιο αριθμό > 1, v^* (τέλεια διαίρεση) Οπότε: $\left.\begin{array}{l} a = \text{πολ/σιο}\ v^* \\ b = \text{πολ/σιο}\ v^* \end{array}\right\} \Rightarrow v^*$ κοινό μέτρο	ή κάποτε (σε πεπερασμένα βήματα) θα ελαχιστοποιηθεί η μονάδα ως υπόλοιπο.
$a = b \cdot m + v$ $b = v \cdot m_1 + v_1$ $\vdots$ $v_k = v_{k-1} \cdot v^*$	Δεν υπάρχει κοινό μέτρο για τα a και b Πρώτοι μεταξύ τους ή $(a, b) = 1$

B. Η μετάβαση από τους αριθμούς στα μεγέθη ($\leftrightarrow$ "ποσά")

Θεμελιώδης παρατήρηση: Οι αριθμοί και οι μεταξύ τους σχέσεις δεν αρκούν για να περιγράψουν όλα τα μεγέθη που εμφανίζονται στα Μαθηματικά.

π.χ. η σχέση πλευράς-διαγωνίου σ'ένα τετράγωνο δεν μπορεί να είναι λόγος αριθμών.

Επομένως πρέπει να αναπτυχθεί μια θεωρία για τη μέτρηση των μεγεθών.

Σε σύγχρονους όρους αυτό παραπέμπει στη θεμελίωση των πραγματικών αριθμών (τα αποτελέσματα των μετρήσεων)

Σχετικά μ'αυτό το πρόβλημα.

•• Στη σύγχρονη εποχή

Candor, Dedekind, (Weirstrass)

Αποτέλεσμα: Αξιωματική θεμελίωση του $\mathbb{R}$

• Στην αρχαία Ελλάδα, μετά την εποχή του Πλάτωνα και πριν τον Ευκλείδη (~350π.Χ).

Το πρόβλημα λύθηκε μ'ένα θαυμαστό τρόπο από τον Εύδοξο (μαθητή του Πλάτωνα)

Η εργασία του Εύδοξου παρουσιάζεται στα στοιχεία του Ευκλείδη.

Ακόμα η μεθοδός του χρησιμοποιείται σ'ολόκληρο το έργο του Αρχιμήδη

Αριθμοί	Μεγέθη
έννοιες & Διαδικασίες →	?

Βασική Ιδιότητα

Δύο αριθμοί μπορούν να έχουν λόγο

λόγος αριθμών ⇝ νέα έννοια, που αφορά κατ'αρχήν αριθμούς

Θα γίνει κατανοητό μέσω των χειρισμών.

Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ αριθμοί

$\frac{\alpha}{\beta}$ ⇝ λόγος των α και β.

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, θα φτάσουμε σ'αυτόν τον ορισμό βήμα-βήμα υπενθυμίζοντας τη "μέτρηση" προκειμένου για αριθμούς

$\alpha, \beta \to \alpha = n\cdot\beta$

$\alpha, \beta \to \beta = m\cdot\alpha$

$\alpha, \beta \to$ μέγιστος κοινός διαιρέτης $d \to \alpha = \kappa\cdot d$, $\beta = \lambda\cdot d$

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, Ομοίως: $\begin{cases} \text{αν } \alpha = n\cdot\beta \Rightarrow \gamma = n\cdot\delta \\ \text{αν } \beta = m\cdot\alpha \Rightarrow \delta = m\cdot\gamma \\ \text{αν } \lambda\alpha = \kappa\cdot\beta \Rightarrow \lambda\gamma = \kappa\cdot\delta \end{cases}$

Η ισότητα των λόγων ορίζει μια αναλογία και έχουμε όλες τις ιδιότητες των αναλογιών με αποδείξεις.

π.χ. (i) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\delta}$

$(\alpha+\beta) = n\cdot\beta \Rightarrow (\gamma+\delta) = n\cdot\delta$

$\alpha = (n-1)\beta \Rightarrow \gamma = (n-1)\delta \Rightarrow (\gamma+\delta) = n\cdot\delta$

και συνεχίζουμε για όλες τις περιπτώσεις

(ii) επίσης αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$

Η "αναλογία" επεκτείνει τη μέτρηση στους αριθμούς

→ σήμερα $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$

Μεγέθη?

γ΄) Ο λόγος δύο μεγεθών είναι κάποια σχέση πηλίκου.

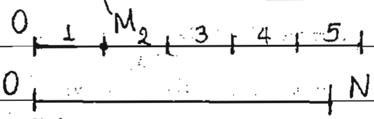
Ποια ομοειδή μεγέθη μπορεί να έρχονται σε λόγο?

δ΄) Αυτά που υπακούουν στην απαίτηση: (Α-Ε)

Δηλ. A, B $\exists$ κ, λ φυσικοί $\kappa A > B$ ή $\lambda B > A$

[Α-Ε : Αρχιμήδη-Ευδόξου]

Ερμηνεία



$5\cdot(OM) > ON$

Σημείωση: Υπάρχουν μη Αρχιμήδειες Γεωμετρίες

Ζητούμενο: Ισότητα Λόγων → Μεγεθών

Έχω ένα πρόπλασμα για την ισότητα Λόγων αριθμών

Ζητείται μία ικανοποιητική επέκταση → Δεν είναι καθόλου μα καθόλου προφανές και η

λύση οφείλεται στον Εύδοξο

$\left[\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}\right] \leftarrow$ σύμβολο για το λόγο ($\nexists$ στους αρχαίους αυτό το σύμβολο)

A, B και Γ, Δ
ομοειδή ομοειδή

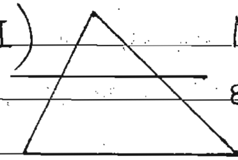
Ορισμός (ε΄): $\begin{cases} \text{αν } \kappa A > \lambda B \Rightarrow \kappa\Gamma > \lambda\Delta \\ \text{αν } \kappa A = \lambda B \Rightarrow \kappa\Gamma = \lambda\cdot\Delta \\ \text{αν } \kappa A < \lambda B \Rightarrow \kappa\Gamma < \lambda\Delta \end{cases}$

Σχόλιο: Η περίπτωση "=" αντιστοιχεί στο ότι τα μεγέθη έχουν κοινό μέτρο.

Τύποι προτάσεων που μπορούν να αποδειχθούν με χρήση του ορισμού.

I) Ο λόγος δύο κύκλων είναι ίσος με το λόγο των τετραγώνων με πλευρές τις διαμέτρους των κύκλων

II) Ο λόγος δύο ορθογ. παραλ/μων με ίσα ύψη είναι ίσος με τον λόγο των βάσεων τους.

III)  Μια παράλληλος προς τη βάση ενός τριγώνου ορίζει ανάλογα ευθύγραμμα τμήματα στις πλευρές.

Τα II & III έχουν αποδειχθεί

Σύμμετρα και Ασύμμετρα μεγέθη

σύμμετρα ↔ αν υπάρχει κοινό μέτρο

ασύμμετρα ↔ δεν υπάρχει κοινό μέτρο

[δηλαδή A, B σύμμετρα $\longleftrightarrow \kappa A = \lambda B$ για κατάλληλους φυσικούς κ & λ]

A, B έχουν κοινό μέτρο, δηλ $\exists$ ομοειδές μέγεθος Γ ώστε: $A = \rho\cdot\Gamma$, $B = \sigma\cdot\Gamma$, ρ, σ φυσικοί.
Τότε $\sigma A = \rho B$ οπότε ισχύει $\kappa A = \lambda B$.
Ανάποδα τώρα, αν $\kappa A = \lambda B$ παίρνω για κοινό μέτρο π.χ. $B^* = \frac{B}{\kappa}$. Τότε το μεν $B = \kappa\cdot B^*$, $A = \lambda\cdot B^*$ άρα B^* κοινό μέτρο.
Επομένως η δεύτερη από τις τρεις απαιτήσεις του ορισμού ισότητας λόγων αντιστοιχεί στη σύμμετρη περίπτωση.

Ερώτημα: Πώς γίνεται ο έλεγχος της ασυμμετρίας ?
Αν είχα αριθμούς με κοινό μέτρο $\rightarrow 1 \rightarrow$ πρώτους
$\searrow$ Μ.Κ.Δ.

Αυτό το επιτύγχανε με διαδοχικές Ευκλείδιες διαιρέσεις.
Ευκλείδιοι Αλγόριθμοί ή ανθυφαίρεση
Κάτι αντίστοιχο, μπορεί να γίνει και για μεγέθη

$$\left.\begin{aligned} A &= B\cdot\pi_0 + \gamma_0 \\ B &= \gamma_0\cdot\pi_1 + \gamma_1 \\ \gamma_0 &= \gamma_1\cdot\pi_2 + \gamma_2 \\ &\vdots \end{aligned}\right\}$$

- τερματίζει η διαδικασία $\rightarrow$ σύμμετρα μεγέθη
- αν δεν τερματίζει $\rightarrow$ ασύμμετρα μεγέθη

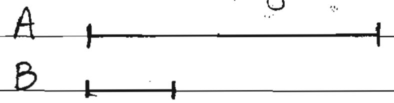
A, B, γ_0 ομοειδή μεγέθη

Παράδειγμα: $\alpha^2 = 3\cdot\beta^2$, α, β δεν έχουν κοινό μέτρο.
$\alpha = 1\beta + (\alpha - \beta)$, πρέπει $\alpha - \beta < \beta \Rightarrow \alpha < 2\beta \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha^2 < 4\beta^2$. Ισχύει: $\alpha^2 = 3\beta^2 < 4\beta^2$
οπότε τώρα θέλω: $(\alpha, \beta) \longleftrightarrow (\beta, \alpha - \beta)$
όμως ισχύει: $\frac{\beta}{\alpha-\beta} = \frac{\alpha+\beta}{2\beta}$ οπότε έχουμε:

$(\alpha, \beta) \longleftrightarrow (\beta, \alpha-\beta) \longleftrightarrow (\alpha+\beta, 2\beta)$
επίσης ισχύει: $\alpha + \beta = 1\cdot(2\beta) + (\alpha - \beta)$ οπότε:
$(\alpha, \beta) \longleftrightarrow (\beta, \alpha-\beta) \longleftrightarrow (\alpha+\beta, 2\beta) \longleftrightarrow (2\beta, \alpha-\beta)$
έπειτα έχουμε: $\frac{2\beta}{\alpha-\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\beta}$
οπότε:
$(\alpha, \beta) \longleftrightarrow (\beta, \alpha-\beta) \longleftrightarrow (\alpha+\beta, 2\beta) \longleftrightarrow (2\beta, \alpha-\beta) \longleftrightarrow (\alpha+\beta, \beta)$
και τέλος ισχύει: $\alpha + \beta = 2\cdot\beta + (\alpha - \beta)$
άρα:
$(\alpha, \beta) \longleftrightarrow (\beta, \alpha-\beta) \longleftrightarrow (\alpha+\beta, 2\beta) \longleftrightarrow (2\beta, \alpha-\beta) \longleftrightarrow (\alpha+\beta, \beta) \longleftrightarrow (\beta, \alpha-\beta)$
Ακολουθία των πηλίκων $[1; 1212\ldots]$

«3-12-2008»

Μεγέθη
Λήμμα (της εξάντλησης):



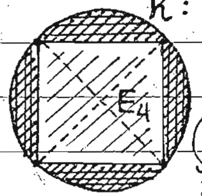
Αν από το Α κάθε φορά αφαιρώ ποσότητα μεγαλύτερη από το μισό, κάποτε θα φτάσω σε ένα μέγεθος πιο μικρό από το B.

Ερώτημα: Πώς αυτό εφαρμόζεται στην πράξη;

Παράδειγμα: Ας πάρω τον κύκλο και να δούμε ότι αν σ'ένα κανονικό πολύγωνο εγγεγραμμένο στον κύκλο διπλασιάζω συνέχεια τις πλευρές εξαντλώ τον κύκλο.

1ο βήμα

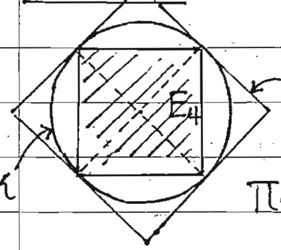
K: κύκλος



E_4 : τετράγωνο

$\underbrace{(K-E_4)}_{\text{έντονα γραμ/μένο}} < \frac{K}{2} \Longleftrightarrow \frac{K}{2} < E_4 \Longleftrightarrow K < 2E_4$

2ο βήμα



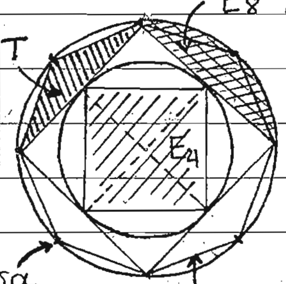
Π_4 : το περιγεγραμμένο τετράγωνο του κύκλου K

$\Pi_4 = 2 \cdot E_4$

$K < \Pi_4$ ισχύει

3ο βήμα

E_8^* κ.τ.λ.

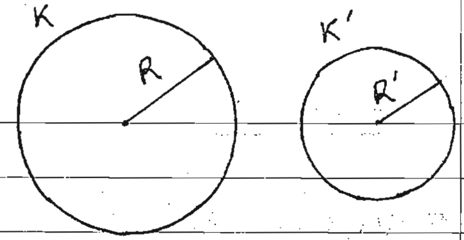


$T - E_8^* < \frac{T}{2}$

μέσα των τόξων

E_8: εγγεγραμμένο οκτάγωνο

Θεώρημα (XII.2):



$$\frac{K}{K'} = \frac{R^2}{R'^2} \left(= \frac{\Delta^2}{\Delta'^2} \right)$$

Απόδειξη:

Έστω $\frac{K}{K'} \neq \frac{R^2}{R'^2} = \frac{K}{S}$, $S \neq K'$

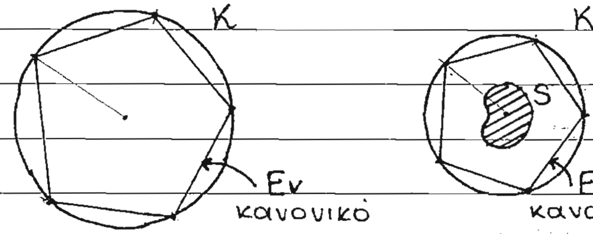
↳ επιφάνεια

Έστω ότι $S < K'$ θα δούμε ότι καταλήγουμε σε άτοπο

$S < K'$ τότε υπάρχει η επιφάνεια $\varepsilon = K' - S$ (*)

Από το Λήμμα αφού τα εγγεγραμμένα πολύγωνα εξαντλούν τον κύκλο.

Υπάρχει E'_ν ώστε $K' - E'_\nu < \varepsilon$ (*) Δηλαδή $S < E'_\nu$



K' άρα στον κύκλο K υπάρχει το αντίστοιχο κανον. πολυγ. E_ν

Τότε όμως τα E_ν, E'_ν ευθύγρ. σχήματα, κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών. άρα είναι όμοια!

$\frac{E_\nu}{E'_\nu} = \frac{R^2}{R'^2} \overset{\text{υποθ.}}{=} \frac{K}{S}$ δηλ. $\frac{S}{E'_\nu} = \frac{K}{E_\nu} < 1 \Longrightarrow K < E_\nu$ άτοπο

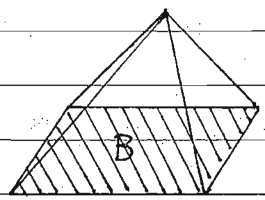
Άλλο παράδειγμα: (Διάστημα: μέτρηση πυραμίδων)

Στερεά :

* παραλληλεπίπεδο περιβάλλεται από παραλληλόγραμμα → μέτρηση: (βάση) x (ύψος)

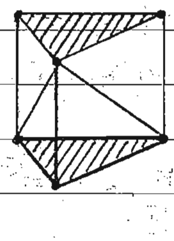
** Πρίσματα
τριγωνικό πρίσμα → μέτρηση: $\frac{1}{2}$(παραλ/πέδου)

*** Πυραμίδες μέτρηση:



→ $\frac{1}{3} \cdot B \cdot \upsilon$, απαιτεί εξάντληση

(**) Βήμα 1ο
(XII. 3-6.)
τριγωνικό πρίσμα ⇒ 3 τριγωνικές πυραμίδες. Έχουν ισεμβαδικές βάσεις, ίσα ύψη



Αρκεί να αποδείξω: $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$
που θέλει μέθοδο εξάντλησης
(δεν ζητείται απόδειξη)

Κατασκευαστικά προβλήματα στα Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά :

Τι είναι κατασκευή;
Πώς νοούνται τα αντικείμενα.
Τι σημαίνει ότι ένα αντικείμενο υπάρχει;
Ιδεατά Αντικείμενα,
που αυτά ανήκουν στα Μαθηματικά (κατά Πλάτωνα)
Δηλαδή λέγοντας τρίγωνο,
είναι ένα νοητικό αντικείμενο, είναι αποτέλεσμα αφαίρεσης.
Σ'αυτά τα πλαίσια ύπαρξη ενός αντικειμένου ή κατοχυρώνεται, όπως θα λέγαμε σήμερα Αξιωματικά ή προκύπτει από κάποιες πρώτες αρχές με αποδεκτές διαδικασίες απόδειξης.
Υπάρχει, λοιπόν, ένα νομιμοποιητικό πλαίσιο
Αν κάτι δεν εμπίπτει σ'αυτό το πλαίσιο τότε δεν μπορεί να γίνει αποδεκτό.
Παράδειγμα: Τριχοτόμος γωνίας
Θεώρημα: Οι τριχοτόμοι γωνιών τριγώνου οδηγούν πάντα σε ισόπλευρο τρίγωνο!
Αν αποδεκτώ ως πλαίσιο κάποια αξιώματα (π.χ. μεγεθών) σωστό & αποδεκτό.
Στα Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά κυρι-

αρκεί ο κανόνας και ο διαβήτης
Δηλ. οι γραμμές που υπεισέρχονται είναι ευθείες, γραμμές και κύκλοι.
Υπάρχουν τρία διάσημα προβλήματα που δεν λύνονται με τη χρήση μόνο κανόνα και διαβήτη

1ον) Τριχοτόμηση γωνίας
2ον) Διπλασιασμός κύβου
3ον) Τετραγωνισμός κύκλου

} Αποδείχθηκε τον 19ο αιώνα

ευθεία, κύκλος ⟶ επίπεδοι τόποι
άλλες καμπύλες ⟶ στέρεοι τόποι, προκύπτουν ως τομές στοιχείων του χώρου π.χ. όλες οι κωνικές τομές.

Αν ένα πρόβλημα οδηγούσε σε στερεό τόπο δεν θεωρείτο στοιχειώδες & η λύση του μη αποδεκτή.

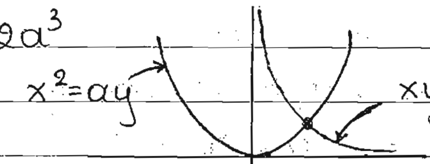
Διπλασιασμός του κύβου (Δήλιο πρόβλημα)

Δίνεται κύβος πλευράς a
Ζητείται κύβος πλευράς x
} ώστε $x^3=2a^3$

Αναγωγή του προβλήματος
Ιπποκράτης ο Χίος
} ⟹

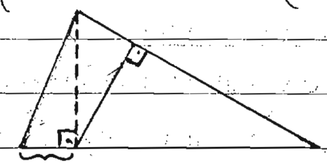
⟹ η παρεμβολή δύο μέσων αναλόγων (σε σχέση αναλογίας) ως εξής: $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$

οπότε: $x^2=ay$ και $x\cdot y=2a^2$, που αποτελούν στέρεους τόπους και συνεπώς $x^3=a(xy)=2a^3$
άρα $x^3=2a^3$

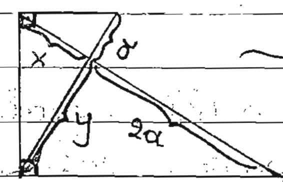


Μέναιχμος: όρισε τις κωνικές τομές.

Αρχύτας ο Ταραντίνος

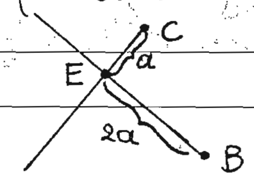


Μηχανικές λύσεις:
Κατασκευές που οδηγούν στη λύση.
Αν για τους στέρεους τόπους υπήρχαν "αντιστάσεις", οι μηχανικές κατασκευές ήταν αποδιοπομπαίες, ειδικά από τον Πλάτωνα

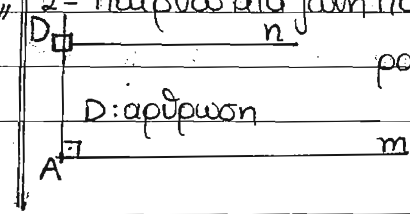


⟶ αναπαριστά γεωμετρικά την συνεχή αναλογία

Πώς επιτυγχάνω το σχήμα;
Κατασκευή του ξυλουργού
σε μια απλή περιγραφή δουλεύει ως εξής:
1ον παίρνω έναν "σταυρό"



2ον παίρνω μια ζώνη παράλληλων ραβδών



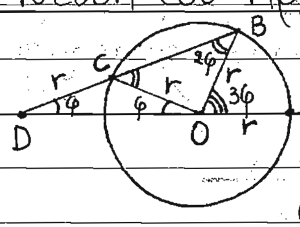
3ον Προσπαθώ να τοποθετήσω το σταυρό μέσα στη γωνία ώστε EB να διέρχεται από το D και η EC από το A
(προσαρμογή : α) περιστροφή του σταυρού,
β) μετακίνηση της n)
Η προσαρμογή παραπέμπει σε προβλήματα νεύσης.

Τριχοτόμηση της γωνίας.

1η Κατασκευή (μεταγενέστερη) Αρχιμήδη
2η Κατασκευή ~> με χρήση της τετραγωνίζουσας, οφείλεται στον Ιππία, τον σοφιστή

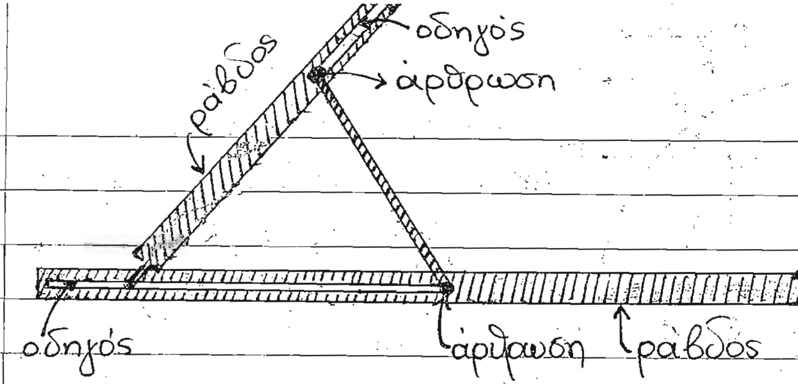
τετραγωνίζουσα : καμπύλη που προκύπτει μηχανικά και λύνει ⟶ Τριχοτ. γωνίας
(ταυτόχρονα) ⟶ Τετραγ. του κύκλου.

1η Νευση του Αρχιμήδη



Δίνεται η $A\hat{O}B$. Την καθιστώ επίκεντρη σε κύκλο ακτίνας r και διαμέτρου που περιέχει την OA ~> προεκτείνω...

Αν καταφέρω να βρω σημείο D στην OA ώστε ενώνοντας το D με το B (για C πάνω στον κύκλο) και να έχω: $DC = r$ τότε $B\hat{D}A = \frac{1}{3} A\hat{O}B$



<< 21-1-2009 >>

Η έννοια της κατασκευής στα Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά
"Το αδύνατο μιας κατασκευής" } έχουν αναλυθεί

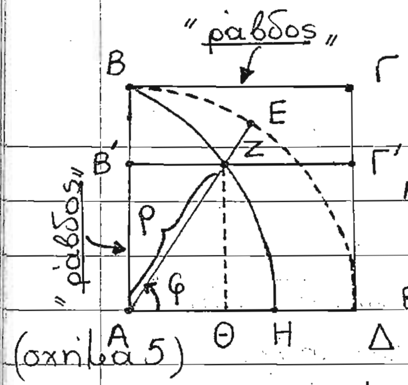
1) Διπλασιασμός κύβου
2) Τριχοτόμηση της γωνίας
3) Τετραγωνισμός του κύκλου

"Το αδύνατο μιας κατασκευής" είναι σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο, σε ένα άλλο πλαίσιο πιθανώς να υπάρχει απάντηση.

"άλλο πλαίσιο"

- στερεού τόπου (π.χ. κωνικές τομές) } έχουμε δώσει παραδ/τα
- απαιτήσεις της νεύσης
- κινηματικές λύσεις
  ↳ αναφέρεται σε καμπύλες που προκύπτουν με κίνηση.

Παράδειγμα: Η τετραγωνίζουσα, οφείλεται στον Ιππία τον Ηλειο (~420 π.Χ.)



(σχήμα 5)

"νοητικό πείραμα"

AB : δυνατότητα περιστροφής γύρω από το A.

ΒΓ : ολισθαίνει κατά μήκος του AB

απαιτείται ομαλή κίνηση, ταυτόχρονη έναρξη και λήξη.

AB : διαγράφει τεταρτοκύκλιο

ΒΓ : διαγράφει τετράγωνο

Τυχαία θέση : AB → AE } ορίζεται ένα σημείο τομής το Z

(την ίδια χρον. στιγμή) ΒΓ → Β'Γ'

τετραγωνίζουσα ⟷ προκύπτει από σημεία όπως το Z.

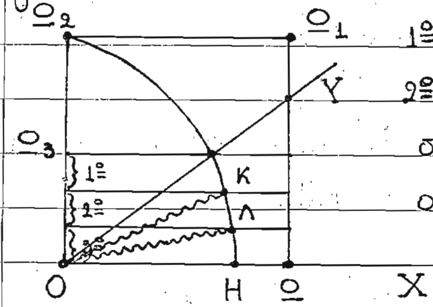
Ισχύει το εξής : $\underbrace{\frac{B\hat{A}\Delta}{E\hat{A}\Delta}}_{\text{ομαλή κίνηση} \;\leftrightarrow\; \frac{t_{ολ}}{(t_{ολ}-t)}} \left(= \frac{\text{τοξ}(BE\Delta)}{\text{τοξ}(E\Delta)}\right) = \frac{AB}{Z\Theta}$

οπότε:

"εξίσωση" : $\frac{\frac{\pi}{2}}{\varphi} = \frac{\ell}{(AZ\,ημφ)} \Leftrightarrow AZ = \frac{2\ell\varphi}{\pi \cdot ημφ}$

$\Leftrightarrow \boxed{\rho = \frac{2\ell}{\pi}\,\frac{\varphi}{ημφ}}$

▶ Έστω ότι θέλουμε να τριχοτομήσουμε μια γωνία $X\hat{O}Y$.



1º βήμα: $X\hat{O}Y \rightarrow O\underline{O}\,\underline{O}_1\underline{O}_2$

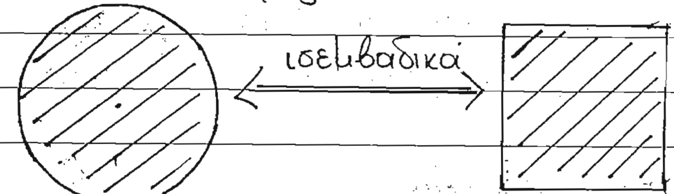
2º βήμα: παίρνω τη τετραγωνίζουσα, απ' όπου προκύπτει το σημείο $\underline{O}_3$.

όπου OY : (∩ τετραγωνίζουσα) → προβολή

3º βήμα: χωρίζω $O\underline{O}_3$ σε 3 ίσα μέρη, απ' όπου προκύπτουν στην τετραγωνίζουσα τα σημεία Κ, Λ.

4º βήμα: φέρω ΟΚ, ΟΛ που είναι οι τριχοτόμοι.

Προς τον τετραγωνισμό του κύκλου

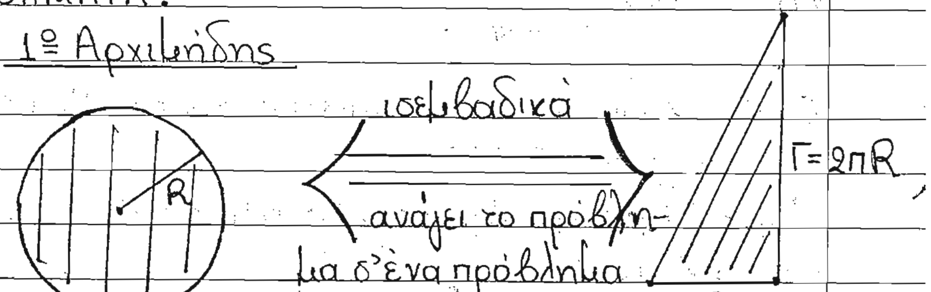


δεν λύνεται με κανόνα και διαβήτη

(απόδειξη 1880)

ΒΗΜΑΤΑ:

1º Αρχιμήδης



ανάγει το πρόβλημα σ' ένα πρόβλημα μήκους.

2º Δεινόστρατος (απόδειξη από τον Πάππο)
Στην τετραγωνίζουσα του Ιππία (σχήμα 5)

$$\frac{1}{4}(\pi\varepsilon\rho\iota\varphi) = \frac{\tau o\xi(B E \Delta)}{(AB)} = \frac{(AB)}{(AH)}$$

→ γίνεται τέταρτη ανάλογος δηλ κατασκευάζω αν γνωρίζω το ΑΗ.

Τα στοιχεία του Ευκλείδη (~300 π.Χ.)

13 βιβλία I – XIII

Ομαδοποίηση: { XI – XIII στερεομετρία
X θεωρία των ασυμμέτρων
VII – IX θεωρία αριθμών
I – VII επιπεδομετρία }

Το βιβλίο I: αποτελεί τη βάση του Οικοδομήματος της Γεωμετρίας.

Η δομή των Στοιχείων

Χαρακτηρίζονται από την "αυστηρότητα" που εξασφαλίζει μια "Αξιωματική" Δομημένη Θεωρία.

—//—

Εδώ ακολουθούνται απαιτήσεις του Αριστοτέλη

—//—

Στον Ευκλείδη οφείλεται η όλη σύνθεση του επιχειρήματος.

—//—

Τα μαθηματικά είναι μια "παραγωγική" επιστήμη.

—//—

Θα αναφερθούμε στο 1º βιβλίο των Στοιχείων

—//—

Πριν κάνουμε αποδείξεις:
Όροι – Αιτήματα – Κοινές έννοιες

Ορισμοί Αξιώματα (Σημερινή ορολογία)

Αρχίζει και αναπτύσσεται θεωρία σε 48 προτάσεις.
47 – 48: Πυθαγόρειο Θεώρημα

Όροι (ορισμοί 23): {Σημείο, Ευθεία, Επίπεδο}, {γωνίες, σχήματα},

{παράλληλες}

Τις σημειώσεις από τις παραδόσεις επεξεργάστηκε και έγραψε η φοιτήτρια: Λωρίδα Πηνελόπη.