IV. Π Ι Ν Α Κ Ε Σ

1. Πίνακες. Κάθε διανυσματικός χώρος **U**(F), με dimU = n, έχει και έναν χώρο συντεταγμένων F^n, προς τον οποίο μάλιστα είναι ισόμορφος. Το ίδιο ισχύει και για τον χώρο $\mathcal{L}(\mathbf{U},\mathbf{V})$. Ο χώρος, προς τον οποίον ο $\mathcal{L}(\mathbf{U},\mathbf{V})$ είναι ισόμορφος, είναι ο χώρος των m×n ***πινάκων*** $F^{m\times n}$. Ενα στοιχείο του χώρου αυτού, είναι ένας πίνακας, που αποτελείται από στοιχεία του σώματος F, και ο οποίος έχει m γραμμές και n κολώνες. Τους πίνακες θα τους συμβολίζουμε με κεφαλαία γράμματα. Αν $T\in\mathcal{L}(\mathbf{U},\mathbf{V})$ τότε με το ίδιο γράμμα T θα συμβολίζουμε και το στοιχείο του $F^{m\times n}$, προς το οποίο ο T απεικονίζεται από τον προαναφερθέντα ισομορφισμό.

Το σύνολο $F^{m\times n}$ οργανώνεται σε γραμμικό χώρο, ως εξής.
Αν $A = (\alpha_{ij})$ και $B = (\beta_{ij})$, i = 1, . . . ,m, j = 1, . . . ,n, τότε και $A+B = (\alpha_{ij}+\beta_{ij})$ και $\lambda A = (\lambda\alpha_{ij})$. Αναλυτικά, είναι δηλαδή,

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n}\\ & \ddots & \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\beta_{11} & \cdots & \beta_{1n}\\ & \ddots & \\ \beta_{m1} & \cdots & \beta_{mn}\end{pmatrix}\quad A+B=\begin{pmatrix}\alpha_{11}+\beta_{11} & \cdots & \alpha_{1n}+\beta_{1n}\\ & \ddots & \\ \alpha_{m1}+\beta_{m1} & \cdots & \alpha_{mn}+\beta_{mn}\end{pmatrix}$$

και $$\lambda A=\begin{pmatrix}\lambda\alpha_{11} & \cdots & \lambda\alpha_{1n}\\ & \ddots & \\ \lambda\alpha_{m1} & \cdots & \lambda\alpha_{mn}\end{pmatrix}.$$

Μηδενικό στοιχείο του χώρου είναι εκείνος ο πίνακας, του οποίου όλα τα m×n στοιχεία είναι μηδενικά. Η ισότητα τέλος, δύο m×n πινάκων, A και B, ορίζεται από την σχέση, $\alpha_{ij} = \beta_{ij}$ για κάθε i = 1, . . . ,m και j = 1, . . .,n.

Η διάσταση του χώρου αυτού, είναι mn μιά και τα στοιχεία

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1 & \cdots & 0\\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},\ E_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1 & \cdots & 0\\ & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},\ .\ .\ .\ .\ ,\ E_{mn}=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0\\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

αποτελούν, φανερά, μιά βάση γι' αυτόν.

Υποθέτουμε τώρα, ότι έχουμε την T: $\mathbf{U}\to\mathbf{V}$. Εστω $\overline{u} = \{u_1,u_2,\ \dots\ ,u_m\}$ μιά βάση του **U** και $\overline{v} = \{v_1,v_2,\ \dots\ ,v_n\}$ μιά βάση του **V**. Αν είναι

$$\begin{aligned} u_1T &= \alpha_{11}v_1+\alpha_{12}v_2+\ \dots\ +\alpha_{1n}v_n\\ &\ \ \dots \qquad \dots\\ u_mT &= \alpha_{m1}v_1+\alpha_{m2}v_2+\ \dots\ +\alpha_{mn}v_n\end{aligned}$$

ορίζεται τότε μονοσήμαντα ο πίνακας $A = (\alpha_{ij})$, i = 1, . . . ,m, j = 1, . . . ,n. Εύκολα αποδεικνύεται, ότι η απεικόνιση η οποία στον μετασχηματισμό T αντιστοιχίζει τον πίνακα A, είναι ένας ισομορφισμός φ του χώρου $\mathcal{L}(\mathbf{U},\mathbf{V})$ πάνω στον χώρο $F^{m\times n}$.
Ιδιαίτερα, όταν θεωρούμε τον χώρο των αυτομορφισμών του **U**, ο πίνακας A είναι ένας ***τετραγωνικός*** πίνακας, μια και m = n.

Συμβολισμός. 1) Αν δεν αναφέρουμε τις βάσεις των χώρων που χρησιμοποιούμε, υποθέτουμε πάντα ότι αυτές είναι οι κανονικές.

2) Αν θέλουμε να εμφανίζουμε τις βάσεις ως προς της οποίες έχουμε λάβει την εικόνα του T, f, κλπ. εν $F^{m\times n}$, γράφουμε, $(f : \overline{u}, \overline{v})$.

Ασκήσεις. Να δείξετε ότι, η απεικόνιση φ: $\mathcal{L}(\mathbf{U},\mathbf{V}) \to F^{m\times n}$, που ορίζεται από τις προηγούμενες ισότητες, είναι ισομορφισμός ως προς τις πράξεις που καθιστούν τον $\mathcal{L}(\mathbf{U},\mathbf{V})$ διανυσματικό χώρο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Ο πίνακας που αντιστοιχεί μέσω της φ στην απεικόνιση "στροφή στο επίπεδο κατά γωνία θ" (βλέπε Εφαρμογές α), σελ. 23) στην κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$, βρίσκεται ως εξής:

Έχουμε ότι, $(x,y) \mapsto (x\cos\theta - y\sin\theta,\ x\sin\theta + y\cos\theta)$. Αρα και,

$$(1,0)\,T_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$$

$$(0,1)\,T_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

Είναι λοιπόν,

$$\varphi(T_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Έστω ότι $T \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Αν $x \in \mathbb{R}^2$, ζητάμε να βρούμε την εικόνα του, xT. Είναι, (1,0)T = (2,1) και (0,1)T = (−1,1). Άρα,

$xT = (x_1(1,0) + x_2(0,1))T = x_1(1,0)T + x_2(0,1)T = x_1(2,1) + x_2(-1,1) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_2)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Εστω ότι, οι T_1 και T_2 ορίζονται από τις σχέσεις:

$$(1,0,0)\,T_1 = (1,-1,2) \qquad (1,0,0)\,T_2 = (-1,1,-2)$$

$$(0,1,0)\,T_1 = (0,1,-1) \qquad (0,1,0)\,T_2 = (1,0,1)$$

$$(0,0,1)\,T_1 = (1,2,0) \qquad (0,0,1)\,T_2 = (0,1,1)\,.$$

Θεωρούμε και την απεικόνιση $T_1 + T_2$. Επειδή είναι $x(T_1 + T_2) = xT_1 + xT_2$ (από τον ορισμό του αθροίσματος των απεικονίσεων), είναι και

$$(1,0,0)(T_1 + T_2) = (1,-1,2)+(-1,1,-2) = (0,0,0)$$

$$(0,1,0)(T_1 + T_2) = (0,1,-1)+(1,0,1) = (1,1,0)$$

$$(0,0,1)(T_1 + T_2) = (1,2,0)+(0,1,1) = (1,3,1)\,.$$

Παρατηρούμε ότι, αν $\varphi(T_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ και $\varphi(T_2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, τότε

και $\varphi(T_1 + T_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(-1) & (-1)+1 & 2+(-2) \\ 0+1 & 1+0 & (-1)+1 \\ 1+0 & 2+1 & 0+1 \end{pmatrix} = \varphi(T_1) + \varphi(T_2)$.

Εξ' άλλου, και για τον λT_1 έχουμε ότι,

$$(1,0,0)(\lambda T_1) = \lambda(1,0,0)\,T_1 = \lambda(1,-1,2) = (\lambda,-\lambda,2\lambda)$$

$$(0,1,0)(\lambda T_1) = \lambda(0,0,1)\,T_1 = \lambda(0,1,-1) = (0,\lambda,-\lambda)$$

$$(0,0,1)(\lambda T_1) = \lambda(0,0,1)\,T_1 = \lambda(1,2,0) = (\lambda,2\lambda,0)$$

δηλαδή, $\varphi(\lambda T_1) = \lambda\varphi(T_1)$.

Θα ορίσουμε, τώρα, έναν πολλαπλασιασμό μέσα στο σύνολο των πινάκων, ο οποίος να αναπαριστά την σύνθεση των απεικονίσεων. Προς τούτο, παρατηρούμε κατ' αρχήν, ότι για να είναι δυνατή η σύνθεση των f:**U** $\to$ **V** και g: **Z** $\to$ **W**, θα πρέπει να έχουμε ότι **Z** = f(**V**). Συνέπεια αυτού του γεγονότος είναι ότι αν ο φ(f) είναι ένας m×k πίνακας, ο φ(g) πρέπει να είναι ένας k×n πίνακας. Το αποτέλεσμα, δηλαδή ο πίνακας φ(fg) θα είναι ένας m×n πίνακας.

Θεωρούμε, τώρα, τους πίνακες A = $(\alpha_{i,k})$ και B = (β_{kj}). Ορίζουμε ως ***γινόμενο*** των πινάκων A και B, το πίνακα C = (γ_{ij}) όπου $\gamma_{ij} = \sum_{\kappa=1}^{k} \alpha_{i\kappa}\beta_{\kappa j}$. Το παρακάτω παράδειγμα, θα δικαιολογήσει αυτόν τον ορισμό, του γινομένου δύο πινάκων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Έστω ότι ο T_3 ορίζεται ως εξής: $(1,0,0)T_3 = (1,-1)$, $(0,1,0)T_3 = (0,1)$, και $(0,0,1) = (2,3)$. Εδώ, είναι, $\varphi(T_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Θεωρούμε το γινόμενο T_1T_3. Είναι,

$$\begin{aligned}
(1,0,0)(T_1T_3) &= (1,-1,2)T_3 = \{1(1,0,0)+(-1)(0,1,0)+2(0,0,1)\}T_3 \\
&= (1,-1)+(0,-1)+(4,6) = (5,4) \\
(0,1,0)(T_1T_3) &= (0,1,-1)T_3 = \{0(1,0,0)+1(0,1,0)+(-1)(0,0,1)T_3 \\
&= 0(1,-1)+(0,1)+(-2,-3) = (-2,-2) \\
(0,0,1)(T_1T_3) &= (1,2,0)T_3 = \{1(1,0,0)+2(0,1,0)+0(0,0,1)\}T_3 \\
&= 1(1,-1)+2(0,1)+0(2,3) = (1,1).
\end{aligned}$$

Συνεπώς, $\varphi(T_1T_3) = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Εξ' άλλου, είναι και:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times1+(-1)\times0+2\times2 & 1\times(-1)+(-1)\times(1)+2\times3 \\ 0\times1+1\times0+(-1)\times2 & 0\times(-1)+1\times1+(-1)\times3 \\ 1\times1+2\times0+0\times2 & 1\times(-1)+2\times1+0\times3 \end{pmatrix}$$

$= \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι $\varphi(T_1T_3) = \varphi(T_1)\varphi(T_3)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1. Η πρόσθεση, όπως ορίσθηκε στο σύνολο των m×n πινάκων, καθιστά το σύνολο αυτό ημιομάδα. Ουδέτερο στοιχείο της ημιομάδας αυτής, είναι ο μηδενικός πίνακας O, όλα τα στοιχεία του οποίου, είναι μηδενικά. Ο πολλαπλασιασμός, όπως ορίστηκε, δεν είναι αντιμεταθετικός. Τούτο βέβαια το περιμέναμε, μιά και η σύνθεση των συναρτήσεων, δεν γίνεται πάντοτε. Για παράδειγμα, ενώ ο πολλαπλασιασμός $\varphi(T_1)\varphi(T_3)$ γίνεται, ο $\varphi(T_3)\varphi(T_1)$ δεν γίνεται, μια και δεν μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε πίνακα 3×2 επί πίνακα 3×3. Και στην περίπτωση όμως, που ο πολλαπλασιασμός είναι δυνατός, δεν είναι αντιμεταθετικός.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. Εστω, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ είναι

τότε και

$AB = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 9 \\ 0 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 12 \end{pmatrix}$ ενώ $BA = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 & 0 \\ 12 & 10 & 5 & 4 \\ 8 & 7 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}$. Είναι, λοιπόν, $AB \neq BA$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6. Θεωρούμε τις δύο στροφές του επιπέδου, κατά γωνίες θ_1 και θ_2. Οι πίνακες που αντιστοιχούν στους μετασχηματισμούς αυτούς, είναι αντίστοιχα οι

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}.$$

Το γινόμενο των δύο αυτών πινάκων, είναι ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 & \cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2 \\ -\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2 & -\sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & \sin(\theta_1+\theta_2) \\ -\sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix}$$

πίνακας, που αντιστοιχεί σε στροφή στο επίπεδο κατά γωνία $\theta_1 + \theta_2$. Εδώ, φανερά, ο πολλαπλασιασμός είναι αντιμεταθετικός.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2. Ο πολλαπλασιασμός των πινάκων, όταν αυτός είναι δυνατός, είναι προσεταιριστικός. Αυτό, είναι συνέπεια του τρόπου ορισμού του πολλαπλασιασμού. Ομως, την ιδιότητα αυτή, μπορούμε να την συνάγουμε και από την σχέση $\varphi(T_1)\varphi(T_2) = \varphi(T_1T_2)$, σχέση, που διατηρεί την ισομορφία ανάμεσα στις πράξεις "σύνθεση συναρτήσεων" και "πολλαπλασιασμός πινάκων". Πράγματι, είναι

$$\{\varphi(T_1)\varphi(T_2)\}\varphi(T_3) = \varphi(T_1T_2)\varphi(T_3) = \varphi((T_1T_2)T_3)) \quad \text{και}$$
$$\varphi(T_1)\{\varphi(T_2)\varphi(T_3)\} = \varphi(T_1)\varphi(T_2T_3) = \varphi(T_1(T_2T_3))$$

Η ισομορφία αυτή, μεταφέρει τις ιδιότητες της σύνθεσης των συναρτήσεων, σε ιδιότητες του πολλαπλασιασμού πινάκων. Επειδή λοιπόν, η σύνθεση είναι προσεταιριστική, είναι και ο πολλαπλασιασμός.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3. Ο πολλαπλασιασμός των n×n πινάκων έχει και μονάδα. Είναι ο πίνακας $I = (\delta_{ij})$ i, j = 1, . . .,n. Ισχύουν επίσης και οι παρακάτω επιμεριστικοί νόμοι, εφ' όσον βέβαια, οι σημειούμενοι πολλαπλασιασμοί εκτελούνται.

$$A(B+\Gamma) = AB+A\Gamma \quad \text{και} \quad (B+\Gamma)A = BA+\Gamma A$$

Αντίστοιχους νόμους έχουμε και στο αντίστοιχο δια της φ^{-1} σύνολο των συναρτήσεων, που εκφράζουν οι παραπάνω πίνακες.

Εφ' όσον μέσα σε ένα σύνολο ορίζονται δύο πράξεις, πρόσθεση και πολλαπλασιασμός, και ως προς την πρόσθεση είναι αυτό Αβελιανή ομάδα, και ως προς τον πολλαπλασιασμό ημιομάδα, ισχύουν δε και οι δύο επιμεριστικοί νόμοι, που γράψαμε παραπάνω, λέμε ότι η προκύπτουσα δομή, είναι ένας ***δακτύλιος***. Αν μάλιστα έχουμε και μονάδα, ο δακτύλιός μας είναι ένας ***δακτύλιος με μονάδα***. Όπως είδαμε, το σύνολο των αυτομορφισμών του **U** αποτελεί δακτύλιο με μονάδα. Η απεικόνιση, που αντιστοιχεί στον μοναδιαίο πίνακα, συμβολίζεται με 1_U.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 4. Αν θέλουμε να βρούμε την εικόνα xT κάποιου ανύσματος $x \in U$, όταν $T \in \mathcal{L}(\mathbf{U},\mathbf{V})$, και γνωρίζουμε τον πίνακα $T = \varphi(T)$, απλά εκτελούμε τον πολλαπλασιασμό xT. Ετσι, στο παράδειγμα 6, η εικόνα του $x = (x_1, x_2)$ είναι η xT, που είναι η

$$xT = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (2x_1 - x_2, x_1 + x_2) \; .$$

Ασκήσεις. 1) Δίδονται οι γραμμικοί μετασχηματισμοί T και S επί του $\mathbb{R}^3$.

$$T \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad S \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Να βρεθούν: α) Η εικόνα του $(1, -1, 0)$ δια του T.
β) Η εικόνα του $(0, 2, -2)$ δια του S.
γ) Ο πίνακας που αντιστοιχεί στην σύνθεση TS των T και S.
δ) Ο πίνακας που αντιστοιχεί στο άθροισμα T+S.
ε) Η εικόνα του $(1, -1, 0)$ δια του TS.

2) Να βρεθούν όλοι οι 2×2 πίνακες, που αντιμετατίθενται με τον πίνακα που αντιστοιχεί στις περιστροφές του επιπέδου.

3) Να δείξετε ότι η απεικόνιση $\varphi: \mathbb{C} \to \mathbb{R}^{2\times2}$ ($\mathbb{C}$ το σώμα των μιγαδικών αριθμών), και που ορίζεται από την σχέση

$$\alpha + \beta i \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

είναι ένας ισομορφισμός του $\mathbb{C}$ στο σύνολο των 2×2 πινάκων της μορφής που αναγράφεται.

4) Να βρεθεί ο πίνακας του διαφορικού τελεστή D (βλέπε σελ. 25), ως προς την κανονική βάση του χώρου P_n.

Είναι, $D: P_n \to P_{n-1}$. Η κανονική βάση του P_n αποτελείται από τα πολυώνυμα: $x^0, x^1, \ldots, x^{n-1}, x^n$. Η κανονική βάση του P_{n-1} αποτελείται από τα πολυώνυμα: $x^0, x^1, \ldots, x^{n-1}$. Είναι, λοιπόν,

$$\begin{aligned} D(x^0) &= 0 = 0x^0 + 0x^1 + \ldots + 0x^{n-1} \\ D(x^1) &= 1 = 1x^0 + 0x^1 + \ldots + 0x^{n-1} \\ D(x^2) &= 2x = 0x^0 + 2x^1 + \ldots + 0x^{n-1} \\ &\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ D(x^n) &= nx^{n-1} = 0x^0 + 0x^1 + \ldots + nx^{n-1}. \end{aligned}$$

Αρα, $$\varphi(D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

2. Μη Ιδιάζοντες πίνακες. Αλλαγή βάσεως. Ο πίνακας ενός μη ιδιάζοντος μετασχηματισμού, (μετασχηματισμού δηλαδή, που είναι ένα-ένα και επί), καλείται ***μη ιδιάζων*** [non singular] (ή ***αντιστρέψιμος***, ή ***ομαλός***) πίνακας. Ο πίνακας αυτός, είναι ένας τετραγωνικός πίνακας που έχει αντίστροφο.

Ανάστροφος ενός πίνακα $A = (\alpha_{ij})$ είναι ο πίνακας $A^t = (\alpha_{ji})$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 5. Η απεικόνιση t που ορίζεται από την σχέση $A \mapsto A^t$ είναι ένα προς ένα και επί. (Ισομορφισμός είναι ;).

Σε κάθε m×n πίνακα A οι γραμμές του, θεωρούμενες ως στοιχεία του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^n$ παράγουν ένα υπόχωρο του χώρου αυτού, ο οποίος καλείται και χώρος των γραμμών. Το ίδιο συμβαίνει και με τις κολώνες του A. Εδώ, έχουμε την παραγωγή ενός υπόχωρου του $\mathbb{R}^m$, τον χώρο των στηλών.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1. Έστω ο n×n πίνακας $A = (\alpha_{ij})$, i, j = 1, . . . ,n. Θεωρούμε τα διανύσματα $a_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in})$. Το σύνολο $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, ανν ο A είναι μη ιδιάζων.

Απόδειξη. α) Ο A είναι μη ιδιάζων. Τότε και η απεικόνιση, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ που έχει τον A ως πίνακα, και που ορίζεται από τις σχέσεις $e_i f = a_i$, είναι ένα-ένα.

Το σύνολο $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ είναι κατά συνέπεια γραμμικά ανεξάρτητο.

β) Το σύνολο $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Τότε, η απεικόνιση f είναι ένα-ένα, και συνεπώς αντιστρέψιμη (βλέπε και πρόταση 10, σελ. 25).

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ενας n×n πίνακας A είναι μη ιδιάζων, ανν detA = 0. (Βλέπε Θεώρημα, σελ. 33)

ΠΡΟΤΑΣΗ 2. Θεωρούμε και πάλι τον n×n πίνακα A, και έστω b_j, j = 1, . . . ,n τα διανύσματα $b_j = (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{nj})$. Το σύνολο $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο, ανν το σύνολο $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο.

Απόδειξη. Είναι συνέπεια του προηγούμενου πορίσματος, και του ότι $\det A = \det(A^t)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3. Κάθε μη ιδιάζων n×n πίνακας A, είναι δυνατόν να θεωρηθεί ως πίνακας αλλαγής βάσεως. Ο αντίστροφός του πίνακας είναι ο $A^{-1} = \left(\dfrac{A_{ji}}{\det A}\right)$= adjA/detA.

Απόδειξη. Ο πρώτος ισχυρισμός έπεται από το ότι ο μετασχηματισμός, που έχει πίνακα τον A, μετασχηματίζει σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων, σε σύνολο με το ίδιο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων. Ο τύπος του αντιστρόφου πίνακος του πίνακα A, έπεται από το γεγονός ότι $\det A \det A^{-1} = \det(A A^{-1})$ και τον τύπο του Cauchy (σελ. 35).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7. Στον $\mathbb{R}^3$ δίδονται οι βάσεις

$$\bar{x}: \{(1,1,-1), (1,-1,0), (0,1,2)\} \text{ και } \bar{y}: \{(1,2,1), (2,0,-1), (-2,3,2)\}$$

Να βρεθεί ο πίνακας αλλαγής της βάσεως του χώρου.

Θέλουμε να βρούμε τον πίνακα P ενός $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ο οποίος να μετασχηματίζει την βάση $\bar{x}$ στην βάση $\bar{y}$. Ο πίνακας του f, εκπεφρασμένος στις βάσεις $\bar{x}$, $\bar{y}$, βρίσκεται, αν εκφράσουμε τα στοιχεία της βάσεως $\bar{y}$ γραμμικά, από τα στοιχεία της βάσεως $\bar{x}$.

Είναι: $\vec{y}_1 = (1, 2, 1) = 1\,\vec{x}_1 + 0\,\vec{x}_2 + 1\,\vec{x}_3$

$\vec{y}_2 = (2,0,-1) = 1\,\vec{x}_1 + 1\,\vec{x}_2 + 0\,\vec{x}_3$ και $\vec{y}_3 = (-2,3,2) = 0\,\vec{x}_1 - 2\,\vec{x}_2 + 1\,\vec{x}_3$

Ο πίνακας P του μετασχηματισμού f της βάσεως $\bar{x}$ σε μία βάση $\bar{y}$, είναι ο

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι, αν X καλέσουμε τον πίνακα που σχηματίζουν τα διανύσματα της βάσεως $\bar{x}$, λαμβανόμενα ως γραμμές του X, και Y τον πίνακα που σχηματίζουν τα διανύσματα της βάσεως $\bar{y}$, λαμβανόμενα ως γραμμές του Y, ισχύει τότε ότι,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad Y = PX.$$

Τούτο έπεται από την γενική μορφή του συστήματος $\vec{y}_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}\vec{x}_k$, i = 1, . . . ,n, αν εισάγουμε τον εξής νέο συμβολισμό $\begin{pmatrix} \vec{y}_1 \\ \vdots \\ \vec{y}_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vdots \\ \vec{x}_n \end{pmatrix}$ με $P = (p_{ij})$, για το προηγούμενο σύστημα. Εύκολα βλέπουμε τώρα, ότι, $\begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vdots \\ \vec{x}_n \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} \vec{y}_1 \\ \vdots \\ \vec{y}_n \end{pmatrix}$. (Στο εξής, θα παραλείπουμε τα βέλη πάνω από τα διανύσματα). Επεκτείνουμε τις πράξεις επί των πινάκων, και στους θεωρούμενους "πίνακες", τα στοιχεία των οποίων είναι διανύσματα.

Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό αυτό, μπορούμε εύκολα να βρούμε την έκφραση του τυχόντος διανύσματος z στη βάση $\bar{y}$, όταν το έχουμε στη βάση $\bar{x}$.

Αν $z = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i$, γράφουμε την σχέση αυτή στην μορφή,

$$z = (\gamma_1 \quad \cdots \quad \gamma_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\gamma_1 \quad \cdots \quad \gamma_n)P^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Μετά την εκτέλεση των σημειουμένων πράξεων, έχουμε το z εκφρασμένο στη νέα βάση $\bar{y}$.

Επανερχόμεθα στο παράδειγμά μας. Είναι,

$$(P)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Άρα και

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ισότητα, που γράφεται ισοδύναμα και,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$ που είναι μία άλλη γραφή του συστήματος

$$\begin{aligned} x_1 &= -y_1 + 2y_2 + y_3 \\ x_2 &= -y_1 - y_2 - y_3 \\ x_3 &= 2y_1 - 2y_2 - y_3\ . \end{aligned}$$

Το σύστημα αυτό, δίδει τις ισότητες μέσω των οποίων από την βάση $\overline{y}$ πηγαίνουμε στη βάση $\overline{x}$. Ο πίνακας του μετασχηματισμού αυτού, είναι ο P^{-1}.

Έστω, τώρα, ένα διάνυσμα $z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$ εκφρασμένο στη βάση $\overline{x}$. Για να βρούμε την νέα του έκφραση στη βάση $\overline{y}$, αρκεί να εκτελέσουμε τις πράξεις

$$z = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 7y_1 - 6y_2 - 4y_3\,.$$

που είναι και η ζητούμενη έκφραση του z.

3. Ισοδυναμία - ομοιότης πινάκων. Όπως είδαμε, ο πίνακας φ(T), που αντιστοιχεί στην γραμμική απεικόνιση T: **U** → **V**, εξαρτάται από την εκλογή των βάσεων των χώρων **U** και **V** αντίστοιχα. Θα πρέπει βέβαια, όταν αλλάζουν οι βάσεις των χώρων αυτών, οι λαμβανόμενοι πίνακες να παριστούν την ίδια απεικόνιση.

Θεωρούμε κατ' αρχήν τις βάσεις $\overline{u}$ και $\overline{v}$ των χώρων **U** και **V** αντίστοιχα. Ο πίνακας A της απεικονίσεως T, δίδεται από το σύστημα,

$$\begin{aligned} u_1T &= \alpha_{11}v_1 + \alpha_{12}v_2 + \ \dots\ + \alpha_{1n}v_n \\ &\ \ \dots \qquad \dots \\ u_mT &= \alpha_{m1}v_1 + \alpha_{m2}v_2 + \ \dots\ + \alpha_{mn}v_n \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τον συμβολισμό, που εισάγαμε πιο πάνω, το σύστημα αυτό γράφεται

$$\begin{pmatrix} u_1T \\ u_2T \\ \vdots \\ u_mT \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

όπου A = (α_{ij}), i = 1, . . . ,m και j = 1, . . . ,n ένας m×n πίνακας που αντιστοιχεί στον μετασχηματισμό T, εκφρασμένος στις βάσεις $\overline{u}$ και $\overline{v}$. Είναι λοιπόν, A = $(T : \overline{u}, \overline{v})$.

Έστω, τώρα, $z = \sum_{i=1}^{m} \xi_i u_i$ ένα τυχών διάνυσμα του χώρου **U**. Η εικόνα του, είναι το $zT = \sum_{i=1}^{m} \xi_i (u_i)T = \begin{pmatrix} \xi_1 & \cdots & \xi_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1T \\ \vdots \\ u_mT \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \cdots & \xi_m \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$.

Υποθέτουμε, τώρα, ότι αλλάζουμε τις βάσεις $\overline{u}$ και $\overline{v}$ σε $\overline{u}'$ και $\overline{v}'$ αντίστοιχα.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{U} \arrow[r, "T"] & \mathbf{V} \\ \overline{u} \arrow[r, "A"] & \overline{v} \arrow[d, "Q^{-1}"] \\ \overline{u}' \arrow[u, "P"] \arrow[r, "B"'] & \overline{v}' \end{tikzcd}$$

Θα βρούμε τον τρόπο με τον οποίο ο πίνακας A αλλάζει, έτσι ώστε, να είναι πίνακας της ιδίας απεικονίσεως T. Για τον σκοπό αυτό, χρησιμοποιούμε το διπλανό διάγραμμα, το οποίο βέβαια, πρέπει να είναι αντιμεταθετικό.

Εδώ, A και B είναι οι πίνακες

A = $(T : \overline{u}, \overline{v})$ και B = $(T : \overline{u}', \overline{v}')$

P και Q είναι οι πίνακες αλλαγής των βάσεων.

Για να είναι το διάγραμμα αντιμεταθετικό, θα πρέπει να ισχύει ότι, $B = PAQ^{-1}$.

Πράγματι, έχουμε τις ισότητες:

$$\begin{pmatrix} u_1T \\ u_2T \\ \vdots \\ u_mT \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Απεικόνιση της βάσης $\overline{u}$ στη στη βάση $\overline{v}$. Πίνακας $A = (T : \overline{u}, \overline{v})$

$$\begin{pmatrix} u'_1T \\ u'_2T \\ \vdots \\ u'_mT \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix}$$

Απεικόνιση της βάσης $\overline{u}'$ στη βάση $\overline{v}'$. Πίνακας $B = (T : \overline{u}', \overline{v}')$

$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ \vdots \\ u'_m \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

Αλλαγή βάσης από $\overline{u}$ σε $\overline{u}'$. P = Πίνακας αλλαγής βάσης.

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Αλλαγή βάσης από $\overline{v}$ σε $\overline{v}'$. Q = Πίνακας αλλαγής βάσης.

Είναι, λοιπόν, και

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix}$$

Αλλαγή βάσης από $\overline{v}'$ σε $\overline{v}$. Q^{-1} = πίνακας αλλαγής βάσης.

Εχουμε συνεπώς,

$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ \vdots \\ u'_m \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \text{ οπότε και } \begin{pmatrix} u'_1T \\ u'_2T \\ \vdots \\ u'_mT \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u_1T \\ u_2T \\ \vdots \\ u_mT \end{pmatrix} = PA \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = PAQ^{-1} \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix}$$

άρα και,

$$\begin{pmatrix} u'_1T \\ u'_2T \\ \vdots \\ u'_mT \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix} = PAQ^{-1} \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix} \quad \text{οπότε και } B = PAQ^{-1}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8. Θεωρούμε τους χώρους $\mathbf{V} = L\{(1,-1,0), (0,1,1)\}$ και $\mathbf{W} = L\{(1,0,1,0), (1,1,0,0), (1,-1,0,1)\}$, και την απεικόνιση T, γιά την οποία είναι,

$(1,-1,0)T = 1(1,0,1,0)+0(1,1,0,0)+2(1,-1,0,1)$

$(0,1,1)T = 3(1,0,1,0)+1(1,1,0,0)+1(1,-1,0,1)$

Ο πίνακας A του μετασχηματισμού T ως προς τις βάσεις $\overline{v}$ και $\overline{w}$, είναι ο

$$A = (T : \overline{v}, \overline{w}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Θεωρούμε τις νέες βάσεις $\overline{v}' = \{(1,0,1), (1,1,2)\}$ και $\overline{w}' = \{(0,1,1,-1), (2,0,0,1), (1,0,-1,1)\}$.
Είναι, $(1,0,1) = 1(1,-1,0)+1(0,1,1)$ και $(0,1,1,-1) = 1(1,0,1,0)+0(1,1,0,0)-1(1,-1,0,1)$
$(1,1,2) = 1(1,-1,0)+2(0,1,1)$ $(2,0,0,1) = 0(1,0,1,0)+1(1,1,0,0)+1(1,-1,0,1)$
$(1,0,-1,1) = -1(1,0,1,0)+1(1,1,0,0)+1(1,-1,0,1)$.
Οι πίνακες P και Q αλλαγής των βάσεων στούς χώρους **V** και **W** είναι αντ. Οι

$$P=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix} \text{ και } Q=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&0&1\\-1&1&-1\end{pmatrix}. \text{ Είναι } Q^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&-1\end{pmatrix}.$$

$$\text{Αρα } B=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2\\3&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&7&-8\\-6&11&-13\end{pmatrix} \text{ είναι ο πίνακας του}$$

μετασχηματισμού T, ως προς τις νέες βάσεις $\overline{v}'$ και $\overline{w}'$ $B = (T:\overline{v}',\overline{w}')$.

Ορισμός. Δύο πίνακες Α και Β καλούνται ισοδύναμοι (equivalent), ανν υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες P και Q τέτοιοι ώστε, $B = PAQ^{-1}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Αν $T\in\mathscr{L}(\mathbf{U})$, και από την βάση $\overline{u}$ μεταβαίνουμε στην βάση $\overline{u}'$ με πίνακα αλλαγής βάσεως τον P, είναι τότε, $B = PAP^{-1}$. ($A = (T:\overline{u},\overline{u})$ και $B = (T:\overline{u}',\overline{u}')$).

Ορισμός. Δύο πίνακες Α και Β καλούνται όμοιοι (similar), ανν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P, τέτοιος ώστε, $B = PAP^{-1}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Οι σχέσεις ισοδυναμίας και ομοιότητος δύο πινάκων, είναι σχέσεις ισοδυναμίας.

3. Στοιχειώδεις πίνακες. ***Μονόμετρος*** (ή ***βαθμοτός***) πίνακας [scalar matrix] καλείται κάθε τετραγωνικός πίνακας Α, του οποίου όλα τα διαγώνια στοιχεία $\alpha_{ii} = \alpha\in\mathbb{R}$, i = 1, . . . ,n, ενώ,. $\alpha_{ij} = 0$, γιά $i\neq j$ με $i,j=1, \ldots ,n$ Το σύνολο των μονομέτρων πινάκων, είναι φανερά ισόμορφο του σώματος $\mathbb{R}$. Αν $x\in\mathbb{R}^n$, είναι τότε και, xA = αx.

Διαγώνιος πίνακας καλείται ένας τετραγωνικός πίνακας, του οποίου τα μόνα μη μηδενικά στοιχεία, βρίσκονται επί της κυρίας διαγωνίου του. Ένα διαγώνιο πίνακα, θα τον συμβολίζουμε με $D(\alpha_{11},\alpha_{22}, \ldots ,\alpha_{nn})$. Είναι,

$xD(\alpha_{11},\alpha_{22}, \ldots ,\alpha_{nn}) = D(\alpha_{11}x_1,\alpha_{22}x_2, \ldots ,\alpha_{nn}x_n)$, όπου, $x=(x_1,x_2, \ldots ,x_n)\in\mathbb{R}^n$. Το άθροισμα και το γινόμενο δύο διαγωνίων πινάκων, είναι πάλι διαγώνιος πίνακας. Ισχύει μάλιστα ότι $D^k(\alpha_{11},\alpha_{22}, \ldots ,\alpha_{nn}) = D(\alpha_{11}^k,\alpha_{22}^k, \ldots ,\alpha_{nn}^k)$.

Κάτω τριγωνικός λέγεται ένας τετραγωνικός πίνακας Α, όταν τα α_{ij} στοιχεία του, που βρίσκονται άνω της κυρίας διαγωνίου, είναι όλα ίσα με μηδέν. Το άθροισμα και το γινόμενο δύο κάτω τριγωνικών πινάκων, είναι πάλι κάτω τριγωνικός πίνακας.

Αντίστοιχα, ορίζονται οι ***άνω τριγωνικοί*** πίνακες.

Οπως είδαμε, ανάστροφος [transposed] του $A = (\alpha_{ij})$, είναι ο $A^t = (\alpha_{ji})$.

Ισχύει ότι, $(AB)^t = B^tA^t$.

Συμμετρικός λέγεται ο τετραγωνικός πίνακας Α, ανν έχουμε ότι $A = A^t$.

Αντισυμμετρικός λέγεται ο τετραγωνικός πίνακας A ανν $-A = A^t$. Τα στοιχεία που βρίσκονται επι της κυρίας διαγωνίου ενός αντισυμμετρικού πίνακα A, είναι, υποχρεωτικά, ίσα με μηδέν.

Ασκήσεις. 1) Να δείξετε ότι, για τυχόντα πίνακα A ο πίνακας AA^t είναι συμμετρικός.
2) Να δείξετε ότι, κάθε τετραγωνικός πίνακας γράφεται ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα.
3) Να δείξετε ότι, το γινόμενο δύο συμμετρικών πινάκων είναι συμμετρικός πίνακας ανν ο πολλαπλασιασμός είναι αντιμεταθετικός.

Ένας ***Στοιχειώδης πίνακας του πρώτου είδους***, είναι ο διαγώνιος πίνακας $D_i(\lambda)$ που έχει $\alpha_{kk} = 1$, για k ≠ i, και $\alpha_{ii} = \alpha$. Το γινόμενο $D_i(\alpha)A$ δίδει έναν πίνακα A΄, που είναι ίδιος με τον A, πλην της i γραμμής του a'_i που ισούται με λa_i. Το γινόμενο $A D_i(\alpha)$ δίδει έναν πίνακα A΄, που είναι ίδιος με τον A, πλην της i κολώνας του b'_i που ισούται με λb_i. Για παράδειγμα, αν ο A είναι ένας 2×3 πίνακας και τον πολλαπλασιάσουμε από αριστερά με τον 2×2 (υποχρεωτικά) πίνακα $D_2(\lambda)$ θα έχουμε ότι,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \lambda\alpha_{21} & \lambda\alpha_{22} & \lambda\alpha_{23} \end{pmatrix}$$

Ο $D_i(\lambda)$ είναι αντιστρέψιμος, και ο αντίστροφός του, είναι ο $D_i(\lambda^{-1})$.

Ένας ***Στοιχειώδης πίνακας του δευτέρου είδους***, είναι ένας τετραγωνικός πίνακας P_{ij}, [permutation matrix] του οποίου όλα τα στοιχεία είναι μηδενικά, πλήν των στοιχείων $\alpha_{kk} = 1$ για k ≠ i και k ≠ j, και των $\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = 1$. Το γινόμενο $P_{ij}A$ δίδει έναν πίνακα A΄, που είναι ίδιος με τον A, πλην του ότι η i γραμμή του a'_i είναι ίδια με την a_j και η $a'_j = a_i$. Το γινόμενο $A P_{ij}$ δίδει έναν πίνακα A΄, που είναι ίδιος με τον A, πλην του ότι η i κολώνα του b'_i είναι ίδια με την b_j και η $b'_j = b_i$. Για παράδειγμα, αν ο A είναι ένας 2×3 πίνακας και τον πολλαπλασιάσουμε από δεξιά με τον 3×3 (υποχρεωτικά) πίνακα P_{23}, θα έχουμε ότι,

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

Ο P_{ij} είναι συμμετρικός πίνακας, και αντιστρέψιμος,.

Αντίστροφός του είναι ο πίνακας $P_{ji} = P_{ij}^{\,t}$.

Ένας ***Στοιχειώδης πίνακας του τρίτου είδους***, είναι ένας τετραγωνικός πίνακας $S_{ij}(\lambda)$, του οποίου όλα τα στοιχεία είναι μηδενικά, πλην των διαγωνίων στοιχείων $\alpha_{kk} = 1$. Εχει επίσης $\alpha_{ij} = \lambda$. Το γινόμενο $S_{ij}(\lambda)A$ δίδει έναν πίνακα A΄, που είναι ίδιος με τον A, πλην του ότι η i γραμμή του $a'_i = \lambda a_i + a_j$. Το γινόμενο $A S_{ij}(\lambda)$ δίδει έναν πίνακα A΄, που είναι ίδιος με τον A, πλην του ότι η j κολώνα του b'_j είναι ίση με την $b'_j = \lambda b_i + b_j$. Για παράδειγμα, αν ο A είναι ένας 2×3 πίνακας και τον πολλαπλασιάσουμε από δεξιά με τον 3×3 (υποχρεωτικά) πίνακα $S_{23}(\lambda)$, θα έχουμε ότι,

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \lambda\alpha_{12}+\alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \lambda\alpha_{22}+\alpha_{23} \end{pmatrix}$$

Ο $S_{ij}(\lambda)$ είναι αντιστρέψιμος, πίνακας. Αντίστροφός του είναι ο πίνακας $S_{ij}(\lambda^{-1})$.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Αν Ε στοιχειώδης πίνακας, τότε ο πίνακας ΕΑ (αντ. ο ΑΕ) έχει τον ίδιο χώρο γραμμών (αντ. στηλών) με τον πίνακα Α.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4. Έστω Α n×n μη ιδιάζων πίνακας Α. Τότε, πολλαπλασιάζοντας τον Α από αριστερά (αντ. δεξιά) με κατάλληλους στοιχειώδεις πίνακες, μπορούμε να τον μετατρέψουμε στον μοναδιαίο πίνακα Ι.
Απόδειξη. Δίδουμε τον σχετικό αλγόριθμο, γιά την περίπτωση n = 2.
Έστω, λοιπόν, ο 2×2 πίνακας

$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$. Μηδενίζουμε πρώτα τις θέσεις

12 και 21. Την θέση 12 την μηδενίζουμε, αν πολλαπλασιάσουμε επί τον

$S_{12}\left(-\dfrac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Πράγματι, $\begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} - \dfrac{\alpha_{12}\alpha_{21}}{\alpha_{22}} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$.

Στη συνέχεια μηδενίζουμε την θέση 21 πολλαπλασιάζοντας επί $S_{21}\left(-\dfrac{\alpha_{21}}{\alpha}\right)$, όπου

$\alpha = \alpha_{11} - \dfrac{\alpha_{12}\alpha_{21}}{\alpha_{22}}$. Είναι,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{\alpha_{21}}{\alpha} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha_{22} \end{pmatrix}.$$

Εύκολα, τώρα, τον πίνακα αυτόν, τον μετατρέπουμε σε μοναδιαίο, πολλαπλασιάζοντας πρώτα επί $D_1(\alpha^{-1})$, και μετά επί $D_2(\alpha_{22}^{-1})$. Είναι, τώρα, $D_2D_1S_{21}S_{12}A = I$.

Δείξαμε, λοιπόν, ότι ο τυχών αντιστρέψιμος τετραγωνικός πίνακας Α, πληροί κάποια σχέση της μορφής $E_1, E_2, \ \dots\ , E_nA = I$. Άρα, $A^{-1} = E_n^{-1}, E_{n-1}^{-1}, \ \dots\ , E_1^{-1}$. Μπορούμε συνεπώς, να βρούμε και κατ' αυτόν τον τρόπο τον αντίστροφο A^{-1} πίνακα, τυχόντος αντιστρέψιμου πίνακα Α.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ο τυχών αντιστρέψιμος πίνακας Α, γράφεται ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.
Απόδειξη. Αρκεί να αντιστρέψουμε την σχέση $A^{-1} = E_n^{-1}, E_{n-1}^{-1}, \ \dots\ , E_1^{-1}$, οπότε έχουμε την $A = E_1, E_2, \ \dots\ , E_n$.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Αν Α, Β δύο n×n πίνακες, τότε det(AB) = (detA)(detB). (Βλέπε σελ. 32)
Απόδειξη. 1) Αν ο Α δεν είναι αντιστρέψιμος πίνακας, τότε ο πυρήνας του μετασχηματισμού Τ, που αντιστοιχεί στον πίνακα Α, περιέχει και στοιχεία x του χώρου, διαφορετικά από το μηδέν. Έστω ένα τέτοιο x∈KerT. Είναι, τότε, xT = 0, άρα και xA = 0, οπότε, και x(AB) = 0, άρα και ο ΑΒ είναι μη αντιστρέψιμος πίνακας. 2) Εστω ότι ο Α είναι αντιστρέψιμος. Τότε παρίσταται, ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων. Κάθε ένας από τους στοιχειώδεις αυτούς πίνακες, πολλαπλασιάζει από δεξιά τον πίνακα, που θα βρίσκεται στη θέση του Β. Αρκεί,

λοιπόν, να δείξουμε πρώτα, ότι det(EB) = (detE)(detB). Τούτο έπεται εύκολα, για κάθε είδους στοιχειώδη πίνακα. Στη συνέχεια, επαγωγικά αποδεικνύεται ότι,

$$\det(E_1E_2 \cdots E_nB) = (\det E_1)\det(E_2) \cdots \det(E_n)\det(B).$$

4. Τάξη (rank) *πίνακος.* Θα δείξουμε ότι, οι παρακάτω έννοιες που συνδέονται με τον όρο "τάξη", δηλώνουν όλες, ουσιαστικά το ίδιο πράγμα.

1) ***Τάξη γραμμών*** του πίνακα A, είναι η διάσταση του χώρου που παράγουν οι γραμμές του πίνακα A.

2) ***Τάξη στηλών*** του πίνακα A, είναι η διάσταση του χώρου που παράγουν οι κολώνες του πίνακα A.

3) Η τάξη της μεγαλύτερης μη μηδενικής ορίζουσας, που περιέχεται μέσα στον πίνακα A.

4) Η Τάξη της απεικονίσεως T, που έχει για πίνακα τον A.

Στην περίπτωση, που ο A είναι μη ιδιάζων τετραγωνικός πίνακας, φανερά οι παραπάνω έννοιες ταυτίζονται. Φανερά, όλες αυτές οι έννοιες ταυτίζονται, και στην περίπτωση του μηδενικού πίνακα.

Για την γενικά περίπτωση ενός m×n πίνακα A, παρατηρούμε ότι, από τον ορισμό του A, $L(a_1, a_2, \dots, a_n) = \mathrm{Im}T$.

Άρα ρ(T) = r(A), όπου $r(A) = \dim L(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Όπως παρατηρήσαμε πιο πάνω, ο δεξιά (αντ. αριστερά) πολλαπλασιασμός του πίνακα A επί έναν m×m (αντ. n×n) στοιχειώδη πίνακα E, δεν μεταβάλλει τον χώρο γραμμών (αντ. στηλών) του πίνακα A. Μπορούμε συνεπώς, τον πίνακα A, να τον μετατρέψουμε σε έναν ισοδύναμο πίνακα ***κλιμακωτής*** (ή ***ανοιγμένης)*** [echelon form] μορφής. Κλιμακωτή ως προς τις γραμμές, είναι εκείνη η μορφή του πίνακα A, του οποίου οι γραμμές a_i, i = 1, . . . ,m είναι έτσι ώστε: α) Η πρώτη μη μηδενική κολώνα έχει το στοιχείο $\alpha_{ij} = 1$ και όλα τα στοιχεία, που βρίσκονται κάτω απ' αυτό, $\alpha_{ik} = 0$, k > j. β) Κάθε μηδενική γραμμή, βρίσκεται κάτω από κάθε μη μηδενική γραμμή. γ) Το πρώτο στοιχείο μη μηδενικής γραμμής είναι η μονάς, και όλα τα κάτω απ' αυτήν στοιχεία είναι μηδενικά.

Αντίστοιχα, για την κλιμακωτή μορφή ως προς τις κολώνες.

ΘΕΩΡΗΜΑ. Η διάσταση του χώρου γραμμών ενός πίνακα A, ισούται με το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών της κλιμακωτής μορφής ως προς τις γραμμές, του πίνακα A.
Απόδειξη. Κατ' αρχήν, η διάσταση του χώρου γραμμών του A, ισούται με την διάσταση του χώρου γραμμών του A΄. Αρκεί συνεπώς να δείξουμε ότι, τα μη μηδενικά διανύσματα a_i, i = 1, . . . ,k της κλιμακωτής μορφής, είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
Για τα $a_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in})$, ισχύει ότι, για τους δείκτες $k_1 < k_2 < \dots < k_r$, και για i ≤ r, $\alpha_{ij} = 0$, αν $j < k_j$, $\alpha_{ij} = 1$ αν $j = k_j$, $\alpha_{ij} \neq 0$ αν $j > k_j$. Έστω, τώρα, $c = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ τυχόν διάνυσμα του χώρου γραμμών του A΄. Είναι τότε, $c = \sum_{i=1}^{m} \xi_i a_i$, απ' όπου έχουμε και $\gamma_j = \sum_{j=1}^{n} \xi_i \alpha_{ij}$, ∀j = 1, . . . , n. Άρα και $\gamma_j = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}\xi_i = \xi_j$. Είναι λοιπόν, και $\sum_{i=1}^{m} \xi_i a_i = 0$, ανν $\xi_i = 0$.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. 1) Ένας τετραγωνικός πίνακας A με τάξη γραμμών k, είναι ισοδύναμος προς τον A΄, ο οποίος έχει για 1 ≤ i ≤ k, $\alpha_{ii} = 1$, και όλα τα άλλα στοιχεία ίσα με μηδέν. (Περιέχει, δηλαδή, τον μοναδιαίο πίνακα k τάξεως, I_k στη θέση της άνω αριστερά γωνίας).

2) Αν η τάξη γραμμών ενός τετραγωνικού πίνακα είναι k, τότε και η τάξη στηλών αυτού είναι k.

3) Στην περίπτωση ενός m×n πίνακα, με έστω m > n, θεωρούμε αυτόν, βυθισμένο μέσα σε έναν m×m πίνακα, όπου όλα τα επιπλέον στοιχεία είναι μηδενικά. Για τον πίνακα αυτόν, ισχύουν τα προηγούμενα δύο πορίσματα.

Συμπέρασμα. Η τάξη γραμμών και η τάξη στηλών, συμπίπτουν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9. Θα βρούμε την τάξη του παρακάτω πίνακα, εκτελώντας διαδοχικούς μετασχηματισμούς, πρώτα στις γραμμές του, μέχρις ότου μεταπέσει σε κλιμακωτή μορφή, και μετά στις κολώνες του, μέχρις ότου περιλάβει στο εσωτερικό του, τον πίνακα I_k.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & -4 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/5 & -4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/5 & -4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

που είναι η κλιμακωτή μορφή. Η τάξη του πίνακα είναι 3. Στη συνέχεια, έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & -4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & -4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/5 & -4/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Γραμμικά συστήματα. Ένα γραμμικό σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους έχει την γενική μορφή:

$$\begin{array}{l} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \;\ldots\; + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \;\ldots\; + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \;\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \;\ldots\; + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \;. \end{array} \qquad (1)$$

Ισοδύναμα, γράφουμε το σύστημα αυτό και στη μορφή AX = B, όπου A = (α_{ij}) ένας m×n πίνακας, καλούμενος και ***πίνακας των συντελεστών*** του συστήματος, X = (x_j) ένας n×1 ***πίνακας των αγνώστων,*** και B = (β_i) ο ***πίνακας των σταθερών όρων***. Αν ο B = 0, το σύστημα καλείται ***ομογενές***. Με Au θα συμβολίζουμε τον m×(n+1) πίνακα που αποτελείται από τον πίνακα A συν μία κολώνα, που είναι ο πίνακας B. Ο πίνακας αυτός, καλείται ***επαυξημένος πίνακας*** [augmented matrix]. Ταυτίζουμε τους πίνακες X και B αντ. με τα διανύσματα x και b εν $\mathbb{R}^n$ αντ. εν $\mathbb{R}^m$. Κάθε διάνυσμα x, που πληροί τις ισότητες (1) καλείται ***λύση*** του συστήματος. Ένα σύστημα, που δεν έχει λύση, λέγεται ***αδύνατο***. Στην περίπτωση αυτή, λέμε ότι, οι εξισώσεις (1) είναι ***ασύμβατες***.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5. Το σύνολο των λύσεων του ομογενούς συστήματος ΑΧ = 0 αποτελεί υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$.
Απόδειξη. Αν x και y λύσεις του συστήματος ΑΧ = Β, τότε έχουμε ότι,

$$A(\lambda x+\xi y) = \lambda Ax+\xi Ay = \lambda b+\xi b = (\lambda+\xi)b.$$

Το λx+ξy αποτελεί συνεπώς λύση ανν b = 0.

Έστω **W** ο υπόχωρος των λύσεων του ομογενούς συστήματος. Η λύση, τώρα, του συστήματος ΑΧ = Β με $B \neq 0$, συνδέεται με την εύρεση του **W**. Πράγματι, αν x_p είναι μια λύση του συστήματος (1) και x_h οιαδήποτε λύση του ομογενούς, τότε και η $x_p + x_h$ είναι λύση του (1), μια και είναι, $A(x_p + x_h) = Ax_p + Ax_h = Ax_p = b$. Επιπλέον, κάθε λύση x_0 του συστήματος, μπορεί να γραφεί ως άθροισμα $x_p + x_h$ για κατάλληλο διάνυσμα x_p. Πράγματι από την $A(x_0 - x_p) = Ax_0 - Ax_p = b - b = 0$, βλέπουμε ότι, η διαφορά $x_h = x_0 - x_p \in \mathbf{W}$. Η σχέση αυτή μας δείχνει ακόμα και ότι, $x_0 \approx x_p(\mathrm{mod}\mathbf{W})$.

Δείξαμε, λοιπόν, το

ΘΕΩΡΗΜΑ. Το x αποτελεί λύση του (1), ανν $x_0 \approx x_p(\mathrm{mod}\mathbf{W})$.

Η λύση x_p καλείται ***ειδική λύση*** [particular solution] του συστήματος (1) εν $\mathbb{R}^n$ εν αντιθέσει προς την x = x_p+**W**, που είναι η ***γενική λύση*** [general solution] του (1).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 6. Έστω η απεικόνιση $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ με πίνακα Γ. Οπως είδαμε, η ισότητα y = T(x), γράφεται ισοδύναμα και y = xΓ (βλέπε Παρατήρηση 4, σελ. 40). Η σχέση αυτή, δίδει και την $y^t = \Gamma^t x^t$, όπου τα διανύσματα x, y θεωρηθούν ως 1×n και 1×m πίνακες αντίστοιχα. Αν, τώρα, θέσουμε Y = y^t, A = Γ^t, και X = x^t, λαβαίνουμε την ισότητα των πινάκων, Y = AX. Το σύστημα (1) συνεπώς, δηλώνει εκείνα τα διανύσματα x, που απεικονίζονται μέσω της T στο $b\in \mathbb{R}^m$. KerT είναι ο υπόχωρος λύση, του ομογενούς συστήματος του (1).

Ορισμός. ***Ισοδύναμα*** λέγονται δύο συστήματα, όταν έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 7. Ο πίνακας Au χαρακτηρίζει απολύτως ένα σύστημα.

Συμπεράσματα. α) Αν οι k γραμμές του πίνακα Au ενός συστήματος, εξαρτώνται γραμμικά από τις m–k γραμμές του, τότε τα συστήματα, που έχουν πίνακες Au και Au΄ όπου ο Au΄ δεν περιέχει γραμμικά εξαρτημένες γραμμές, είναι ισοδύναμα.

β) Σε ισοδύναμα συστήματα αντιστοιχούν ισοδύναμοι πίνακες Au.

γ) Οι στοιχειώδεις πράξεις επί των γραμμών του πίνακα Au ενός συστήματος, οδηγούν σε ισοδύναμο σύστημα. Κάθε σύστημα λοιπόν, μπορεί να λάβει την κλιμακωτή του μορφή.

δ) **W** = KerT.

ε) dim**W** = n–dim(ImT) = n–r(A). (r(A) = r, η τάξη [rank] του A)

στ) Το σύστημα ΑΧ = Β έχει ***μοναδική λύση*** x, ανν KerT = 0. Στην περίπτωση αυτή, $\det(A) \neq 0$, και η κλιμακωτή μορφή του πίνακα Au, έχει ως τελευταία μη μηδενική γραμμή, την $(0,0, \ldots, x_n, \beta_m)$. Είναι, λοιπόν, και r(Au) = r(A).

ζ) Αν r(Au) > r(A), το σύστημα είναι ***αδύνατο***, μιά και η κλιμακωτή μορφή του πίνακα Au, θα περιέχει γραμμές του τύπου $(0,0,\ \dots\ ,0,\beta)$.

η) Αν r(Au) < r(A), το σύστημα έχει περισότερες από μία λύσεις (είναι, όπως λέμε ***αόριστο***), μια και η τελευταία μη μηδενική μορφή του κλιμακωτού πίνακα του πίνακα Au, θα περιέχει μια γραμμή της μορφής $(0,0,\ \dots\ ,x_r,\ \dots\ ,x_n,\beta_m)$.

θ) Ένα ομογενές σύστημα AX = 0 έχει λύση διαφορετική της προφανούς x = 0, (ανν **W** = {0}) ανν detA = 0, οπότε dimKerT ≠ 0, μιά και τότε, dimImT < n (Βλέπε Πρόταση 7, σελ. 24).

ι) Λύση του συστήματος AX = B (όταν αυτή υπάρχει) είναι η

$X = A^{-1}B$. Άρα, $x_j = \dfrac{\sum_{i=1}^{m}\beta_i A_{ij}}{\det A}$. (Βλέπε και πρόταση 3, σελ. 41).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 10. α) Έστω το σύστημα των εξισώσεων:

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$$
$$x_2 - x_3 + x_4 = 0.$$

Το σύστημα είναι ομογενές. Έχει δύο εξισώσεις και τέσσερεις αγνώστους. Είναι λοιπόν, n = 4 και r = 2. Επίσης, dim **W** = n–r = 2. Τα διανύσματα x_1 = (0,0,1,1) και x_2 = (2,–1,–1,0) αποτελούν μία βάση του χώρου των λύσεων **W** του συστήματος. Άρα λύση του συστήματος, αποτελεί κάθε διάνυσμα της μορφής $x = \alpha x_1 + \beta x_2$.

β) Του ομογενούς συστήματος

$$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 = 0$$
$$\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 = 0$$

το $x = (x_1, x_2, x_3)$ όπου

$$x_1 = \begin{vmatrix}\alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{23}\end{vmatrix} \quad x_2 = \begin{vmatrix}\alpha_{13} & \alpha_{11}\\ \alpha_{23} & \alpha_{21}\end{vmatrix} \quad x_3 = \begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix},$$

αποτελεί λύση. Τό σύστημα αυτό, έχει n = 3 και r = 2 και συνεπώς dim**W** = 1. Αρα, κάθε διάνυσμα της μορφής λx αποτελεί λύση του συστήματος.

γ) Για ποιές τιμές του λ, το σύστημα

$$x_1 - \lambda x_2 = 0$$
$$\lambda x_1 - x_2 = 0$$

έχει λύση x ≠ 0 ;

Λύση. Θα πρέπει η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών του συστήματος, να είναι = 0. Είναι $\Delta = -1 + \lambda^2$, με ρίζες λ =1 και λ = –1.

δ) Ποίες είναι οι λύσεις του συστήματος:

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0$$
$$-2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0\ .$$

Λύση. Η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών των αγνώστων, είναι Δ = 0. Αρα το σύστημα έχει και λύσεις ≠ 0. Επειδή r = 2 και n = 3, είναι dim**W** = 1. Μιά λύση του συστήματος, είναι η x = (1,–1,1). Άρα, **W** = L{(1,–1,1)}.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 11. α) Το σύστημα:

$$5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7$$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1$$
$$x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0$$

έχει, r(A) = 2, και r(Au) = 3. Άρα, είναι σύστημα αδύνατο.

β) Το σύστημα

$$x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1$$
$$3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4$$
$$x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 + x_5 = 0$$

έχει, r(A) = 2, και r(Au) = 2. Είναι λοιπόν, συμβατό και αόριστο. Θεωρούμε τους n–r = 3 αγνώστους, x_3, x_4, x_5 ως παραμέτρους, και λαβαίνουμε για τους υπόλοιπους 2 τις τιμές, $x_1 = \frac{5}{4} + \frac{x_3}{4} - \frac{3x_4}{4} - x_5$ και $x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{7x_3}{4} + \frac{7x_4}{4}$.

γ) Το σύστημα

$$7x_1 + 3x_2 = 2$$
$$x_1 - 2x_2 = -3$$
$$4x_1 + 9x_2 = 11$$

έχει r(A) = 2 και r(Au) = 2. Είναι, λοιπόν, συμβατό. Η λύση του συστήματος αυτού, είναι η $x_1 = -\frac{5}{17}$, $x_2 = \frac{23}{17}$.

δ) Το σύστημα

$$x_1 - 8x_2 = 3$$
$$2x_1 + x_2 = 1$$
$$4x_1 + 7x_2 = -4 \quad \text{είναι αδύνατο.}$$

Ασκήσεις. 1) Έστω ότι οι μετασχηματισμοί $A,\ B: P_3 \to P_4$ ορίζονται από τις ισότητες A(p(x)) = xp(x)–p(1) και B(p(x)) = (x–1)p(x). Να βρεθεί ο πίνακας του μετασχηματισμού 2A–B ως προς τις κανονικές βάσεις των χώρων P_3, P_4, και στη συνέχεια, ως προς τις βάσεις $\{1, x-1, (x-1)^2\}$ και $\{1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^3\}$ των P_3, P_4 αντιστοίχως.

2) Να υπολογίσετε την διάσταση του υπόχωρου του χώρου $\mathbb{R}^{2\times 2}$, που παράγεται από τους πίνακες:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & -9/2 \\ 0 & 3/4 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 0 & -3/2 \end{pmatrix}.$$

3) α) Έστω ότι η $f: \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ ορίζεται από την ισότητα:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{22} \end{pmatrix}.$$

Να δείξετε ότι η f είναι γραμμική, και να βρείτε τον πίνακα της f ως προς τις κανονικές βάσεις του χώρου $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

β) Τα ίδια για την απεικόνιση $f: \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 3}$ που ορίζεται από την ισότητα:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 \end{pmatrix}.$$

4) Να βρείτε μια αναγκαία και ικανή συνθήκη, ίνα οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \text{ και } B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} \text{ αντιμετατίθενται.}$$

(Δηλαδή, AB = BA).

5) Να υπολογίσετε την δύναμη A^n, όταν A είναι ο πίνακας:

α) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, β) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, γ) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

6) Εστω ότι η $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ ορίζεται από την σχέση:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}.$$

Να δείξετε ότι η f είναι γραμμική και να βρείτε τον πίνακά της ως προς τις κανονικές βάσεις του χώρου $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

7) Έστω **V** = L{sinx, cosx, sinxcosx, $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ }.

Τότε $\forall n$, $D^n : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, και να βρείτε τον πίνακα της D^2-2D+1 ως προς την δοσμένη βάση του **V**.