II. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Γενικά. (Βλέπε και σελ. 3). Υπενθυμίζουμε μερικές έννοιες, που αφορούν τις συναρτήσεις, α) ***Injective*** καλείται μία ένα-ένα απεικόνιση $f:U \to V$**.** Αν δηλαδή,

$$\forall x_1, x_2 \in U, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 .$$

β) ***Surjective*** καλείται κάθε επί απεικόνιση.

γ) ***Bijective*** καλείται η f, ανν είναι ένα-ένα και επί.

δ) ***Μορφισμοί*** ή ***ομομορφισμοί*** καλούνται γενικώς, οι συναρτήσεις, που διατηρούν την δομή του πεδίου ορισμού τους. ***Επιμορφισμοί,*** λέγονταιι οι μορφισμοί f, που είναι επί, δηλαδή, $f(U) = V$. ***Ενδομορφισμοί,*** εκείνοι οι μορφισμοί f, που είναι εντός, δηλαδή, $f(U) \subset V$. ***Μονομορφισμοί,*** καλούνται οι μορφισμοί, που είναι ένα-ένα απεικονίσεις. ***Ισομορφισμοί,*** καλούνται οι επιμορφισμοί που, είναι επιπλέον και μονομορφισμοί (είναι δηλαδή, bijective).

δ) ***Αυτομορφισμοί*** καλούνται οι απεικονίσεις ενός συνόλου επί τον εαυτό του. Αν οι απεικονίσεις αυτές είναι και ένα-ένα, τότε ονομάζονται ***μεταθέσεις***.

Θεωρούμε τις απεικονίσεις $f: U \to V$ και $g: f(U) \to W$. Μπορούμε να ορίσουμε την απεικόνιση $fg: U \to W$ από την σχέση, $\forall x \in U$, $x(fg) = (xf)g = g(f(x))$. Η $h = fg$ καλείται ***γινόμενο*** ή ***σύνθεση*** των f και g. Για να δηλώσουμε την σύνθεση των συναρτήσεων, χρησιμοποιούμε τα ***αντιμεταθετικά διαγράμματα:***

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & V \arrow[d, "g"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Το γινόμενο δύο συναρτήσεων, δεν ορίζεται βέβαια πάντοτε, πολύ δε περισσότερο, δεν ισχύει πάντα ότι $gf = fg$. Οποτε σημειώνουμε πάντως στα παρακάτω την σύνθεση δύο συναρτήσεων, θα υποθέτουμε, χωρίς να το λέμε, ότι αυτή ορίζεται.

Η ***αντίστροφη*** απεικόνιση f^{-1} της f, ορίζεται από την σχέση, $f^{-1}(y) = x$, όπου $y \in f(U)$, και $x \in U$ με $f(x) = y$. Φανερά, η f^{-1} είναι συνάρτηση, ανν η f είναι ένα-ένα. Θεωρούμε $\forall y \in f(U)$ το σύνολο $f^{-1}(y)$. Φανερά,

$$\bigcup_{y \in f(U)} f^{-1}(y) = U \text{ και για } y_1 \neq y_2, f^{-1}(y_1) \cap f^{-1}(y_2) = \varnothing .$$

Το σύνολο U, μερίζεται συνεπώς από τα υποσύνολα $f^{-1}(y)$, και η f εισάγει στο U την σχέση ισοδυναμίας R: $x_1, x_2 \in R \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$

Το σύνολο $f^{-1}(V_1)$, όπου $V_1 \subseteq f(U)$ ορίζεται ως το σύνολο

$$f^{-1}(V_1) = \{x \in U \mid f(x) \in V_1\}.$$

Φανερά, το σύνολο $f^{-1}(V_1)$ υπάρχει, ανεξάρτητα από το αν η f είναι ένα-ένα ή όχι.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "fg"'] & V \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "gh"] & \\ & W \arrow[r, "h"'] & Z \end{tikzcd}$$

Για τρεις απεικονίσεις που συντίθενται, ισχύει ο προσεταιριστικός νόμος. Είναι δηλαδή, $(fg)h = f(gh)$, ως προκύπτει από το διάγραμμα που εμφανίζεται παραπλεύρως.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Θεωρούμε το σύνολο των αυτομορφισμών ενός συνόλου U. Φανερά, η σύνθεση δύο αυτομορφισμών του U είναι πάντοτε δυνατή. Ορίζεται λοιπόν μέσα στο σύνολο αυτό, μία εσωτερική πράξη, ο πολλαπλασιασμός δύο στοιχείων του. Μέσα στο σύνολο των αυτομορφισμών του U, συγκαταλέγεται και η ταυτοτική απεικόνιση $1_U : U \to U$, που ορίζεται από την σχέση, $\forall x \in U, 1_U(x) = x$. Στην περίπτωση, που ο αυτομορφισμός είναι μετάθεση f, υπάρχει και η αντίστροφή της f^{-1}. Το σύνολο συνεπώς των μεταθέσεων του U, με πράξη την σύνθεση , αποτελεί ομάδα.

Θεωρούμε, τώρα, ένα σύνολο E, και μία σχέση ισοδυναμίας R πάνω σ' αυτό. Στη συνέχεια, θεωρούμε και το σύνολο πηλίκο E/R. Ορίζεται τότε, η συνάρτηση p του E επί το

E/R από την σχέση, x $\mapsto C_x$ όπου x∈E και C_x ∈E/R η κλάση ισοδυναμίας στην οποία το x ανήκει. Η p είναι καλά ορισμένη, μιά και όπως δείξαμε (βλ. σελ. 2) δεν υπάρχουν κλάσεις ισοδυναμίας με κοινά στοιχεία. Υποθέτουμε ακόμα, ότι έχουμε και κάποιο άλλο σύνολο S, και την απεικόνιση f: E → S, τέτοια ώστε, η σχέση (x,y)∈R ⇒ f(x) = f(y).

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & E/R \arrow[d, "g"] \\ & S \end{tikzcd}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ. Υπάρχει η g: E/R → S και είναι μοναδική, έτσι ώστε, το δίπλα διάγραμμα, να καθίσταται αντιμεταθετικό. Επιπλέον, αν f surjection, η g είναι bijection.

Απόδειξη. Θα πρέπει να δείξουμε ότι, f = pg. Πράγματι, από υπόθεση, η f απεικονίζει όλα τα ισοδύναμα στοιχεία του E, σε ένα στοιχείο s∈S. Αν λοιπόν ορίσουμε την g έτσι ώστε $C_x \mapsto$ s = f(x), το πιό πάνω διάγραμμα καθίσταται αντιμεταθετικό. Η g είναι ένα-ένα, γιατί αν είχαμε ότι $C_x \mapsto$ s και $C_y \mapsto$ s με $C_x \neq C_y$, οπότε και το x δεν θα είναι ισοδύναμο του y, τότε θα έπρεπε λόγω του τρόπου με τον οποίον ορίστηκε η f, να έχουμε και f(x) ≠ f(y), πράγμα αδύνατον, μία και f = pg. Δηλαδή, g(p(x)) = g(p(y)) = s ανν x ≈ y.

2. Γραμμικές απεικονίσεις. Ορισμός. Θεωρούμε τους διανυσματικούς χώρους **U**(F) και **V**(F). Η f:**U** → **V** θα καλείται γραμμική, ανν

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbf{U}, f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \quad (1).$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1. Στην περίπτωση, που το σύνολο τιμών f(**U**) της f δεν είναι διανυσματικός χώρος, τότε, η (1) μπορεί να θεωρηθεί ότι ορίζει μέσα σ' αυτό μία πρόσθεση και έναν μονόμετρο πολλαπλασιασμό. Με τις πράξεις αυτές, το f(**U**) γίνεται διανυσματικός χώρος. Η f είναι δηλαδή, ένας μορφισμός.

ΘΕΩΡΗΜΑ. Κάθε διανυσματικός χώρος **V**(F) με πεπερασμένη διάσταση, dim**V** = n, είναι ισόμορφος του χώρου των συντεταγμένων F^n.

Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση φ: **V** → F^n, που ορίζεται ως εξής: Θεωρούμε εν **V** μία βάση, έστω την $\{e_1, e_2, \ \dots \ , e_n\}$. Το τυχόν x∈**V** έχει τότε την έκφραση, x = $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ \dots \ + \lambda_n e_n$. Θέτουμε φ(x) = $(\lambda_1, \lambda_2, \ \dots \ , \lambda_n)$. Η φ είναι καλά ορισμένη και ένα-ένα, μιά και η έκφραση του x στην επιλεγείσα βάση, είναι μοναδική (βλ. πρόταση 1, σελ. 11). Εχουμε, τώρα, ότι, $\lambda x = \lambda\lambda_1 e_1 + \lambda\lambda_2 e_2 + \ \dots \ + \lambda\lambda_n e_n$, άρα και, φ(λx) = $\lambda(\lambda_1, \lambda_2, \ \dots \ , \lambda_n) =$ λφ(x). Ακόμα, έχουμε και την $\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$, όπως εύκολα αποδεικνύεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δύο διανυσματικοί χώροι **U**(F) και **V**(F) με την ίδια διάσταση, είναι ισόμορφοι.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2. Οπως είδαμε, ο ισομορφισμός φ που ορίσαμε, εξαρτάται από την επιλεγείσα βάση του χώρου **V**(F). Προτάσεις λοιπόν που αποδεικνύονται εν F^n, αν θέλουμε να έχουν γενική ισχύ εν **V**(F), θα πρέπει να δείχνουμε ότι αυτές, δεν εξαρτώνται από την επιλεγμένη βάση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1. Η εικόνα f(**U**) ⊆ **V** είναι υπόχωρος του **V**(F).

Απόδειξη. Θα πρέπει να δείξουμε ότι, το $\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \in f(\mathbf{U})$.

Πράγματι, αν $y_1, y_2 \in f(\mathbf{U})$, υπάρχουν δύο τουλάχιστον στοιχεία $x_1, x_2 \in \mathbf{U}$, με $y_1 = f(x_1)$ και $y_2 = f(x_2)$. Είναι τώρα, $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \in f(\mathbf{U})$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2. Το σύνολο **N** ⊆ **U** του οποίου εικόνα είναι το 0∈**V**, είναι υπόχωρος του **U**.

Απόδειξη. Θα πρέπει να δείξουμε ότι, $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{N} \Rightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in \mathbf{N}$. Δηλαδή, θα πρέπει να είναι, $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = 0$. Ομως, $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) = 0$.

Ορολογία και Συμβολισμοί. (Βλέπε και σελ. 4). Τις γραμμικές απεικονίσεις τις καλούν και γραμμικούς ***τελεστές***. Τους γραμμικούς τελεστές, τους συμβολίζουν συνήθως με κεφαλαία γράμματα, π.χ. T: $\mathbf{U} \to \mathbf{V}$. (Τούτο γίνεται, όταν θέλουμε να δηλώσουμε την σχέση του γραμμικού μετασχηματισμού, με τους Πίνακες). T(x) είναι η εικόνα του x∈**V**. Την εικόνα αυτή, την γράφουν όπως είδαμε, και xT. Με την χρήση του συμβολισμού αυτού, η (1) γράφεται $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)T = \lambda_1 x_1 T + \lambda_2 x_2 T$.

Το πεδίο τιμών f(**U**) συμβολίζεται και με Imf. Το Imf είναι, όπως είδαμε, υπόχωρος του **V**. Η διάσταση dimImf καλείται ***τάξη*** (rank) ρ της f. Ο υπόχωρος **N** του **U** συμβολίζεται και με Kerf (Kernel = πυρήνας) και καλείται ***πυρήνας*** της f. Και ο Kerf είναι υπόχωρος, και την διάστασή του dimKerf την καλούμε ***μηδενικότητα*** (nulity) ν της f.

Με Hom(**U**,**V**) συμβολίζουν το σύνολο των ομομορφισμών που ορίζονται στο **U** και έχουν τιμές εν **V.** Αν πρόκειται για γραμμικές απεικονίσεις, γράφουμε αντί του Hom(**U**,**V**), $\mathscr{L}(\mathbf{U},\mathbf{V})$. Αν είναι **V** = **U**, γράφουμε $\mathscr{L}(\mathbf{U})$. Το σύνολο αυτό, είναι δυνατόν να οργανωθεί σε διανυσματικό χώρο, όπως στο παρ.4, σελ. 7.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. α) Ο Ταυτοτικός μετασχηματισμός (βλέπε παρ.1 σελ.19), είναι μία γραμμική απεικόνιση. Αυτήν, την συμβολίζουν απλά, με το 1

β) Η μηδενική απεικόνιση f_0, που ορίζεται από την σχέση $\forall x \in \mathbf{U}, f_0(x) = 0$, είναι και αυτή, ένας γραμμικός μετασχηματισμός.

γ) Θεωρούμε τον χώρο των συντεταγμένων (βλέπε παρ.2, σελ.6) $\mathbb{R}^n$, και την $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, που ορίζεται από την σχέση, $p_i(X) = x_i$, όπου $X = (x_1, x_2, \ \ldots \ , x_n)$. Η p_i είναι γραμμική, και καλείται i-προβολή.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3. Η εικόνα του μηδενικού στοιχείου είναι το 0, $\forall f \in \mathscr{L}(\mathbf{U},\mathbf{V})$.

Απόδειξη. Είναι, f(x) = f(x+0) = f(x)+f(0). Ομως, και f(x)+0 = f(x). Αρα f(0) = 0, μία και το 0 είναι μοναδικό εν f(**U**).

ΠΡΟΤΑΣΗ 4. Ενας γραμμικός μετασχηματισμός T διατηρεί την έννοια της γραμμικής εξαρτήσεως.

Απόδειξη. Φανερά, αν $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_i = 0$, είναι και, $\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_i\right) T = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_i T = 0$ μιά και πάντα η εικόνα του στοιχείου 0 είναι το 0.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Αν $\mathbf{U}_1$ υπόχωρος του **U**, τότε και $f(\mathbf{U}_1)$ υπόχωρος του f(**U**).

ΠΡΟΤΑΣΗ 5. Αν $\mathbf{V}_1$ υπόχωρος του **V**, τότε και $f^{-1}(\mathbf{V}_1)$ υπόχωρος του **U**.

Απόδειξη. Εστω $x_1, x_2 \in f^{-1}(\mathbf{V}_1)$. Τότε είναι, $\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \in \mathbf{V}_1$.

Αρα και $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \in \mathbf{V}_1$. Είναι συνεπώς, $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in f^{-1}(\mathbf{V}_1)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ. Ενας γραμμικός μετασχηματισμός T: $\mathbf{U} \to \mathbf{V}$, χαρακτηρίζεται απολύτως από τις εικόνες των στοιχείων μιάς βάσεως του U. Αν δηλαδή δοθεί μιά βάση $e_1, e_2, \ \ldots \ , e_n$ του **U** και n διανύσματα $b_1, b_2, \ \ldots \ , b_n$ του **V**, υπάρχει ένας και μόνο γραμμικός μετασχηματισμός T, τέτοιος ώστε, $e_i T = b_i$, i = 1, . . . ,n,.

Απόδειξη. Εστω $e_1, e_2, \ \ldots \ , e_n$ μία βάση του **U**. Θεωρούμε, τώρα, n στοιχεία b του **V**, χωρίς να αποκλείουμε τις περιπτώσεις, μερικά απ’ αυτά, ή και όλα, να είναι μεταξύ τους ίσα, ή ακόμα και το μηδενικό στοιχείο. (Συνεπώς, το πλήθος των διαφορετικών στοιχείων b που θεωρούμε, είναι $k \le n$). Εστω αυτά τα $b_1, b_2, \ \dots \ , b_n$. Από την στιγμή που τα έχουμε έτσι καταγράψει, λαβαίνουμε υπ' όψη και την διάταξη που τους καθορίζει η αρίθμησή τους.

α) Υπαρξη του T. Εστω x τυχόν στοιχείο του **U**. Είναι τότε, $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \ \dots \ + \lambda_n e_n$. Ορίζουμε το xT ως το στοιχείο $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \ \dots \ + \lambda_n b_n$ του **V**. Αρα και $e_i T = b_i$. Θεωρούμε, τώρα, και το στοιχείο $y = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 \ \dots \ + \mu_n e_n$ του **U**. Είναι

$$\begin{aligned}(x+y)T &= ((\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \ \dots \ + \lambda_n e_n + \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 \ \dots \ + \mu_n e_n)T = \\ &\{(\lambda_1 + \mu_1)e_1 + (\lambda_2 + \mu_2)e_2 \ \dots \ + (\lambda_n + \mu_n)e_n\}T = \\ &(\lambda_1 + \mu_1)e_1 T + (\lambda_2 + \mu_2)e_2 T \ \dots \ + (\lambda_n + \mu_n)e_n T = \\ &(\lambda_1 + \mu_1)b_1 + (\lambda_2 + \mu_2)b_2 \ \dots \ + (\lambda_n + \mu_n)b_n = \\ &\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \ \dots \ + \lambda_n b_n + \lambda_1 b_1 + \mu_2 b_2 \ \dots \ + \mu_n b_n = xT+yT.\end{aligned}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}(\lambda x)T &= \lambda(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \ \dots \ + \lambda_n e_n)T = \lambda\lambda_1 b_1 + \lambda\lambda_2 b_2 \ \dots \ + \lambda\lambda_n b_n \\ &\lambda(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \ \dots \ + \lambda_n b_n) = \lambda(xT).\end{aligned}$$

Ο T είναι λοιπόν γραμμικός μετασχηματισμός.

β) Ο T είναι μοναδικός. Εστω ότι και ο T΄ οριζόταν όπως ο T. Τότε, $\forall x \in \mathbf{U}$, ισχύει ότι, $xT' = (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \ \dots \ + \lambda_n b_n)T' = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \ \dots \ + \lambda_n b_n = xT$. Αρα και $b_i = e_i T = e_i T'$, γιά όλα τα $i = 1, \dots, n$. Αρα $T = T'$.

Συμβολισμός. Το γεγονός ότι η f: $\mathbf{U} \to \mathbf{V}$ ορίζεται από τις εικόνες b_i των στοιχείων e_i της διατεταγμένης βάσεως $\{u_1, u_2, \ \dots \ , u_n\}$ του U, το συμβολίζουν με $(f{:}\overline{u}, \overline{b})$ όπου $\overline{u}$ και $\overline{b}$ τα διατεταγμένα σύνολα $\{u_1, u_2, \ \dots \ , u_n\}$ και $\{b_1, b_2, \ \dots \ , b_k\}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. α) Ο μετασχηματισμός T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, που ορίζεται $\forall x \in \mathbb{R}$ από την σχέση $(x_1, x_2, x_3)T = (x_1, x_2)$ είναι μία γραμμική απεικόνιση. Η απεικόνιση αυτή, προβάλει το σημείο $P = (x_1, x_2, x_3)$ του χώρου Ε, στο σημείο (x_1, x_2) του Ox_1x_2 (= $\mathbb{R}^2$) επιπέδου, παραλλήλως προς τον άξονα Ox_3.

Τον T θα μπορούσαμε να τον προσδιορίσουμε και μέσω των αντιστοιχιών

$(1,0,0) = e_1 \mapsto b_1 = (1,0)$, $(0,1,0) = e_2 \mapsto b_2 = (0,1)$, $(0,0,1) = e_3 \mapsto b_3 = (0,0,0)$.

Παρατηρούμε ότι, και η συνάρτηση T΄: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, που δίδεται από την σχέση $(x_1, x_2, x_3)T = (x_1, x_2, 0)$ λειτουργεί όπως ακριβώς και η T. Πρόκειται όμως για διαφορετική απεικόνιση.

β) Μία γραμμική απεικόνιση, διατηρεί τις ευθείες.

Πράγματι, αν $\vec{r} = (1-t)\vec{x} + t\vec{y}$ μία ευθεία του χώρου $\mathbb{R}^m$, τότε, φανερά, και η εικόνα της μέσω μίας γραμμικής απεικόνισης T, θα είναι μία ευθεία του $\mathbb{R}^n$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Δίδεται ο γραμμικός μετασχηματισμός T΄: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ από τις εικόνες των στοιχείων της κανονικής βάσεως του $\mathbb{R}^3$:

$$e_1 T = (0,1,0,2), \ e_2 T = (0,1,1,0) \text{ και } e_3 = (0,1,-1,4).$$

Ζητάμε να βρούμε τους χώρους KerT και ImT.

Ο χώρος ImT είναι ο L{(0,1,0,2), (0,1,1,0), (0,1,–1,4)}.

Παρατηρούμε ότι, το {(0,1,0,2), (0,1,1,0)} είναι σύνολο γραμμικώς ανεξάρτητο, και ότι (0,1,–1,4) = 2(0,1,0,2)–(0,1,1,0). Είναι λοιπόν, dimImT = 2.

Ο χώρος KerT είναι το $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid xT = 0\}$. Είναι λοιπόν, $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ οπότε και $xT = x_1 e_1 T + x_2 e_2 T + x_3 e_3 T = x_1(0,1,0,2) + x_2(0,1,1,0) + x_3(0,1,-1,4)$

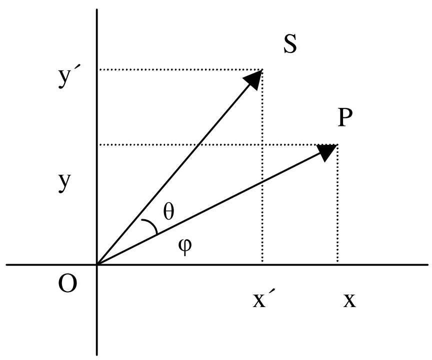
$= (0,\ x_1+x_2+x_3,\ x_2-x_3,\ 2x_1+4x_3)$. Θέλουμε να έχουμε xT = 0. Οδηγούμεθα λοιπόν στο σύστημα

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=0\\ x_2-x_3&=0\\ 2x_1+\quad 4x_3&=0\ . \end{aligned}$$

Το σύστημα αυτό, έχει λύση την $(-2x_3, x_3, x_3) = x_3(-2,1,1)$.
Είναι λοιπόν, KerT = L{(–2,1,1)} και dimKerT = 1.

Παρατηρούμε ότι ισχύει η σχέση dimKerT+dimImT = dim $\mathbb{R}^3$.

3. Εφαρμογές. α) Στροφή στο Επίπεδο. Θεωρούμε το πραγματικό επίπεδο $\mathbb{R}^2$, και έστω Oxy ένα (ορθογώνιο) σύστημα αναφοράς σ' αυτό. Θεωρούμε το $\overrightarrow{OP}$, το οποίο και στρέφουμε κατά γωνία θ, στη θέση $\overrightarrow{OS}$. Ζητάμε να βρούμε την απεικόνιση, που δίδει το $\overrightarrow{OS}$ ως εικόνα του $\overrightarrow{OP}$. Αν δηλαδή, S = (x΄,y΄) και P = (x,y), ζητάμε να βρούμε μία απεικόνιση $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, τέτοια ώστε, $(x,y) \mapsto (x',y')$.



Θέτουμε r = (OP) = (OS), το μήκος αντιστοίχως, του ευθύγραμμου τμήματος OP και OS.
Παρατηρούμε ότι,

$$\begin{aligned} x' = (OS)\cos(\theta+\varphi) &= r\cos\theta\cos\varphi - r\sin\theta\sin\varphi\\ &= x\cos\theta - y\sin\theta, \end{aligned}$$

μιά και x = rcosφ, και y = rsinφ. Επίσης,

$$\begin{aligned} y' = (OS)\sin(\theta+\varphi) &= r\sin\theta\cos\varphi + r\cos\theta\sin\varphi\\ &= x\sin\theta + y\cos\theta. \end{aligned}$$

Ο ζητούμενος μετασχηματισμός, δίδεται λοιπόν από την έκφραση,

$T_\theta : (x,y) \mapsto (x\cos\theta - y\sin\theta,\ x\sin\theta + y\cos\theta)$.

Ο T_θ για $0 \le \theta < 2\pi$ ορίζεται καλά. Θα δείξουμε ότι είναι και γραμμική απεικόνιση.
Εστω τα $\vec{r}_1 = (x_1, y_1)$ και $\vec{r}_2 = (x_2, y_2)$. Θα δείξουμε ότι, $(\lambda_1\vec{r}_1 + \lambda_2\vec{r}_2)T_\theta = \lambda_1\vec{r}_1T_\theta + \lambda_2\vec{r}_2T_\theta$.
Είναι, $\lambda_1(x_1,y_1)+\lambda_2(x_2,y_2) = (\lambda_1x_1+\lambda_2x_2, \lambda_1y_1+\lambda_2y_2)$ και

$$(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2, \lambda_1y_1+\lambda_2y_2)T_\theta =$$

$$((\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\cos\theta - (\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\sin\theta,\ (\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\sin\theta + (\lambda_1y_1+\lambda_2y_2)\cos\theta) \quad (1)$$

και $\lambda_1(x_1,y_1)T_\theta + \lambda_2(x_2,y_2)T_\theta = (\lambda_1x_1\cos\theta - \lambda_1y_1\sin\theta,\ \lambda_1x_1\sin\theta + \lambda_1y_1\cos\theta) +$

$$(\lambda_2x_2\cos\theta - \lambda_2y_2\sin\theta,\ \lambda_2x_2\sin\theta + \lambda_2y_2\cos\theta) =$$

$$(\lambda_1x_1\cos\theta - \lambda_1y_1\sin\theta + \lambda_2x_2\cos\theta - \lambda_2y_2\sin\theta,\ \lambda_1x_1\sin\theta + \lambda_1y_1\cos\theta + \lambda_2x_2\sin\theta + \lambda_2y_2\cos\theta) =$$

$$((\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\cos\theta - (\lambda_1y_1+\lambda_2y_2)\sin\theta,\ (\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\sin\theta + (\lambda_1y_1+\lambda_2y_2)\cos\theta) \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει το ζητούμενο.

Η γραμμική απεικόνιση T_θ καλείται ***στροφή*** του επιπέδου κατά γωνία θ.

β) Θεωρούμε τώρα, το σύνολο των γραμμικών μετασχηματισμών T_θ, $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $0 \le \theta < 2\pi$. Το σύνολο αυτό, είναι ένα σύνολο αυτομορφισμών του $\mathbb{R}^2$. Είναι γνωστό, ότι αυτό το σύνολο οργανώνεται σε διανυσματικό χώρο (βλέπε σελ. 7, παράδειγμα 4). Ομως, εδώ έχουμε κάτι παραπάνω. Ορίζεται πάντα η σύνθεση δύο στροφών, και είναι και αυτή στροφή. Εύκολα εξ' άλλου αποδεικνύεται ότι, $T_\theta\, T_\varphi = T_{\theta+\varphi}$. Η σχέση αυτή, μας οδηγεί στο συμπέρασμα, ότι το σύνολο των στροφών του επιπέδου, με πράξη των πολλαπλασιασμό (σύνθεση), αποτελεί αντιμεταθετική ομάδα. Μοναδιαίο στοιχείο της ομάδας αυτής, είναι η στροφή κατά μηδενική γωνία.

4. Οπως είδαμε παραπάνω, οι σχέσεις γραμμικής εξάρτησης, διατηρούνται από έναν γραμμικό μετασχηματισμό. Ομως, οι εικόνες μερικών από τα στοιχεία, που εμπλέκονται σε κάποια σχέση γραμμικής εξάρτησης εν **U**, είναι δυνατόν να είναι το ίδιο στοιχείο, (π.χ. το $0 \in \mathbf{V}$). **Συμπέρασμα**. Ενας γραμμικός μετασχηματισμός, $T: \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ δεν αυξάνει ποτέ την διάσταση του χώρου στον οποίον ορίζεται. Είναι λοιπόν,

ΠΡΟΤΑΣΗ 6. $\rho(T) \leq \min(\dim\mathbf{U}, \dim\mathbf{V})$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 7. $\dim\mathbf{U} = \rho(f)+\nu(f)$, όπου $f: \mathbf{U} \to \mathbf{V}$, όπου η f είναι γραμμική απεικόνιση.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{U} \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbf{U}/\mathrm{Ker}f \arrow[d, "g"] \\ & \mathbf{V}=\mathrm{Im}f \end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το παραπλεύρως αντιμεταθετικό διάγραμμα (βλέπε Θεώρημα, σελ. 20) Η p ορίζεται από την σχέση, $\forall x \in \mathbf{U}$, $p(x) = C_x$, όπου C_x η τάξη ισοδυναμίας του $x \in \mathbf{U}$.

Γράφουμε και $p(x) = x+\mathrm{Ker}f$.

Συμβολισμός. $x+\mathrm{Ker}f = \{x+z \mid z \in \mathrm{Ker}f\}$. Η p είναι η μοναδική γραμμική απεικόνιση, που ορίζεται κατ' αυτόν τον τρόπο.

α) Είναι γραμμική. Πράγματι, $p(\lambda x+\mu y) = \lambda x+\mu y+\mathrm{Ker}f = (\lambda x+\mathrm{Ker}f)+(\mu x+\mathrm{Ker}f)$, [μιά και $\mathrm{Ker}f+\mathrm{Ker}f = \{w = z_1 + z_2 \mid z_1, z_2 \in \mathrm{Ker}f\} = \mathrm{Ker}f$] $= p(\lambda x)+p(\mu y)$ [μιά και $v \approx \lambda v$].

β) Είναι μοναδική. Πράγματι, αν είχαμε και την q να ορίζεται κατά τον ίδιο τρόπο, τότε και $(p-q)(x) = p(x)-q(x) = (x+\mathrm{Ker}f)-(x+\mathrm{Ker}f) = 0$, $\forall x \in \mathbf{U}$.

Η f είναι γραμμική. Αρα, η $x \approx y$ δίδει την $f(x) = f(y)$, όπως απαιτεί το παραπάνω Θεώρημα, μιά και η $x-y = z \in \mathrm{Ker}f$, δίδει την $f(x)-f(y) = f(z) = 0$. Επειδή η g ισομορφισμός, $\dim\mathrm{Im}f = \dim(\mathbf{U}/\mathrm{Ker}f) = \dim\mathbf{U}-\dim\mathrm{Ker}f$ όπως δείξαμε στο παρ. 18, στη σελ. 19.

Η σχέση αυτή γράφεται και $n = \rho(f)+\nu(f)$, όπου $n = \dim\mathbf{U}$, $\rho(f)$ = η τάξη της f, που είναι η $\dim\mathrm{Im}f = \dim f(\mathbf{U})$ και $\nu(f)$ η μηδενικότης της f, που είναι η $\dim\mathrm{Ker}f$.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Η γραμμική απεικόνιση $f: \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ είναι ένα-ένα, ανν,
i) $\mathrm{Ker}f = \{0\}$ είτε ii) Η f είναι επί, δηλαδή, $f(\mathbf{U}) = \mathbf{U}$.
Απόδειξη. i) Αν η f είναι ένα-ένα, και υπήρχε και $z \in \mathrm{Ker}f$ με $z \neq 0$, τότε θα είχαμε και ότι $f(z) = 0$. Ομως είναι και $f(0) = 0$. Η f λοιπόν, δεν είναι ένα-ένα. Ατοπον.

Εστω τώρα ότι $\mathrm{Ker}f = \{0\}$. Θα δείξουμε ότι η f είναι ένα-ένα. Πράγματι, η σχέση $f(x) = f(y)$ είναι η $f(x)-f(y) = 0$, ή λόγω γραμμικότητας της f, $f(x-y) = 0$, άρα $x-y \in \mathrm{Ker}f$, άρα, από υπόθεση, $x-y = 0$, δηλαδή $x = y$. Η f είναι λοιπόν ένα-ένα.

ii) Αν η f είναι επί, οπότε $\dim\mathbf{U} = \dim\mathrm{Im}f = n$, η σχέση $n = \rho(f)+\nu(f)$ δίδει ότι $\nu(f) = \dim\mathrm{Ker}f = 0$, δηλαδή, $\mathrm{Ker}f = \{0\}$.

Αν τέλος, $\mathrm{Ker}f = \{0\}$, $\nu(f) = 0$, και $\rho(f) = n$. Η f είναι λοιπόν, επί.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8. Η σύνθεση δύο γραμμικών απεικονίσεων είναι γραμμική απεικόνιση.

5. Οπως είδαμε, το σύνολο $\mathcal{L}(\mathbf{U})$ οργανώνεται σε γραμμικό χώρο πάνω στο σώμα F. Επίσης, η σύνθεση δύο απεικονίσεων, εισάγει έναν "πολλαπλασιασμό" μέσα στο $\mathcal{L}(\mathbf{U})$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι έχουμε και τις επιμεριστικές ιδιότητες:

$$\text{i) } f(g_1+g_2) = fg_1+fg_2 \quad \text{και} \quad \text{ii) } (g_1+g_2)f = g_1f+g_2f \ .$$

Ακόμα, έχουμε και την $\lambda(fg) = (\lambda f)g = f(\lambda g)$. Μέσα στο σύνολο $\mathcal{L}(\mathbf{U})$, μπορούμε λοιπόν, (λόγω προσεταιρισμού), να θεωρούμε τις ***δυνάμεις*** $f^0 = 1_{\mathbf{U}}$, f, $f^2 = ff$, . . . , $f^n = f \cdots f$ n παράγοντες. Εύκολα βλέπουμε ότι, ισχύουν οι ιδιότητες των δυνάμεων $f^n f^m = f^{n+m} = f^{m+n} = f^m + f^n$ και $\left(f^m\right)^n = f^{mn} = \left(f^n\right)^m$. Μπορούμε εξ' άλλου να θεωρούμε και αθροίσματα ***(πολυώνυμα)*** της μορφής $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f^i$, $\lambda \in F$.

Θεωρούμε το σύνολο $\mathscr{L}(\mathbf{U})$. Αν η f είναι ένα-ένα τότε ορίζεται και η f^{-1}. Η f^{-1} είναι και αυτή γραμμική, μιά και αν $y_1, y_2 \in \mathbf{U}$, με $y_1 = f(x_1)$ και $y_2 = f(x_2)$, τότε και $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$. Αρα και,
$f^{-1}(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \lambda_1 f^{-1}(y_1) + \lambda_2 f^{-1}(y_2)$.
Φανερά, ισχύει ότι, $ff^{-1} = 1_U = f^{-1}f$. Η αντίστροφη λοιπόν της f, είναι και αριστερά και δεξιά αντίστροφη. Η ιδιότητα αυτή, είναι και καθοριστική για την f^{-1}, με την παρακάτω έννοια:

ΠΡΟΤΑΣΗ 9. Αν η $g \in \mathscr{L}(\mathbf{U})$ έχει την ιδιότητα να είναι ταυτόχρονα αριστερά και δεξιά αντίστροφος της f, τότε η g είναι ένα-ένα και επί, και $g = f^{-1}$.
Απόδειξη. Θα δείξουμε, πρώτα, ότι ο πυρήνας της g είναι το {0}, οπότε η g, σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα, θα είναι ένα-ένα. Πράγματι, έστω $x \in \mathbf{U}$, με g(x) = 0. Είναι τότε και
α) f(g(x)) = f(0) = 0 και επίσης, από το γεγονός ότι η g είναι από υπόθεση δεξιά αντίστροφος, $(gf)(x) = f(g(x)) = 1_U = x$. Αρα x = 0, δηλαδή, Kerg = {0}.
Εστω τώρα, $y \in \mathbf{U}$. Είναι τότε και $y = y1_U = y(fg) = g(f(y))$ και συνεπώς το y είναι η g εικόνα κάποιου στοιχείου $f(y) \in \mathbf{U}$. Η g είναι λοιπόν και επί. Ταυτίζεται λοιπόν, με την f^{-1}.

ΠΡΟΤΑΣΗ 10. Μία γραμμική απεικόνιση T: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ επί του $\mathbf{V}$ είναι αντιστρέψιμη ανν μία βάση του $\mathbf{V}$ μετασχηματίζεται σε βάση του $\mathbf{V}$.
Απόδειξη. Πράγματι, αν $\{e_1, e_2, \ \ldots \ , e_n\}$ βάση του $\mathbf{V}$, και $\{e_1T, e_2T, \ \ldots \ , e_nT\}$ πάλη βάση του $\mathbf{V}$, τότε ρ(T) = dimImT = n οπότε, από την πρόταση 7, σελ. 24, ν(T) = 0, δηλαδή, KerT = {0} και συνεπώς η T είναι ένα-ένα και επί.

Ορισμός. Μία αντιστρέψιμη γραμμική απεικόνιση T καλείται και ***μη ιδιάζουσα*** (ή ομαλή) απεικόνιση (nonsingular mapping).

5. Μετασχηματισμός των συντεταγμένων. Έστω ότι το $x \in \mathbf{V}$ έχει τις εκφράσεις (αρχική) $x = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n$ και (τελική) $x = \beta_1 b_1 + \ldots + \beta_n b_n$ στις δύο διαφορετικές βάσεις $\{a_1, \ldots, a_n\}$ και $\{b_1, \ldots, b_n\}$ του $\mathbf{V}$. Υποθέτουμε, ότι η (τελική) βάση $\{b_1, \ldots, b_n\}$ έχει προκύψει από την (αρχική) βάση $\{a_1, \ldots, a_n\}$ μετά από την ενέργεια του μετασχηματισμού T, που δίδεται από τις σχέσεις $b_i = \rho_{i1} a_1 + \ldots + \rho_{in} a_n$, $1 \le i \le n$, $\det(\rho_{ij}) \ne 0$. Ζητάμε να βρούμε τις σχέσεις που συνδέουν τις αρχικές συντεταγμένες α_i του x, με τις τελικές του συντεταγμένες β_j.
Είναι, $x = \beta_1(\rho_{11} a_1 + \ldots + \rho_{1n} a_n) + \ldots + \beta_n(\rho_{n1} a_1 + \ldots + \rho_{nn} a_n)$

$$x = (\rho_{11}\beta_1 + \ldots + \rho_{n1}\beta_n) a_1 + \ldots + (\rho_{1n}\beta_1 + \ldots + \rho_{nn}\beta_n) a_n$$

Συγκρίνοντας την έκφραση αυτή του x με την αρχική του, λαβαίνουμε τις ζητούμενες σχέσεις $\alpha_j = \rho_{1j}\beta_1 + \ldots + \rho_{nj}\beta_n = \sum_{i=1}^{n} \rho_{ij}\beta_j$ (1). Το (1) μας δίδει τις αρχικές συντεταγμένες συναρτήσει των τελικών. Αν, αντίστροφα, θέλουμε να εκφράσουμε τις τελικές συναρτήσει των αρχικών συντεταγμένων, θα πρέπει να λύσουμε το γραμμικό σύστημα (1), ως προς β_i. Η ύπαρξη της λύσεως εξασφαλίζεται από το γεγονός ότι $\det(\rho_{ij}) \ne 0$. Λύοντας, λοιπόν το (1) έχουμε, $\beta_i = \sigma_{1i}\alpha_1 + \ldots + \sigma_{ni}\alpha_n = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}\alpha_j$ (2). Οι τετραγωνικοί πίνακες (ρ_{ij}) και (σ_{ij}) είναι βέβαια, αντίστροφοι.

6. Μιά γραμμική απεικόνιση, για την οποία έχουμε ότι $f^n = f_0$, για κάποιον n > 1, καλείται μηδενοδύναμη απεικόνιση επί του **U**. Παράδειγμα τέτοιας απεικόνισης αποτελεί ο ***διαφορικός τελεστής*** D επί του γραμμικού χώρου των πολυωνύμων P_n (βλέπε παράδειγμα 5 στην σελ. 7). Ο D ορίζεται κατά τα γνωστά, από την σχέση,

$$D(\lambda_0 x^n + \lambda_1 x^{n-1} + \ \ldots\ + \lambda_n x^0) = n\lambda_0 x^{n-1} + (n-1)\lambda_1 x^{n-2} + \ \ldots\ + \lambda_{n-1}.$$

Ο D είναι γραμμική απεικόνιση, μιά και ισχύει ότι, D(αf+βg) = αDf+βDg. Ο D είναι και μηδενοδύναμος, μιά και $D^{n+1} = 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. Θεωρούμε το πολυώνυμο $p(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$. Εχουμε τότε ότι, $Dp(x) = 3x^2 + 4x - 1$, $D^2 p(x) = 6x+4$, $D^3 p(x) = 6$ και, τέλος, $D^4 p(x) = 0$.

Ασκήσεις. 1) Εστω f και g μηδενοδύναμοι γραμμικοί μετασχηματισμοί. Αν ισχύει ότι fg = gf, τότε και ο fg είναι μηδενοδύναμος.

2) Εστω ότι δίδεται ο $g \in \mathscr{L}(\mathbf{U})$. Να δείξετε ότι το σύνολο όλων των $f \in \mathscr{L}(\mathbf{U})$, για τους οποίους $fg = f_0$ είναι υπόχωρος του $\mathscr{L}(\mathbf{U})$. Ποίος είναι ο υπόχωρος αυτός, όταν $g = f_0$; όταν $g = 1_U$;

3) Εστω η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, που ορίζεται από την σχέση

$$f(x_1, x_2) = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) \quad \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι η f είναι γραμμική, και να βρείτε μιά αναγκαία και ικανή συνθήκη, έτσι ώστε αυτή να αντιστρέφεται.

4) Εστω $f \in \mathscr{L}(\mathbf{U})$, και υποθέτουμε ότι, γι' αυτήν ισχύει ότι, $f^2 + 1_U = f$. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμος.

5) Να δείξετε ότι, αν f, $g \in \mathscr{L}(\mathbf{U})$ αντιστρέψιμες συναρτήσεις, τότε και οι fg και gf είναι αντιστρέψιμες, και $(fg)^{-1} = g^{-1} f^{-1}$.

6) Εστω, $\{e_1, e_2, \ \ldots\ , e_n\}$ και $\{b_1, b_2, \ \ldots\ , b_m\}$ βάσεις αντ. των χώρων **U**, και **V**. Για κάθε ζεύγος δεικτών i,j με $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$, έστω ότι οι $f_{ij} : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ ορίζονται από τις σχέσεις $f_{ij}(e_k) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad k \ne j \\ b_j & \text{αν} \quad k = j \end{cases}$ γιά $1 \le k \le m$.

Να δείξετε ότι τα f_{ij} αποτελούν βάση του χώρου $\mathscr{L}(\mathbf{U}, \mathbf{V})$.

7) Να δείξετε: α) Οτι το σύνολο {sinx, cosx, sinxcosx, $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ } είναι σύνολο γραμμικώς ανεξάρτητο εν $C(-\infty, +\infty)$.
($C(-\infty, +\infty)$ είναι ο γραμμικός χώρος των συνεχών συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

8) Εστω $f \in \mathscr{L}(\mathbf{V})$ τέτοια ώστε, $f^2 = f$. Εχουμε τότε ότι :
α) Αν $\mathbf{M} = \{x \in \mathbf{V} \mid f(x) = x\}$, τότε και **M** = Imf.
β) $\mathbf{M} \cap \mathrm{Kerf} = \{0\}$
γ) $\mathbf{V} = \mathbf{M} \oplus \mathrm{Kerf}$

9) Να δείξετε ότι η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ που ορίζεται από την σχέση

$$(\xi_1, \xi_2, \ \ldots\ , \xi_n)f = \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_{1j}\xi_j, \ \sum_{j=1}^{m} \alpha_{2j}\xi_j, \ \ldots\ , \sum_{j=1}^{m} \alpha_{nj}\xi_j, \right)$$

$\forall (\xi_1, \xi_2, \ \ldots\ , \xi_n) \in \mathbb{R}^m$, είναι γραμμική. Αντίστροφα, κάθε γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ παίρνει την μορφή αυτή, γιά κατάλληλα $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, i = 1, . . . ,n και j = 1, . . . ,m.

10) Εξετάστε αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε, $(1,-1,0)f = (1,0)$ και $(1,0,-1)f = (0,1)$.
11) Εστω οι διανυσματικοί χώροι **V**, **W** και f: $\mathbf{V} \to \mathbf{W}$ γραμμική. Δείξτε ότι η $\bar{f}: \mathbf{V}/\mathbf{M} \to \mathbf{W}$ (**M** υπόχωρος του **V**) που ορίζεται από την σχέση $(v+\mathbf{M})\bar{f} = vf$ είναι α) καλά ορισμένη, β) γραμμική, και γ) υπολογίστε τον $\mathrm{Ker}\bar{f}$.
12) Αν $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2$ υπόχωροι του **V** τέτοιοι ώστε $\mathbf{U}_1 \oplus \mathbf{U}_2 = \mathbf{V}$, και $f \in \mathcal{L}(\mathbf{V},\mathbf{W})$, ισχύει ή όχι ότι $f(\mathbf{U}_1 \oplus \mathbf{U}_2) = f(\mathbf{U}_1) \oplus f(\mathbf{U}_2)$;

7. Ορθογώνιοι μετασχηματισμοί. Στην §3 ασχοληθήκαμε με την ομάδα των γραμμικών μετασχηματισμών T_θ "στροφή στο επίπεδο". Οι μετασχηματισμοί αυτοί διατηρούν την έκφραση του μήκους $(OS)^2 = x^2 + y^2$ αναλλοίωτο. Ζητάμε να προσδιορίσουμε το σύνολο των γραμμικών μετασχηματισμών $T: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, όπου $\dim \mathbf{V} = n$, που διατηρούν την έκφραση $(x_1)^2 + (x_2)^2 + \ldots + (x_n)^2$ (1) αναλλοίωτο (βλέπε και ενότητα "Γεωμετρικές Εφαρμογές", §3).

Ορισμός. Το ***εσωτερικό γινόμενο*** των διανυσμάτων $x, y \in \mathbf{V}(F)$, ορίζεται από την σχέση $x \cdot y = (x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ αν $F = \mathbb{R}$, ή $x \cdot y = (x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$ αν $F = \mathbb{C}$.

Η (1), τώρα, γράφεται και ως (x, x) ή $x \cdot x = (x_1)^2 + (x_2)^2 + \ldots + (x_n)^2$.

Το εσωτερικό γινόμενο έχει τις ιδιότητες:
1. Γραμμική $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(x, z)$
2. Συμμετρική $(x, y) = \overline{(y, x)}$
3. Θετική $(x, x) > 0$ ανν $x \neq 0$.

Το ***μήκος*** του διανύσματος x, ορίζεται από την σχέση $d(x, x) = |x| = +\sqrt{(x, x)}$. Τα x και y καλούνται ***ορθογώνια*** ανν $(x, y) = 0$. Δύο υπόχωροι **U** και **W** του **V** καλούνται ορθογώνιοι, αν κάθε διάνυσμα του **U** είναι ορθογώνιο προς κάθε διάνυσμα του **W**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6. Ζητάμε να βρούμε όλα τα διανύσματα x, τα οποία είναι ορθογώνια στο $a = (1, -1, 2) \in \mathbb{R}^3$.
Θα πρέπει να ισχύει $(a, x) = x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$. Η εξίσωση αυτή έχει δύο παραμέτρους, έστω τις x_1 και x_2. Για τιμές $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, θα πρέπει $x_3 = 0$, και για τιμές $x_1 = 0$ και $x_2 = 2$, θα πρέπει $x_3 = 1$. Όλα τα διανύσματα, συνεπώς, που πληρούν την παραπάνω εξίσωση, είναι της μορφής $s(1,1,0) + t(0,2,1)$.

Για το πως μετατρέπουμε μία τυχούσα βάση σε ***ορθοκανονική*** (ορθογώνια και μοναδιαία), παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο "Γεωμετρικές Εφαρμογές", §3.

Επανερχόμεθα στο πρόβλημα που θέσαμε στην αρχή της παραγράφου, την αναζήτηση δηλαδή, όλων των γραμμικών μετασχηματισμών, που έχουν την έκφραση του μήκους ως αναλλοίωτο. Οι μετασχηματισμοί αυτοί, καλούνται ***ορθογώνιοι μετασχηματισμοί*** και χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι $(xT, xT) = (x, x)$. Η σύνθεση δύο ορθογώνιων μετασχηματισμών είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός. Πράγματι, αν S και T ορθογώνιοι μετασχηματισμοί, τότε, είναι και $(x(ST), x(ST)) = ((xS)T, (xS)T) = (x, x)$.

Εξ' άλλου, ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός T, είναι απεικόνιση ένα προς ένα, μιά και $\mathrm{KerT} = \{0\}$. Διότι, αν $x \in \mathrm{KerT}$, $x \neq 0$, τότε και $(xT, xT) = (x, x)$, με $xT = 0$, πράγμα αδύνατον. Υπάρχει, λοιπόν, ο αντίστροφος μετασχηματισμός T^{-1} για κάθε T. Το σύνολον, συνεπώς, όλων αυτών των μετασχηματισμών, αποτελεί Ομάδα, που την συμβολίζουν με το $SO(n, F)$. Η ομάδα αυτή, είναι υποομάδα της ομάδας $GL(n, F)$ του συνόλου των γραμμικών συναρτήσεων f: **U**(F) → **V** (F), n η διάσταση του χώρου **V**.

Περιοριζόμαστε στο σώμα F των πραγματικών αριθμών, κατά την απόδειξη των θεωρημάτων, για την απλούστευση των συμβολισμών μας. Τις σχέσεις που αποδεικνύονται, θα τις εκφράζουμε, τελικά, στο σώμα των μιγαδικών αριθμών.

Θεώρημα. Έστω $\{e_1, e_2, \ \dots \ , e_n\}$ μία ορθοκανονική βάση του **V** και $T: \mathbf{V}(\mathbb{R}) \to \mathbf{V}(\mathbb{R})$ ορθογώνιος μετασχηματισμός με πίνακα A ως προς αυτήν την βάση.

Συμβολισμός. Με a_i θα συμβολίζουμε το διάνυσμα, που έχει συντεταγμένες τα στοιχεία της i-γραμμής του πίνακα A. Είναι, δηλαδή, $a_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in})$. Με b_j θα συμβολίζουμε το διάνυσμα, που έχει συντεταγμένες τα στοιχεία της j-κολώνα (στήλη) του πίνακα A. Είναι, δηλαδή, $b_j = (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{nj})$. Με $\delta_{ij} = \delta(i, j) = \begin{cases} 1 \ \text{αν} \ i = j \\ 0 \ \text{αν} \ i \neq j \end{cases}$, $1 \leq i, j \leq n$

Ισχύουν οι σχέσεις:

1. $(a_i, a_j) = \delta_{ij}$
2. $(b_i, b_j) = \delta_{ij}$
3. $A^{-1} = A^t$.
4. $\det A = \pm 1$.

Απόδειξη της 1. Η εικόνα του διανύσματος e_i είναι η $e_i T = \alpha_{i1} e_1 + \alpha_{i2} e_2 + \dots + \alpha_{in} e_n$. Άρα και

$$
\begin{aligned}
(e_i T, e_i T) = (\alpha_{i1} e_1 + \alpha_{i2} e_2 + \dots + \alpha_{in} e_n, \alpha_{i1} e_1 + \alpha_{i2} e_2 + \dots + \alpha_{in} e_n) = \\
\alpha_{i1}\alpha_{i1}(e_1, e_1) + \alpha_{i1}\alpha_{i2}(e_1, e_2) + \dots + \alpha_{i1}\alpha_{in}(e_1, e_n) + \\
\alpha_{i2}\alpha_{i1}(e_2, e_1) + \alpha_{i2}\alpha_{i2}(e_2, e_2) + \dots + \alpha_{i2}\alpha_{in}(e_2, e_n) + \\
\dots \\
\alpha_{in}\alpha_{i1}(e_n, e_1) + \alpha_{in}\alpha_{i2}(e_n, e_2) + \dots + \alpha_{in}\alpha_{in}(e_n, e_n) \\
= \alpha_{i1}\alpha_{i1} + \alpha_{i2}\alpha_{i2} + \dots + \alpha_{in}\alpha_{in} = (e_i, e_i) = 1
\end{aligned}
$$

Επίσης,

$$
\begin{aligned}
(e_i T, e_j T) = (\alpha_{i1} e_1 + \alpha_{i2} e_2 + \dots + \alpha_{in} e_n, \alpha_{j1} e_1 + \alpha_{j2} e_2 + \dots + \alpha_{jn} e_n) = \\
\alpha_{i1}\alpha_{j1}(e_1, e_1) + \alpha_{i1}\alpha_{j2}(e_1, e_2) + \dots + \alpha_{i1}\alpha_{jn}(e_1, e_n) + \\
\alpha_{i2}\alpha_{j1}(e_2, e_1) + \alpha_{i2}\alpha_{j2}(e_2, e_2) + \dots + \alpha_{i2}\alpha_{jn}(e_2, e_n) + \\
\dots \\
\alpha_{in}\alpha_{j1}(e_n, e_1) + \alpha_{in}\alpha_{j2}(e_n, e_2) + \dots + \alpha_{in}\alpha_{jn}(e_n, e_n) \\
= \alpha_{i1}\alpha_{j1} + \alpha_{i2}\alpha_{j2} + \dots + \alpha_{in}\alpha_{jn} = (e_i, e_j) = 0
\end{aligned}
$$

Δείξαμε, συνεπώς, την 1.

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και η 2.

Στην περίπτωση, που $F = \mathbb{C}$, έχουμε:

Απόδειξη της 3. Έστω $C=(\gamma_{ij})=A\overline{A}^t$. Είναι, τότε, $\gamma_{ij}=(a_i, b_j)$. Όμως, οι συντεταγμένες του b_j είναι τα στοιχεία της j κολώνας του $\overline{A}^t$, άρα, τα στοιχεία της j γραμμής του A. Άρα, λόγω της 1, $\gamma_{ij}=(a_i, a_j)=\delta_{ij}$, και, συνεπώς $A\overline{A}^t=I$, ο μοναδιαίος πίνακας, δηλαδή, η 3.
Απόδειξη της 4. $1=\det I=\det(A\overline{A}^t)=\det A\det\overline{A}^t=|(\det A)^2|$

Πρόταση. Αν A είναι ένας $n\times n$ πίνακας, τέτοιος ώστε $\overline{A}^t=A^{-1}$ και $\{e_1, e_2, \ \ldots \ , e_n\}$ μία ορθοκανονική βάση του $\mathbf{V}(\mathbb{R})$, τότε ο A είναι δυνατόν να θεωρηθεί ότι είναι ο πίνακας ενός ορθογώνιου μετασχηματισμού $T:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$.
Απόδειξις. Ορίζουμε τον γραμμικό μετασχηματισμό T ως εξής:
$\forall x\in\mathbf{V}, x=\chi_1 e_1+\ldots+\chi_n e_n$, $xT=\chi_1' e_1+\ldots+\chi_n' e_n$, όπου τα χ_i' προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό του $1\times n$ πίνακα (χ_i) επί τον $n\times n$ πίνακα A.
O T είναι ορθογώνιος, δηλαδή, $(xT, xT)=(x, x)$. Πράγματι, είναι, $(xT, xT)=(\chi_i')(\chi_i')^t=$ $(\chi_i)AA^t(x_i)^t=(x, x)$.