ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ, ΔΙΓΡΑΜΜΙΚΕΣ, ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

1. Γραμμικές μορφές. Έστω **V** διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος F, όπου F το σώμα των πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών. Μία απεικόνιση $f:\mathbf{V}\to F$ θα καλείται ***γραμμική μορφή*** (linear form) ή συναρτησιοειδές, (functional), ανν είναι γραμμική ισχύει, δηλαδή, ότι $f(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)=\alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2)$ με $x_1,x_2\in\mathbf{V}$ και $\alpha_1,\alpha_2\in F$ (βλέπε "Γραμμικές Συναρτήσεις").

Συμβολισμός. Σύμφωνα με τον συμβολισμό που έχουμε καθιερώσει στο "Γραμμικές Συναρτήσεις", γράφουμε, $(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)f=\alpha_1 x_1 f+\alpha_2 x_2 f$. Αντί γι αυτό, είναι βολικό να γράφουμε $[\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2,\ f]=\alpha_1[x_1,f]+\alpha_2[x_2,f]$, όπου ο συμβολισμός $[x,f]$ έχει αντικαταστήσει τον $f(x)$ ή τον xf για την δήλωση της τιμής της συναρτήσεως f πάνω στο $x\in\mathbf{V}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1. α) Κάθε ομογενές γραμμικό πολυώνυμο πρώτου βαθμού και n μεταβλητών, $f(\chi_1,\ldots,\chi_n)=\alpha_1\chi_1+\ldots+\alpha_n\chi_n$ είναι μία γραμμική μορφή, εφόσον υποθέσουμε ότι είναι $x=\chi_1 e_1+\ldots+\chi_n e_n=(\chi_1,\ldots,\chi_n)\in F^n$, e_i, $1\le i\le n$, η κανονική βάση.
Ένα μη ομογενές πολυώνυμο $g(\chi_1,\ldots,\chi_n)=\alpha_1\chi_1+\ldots+\alpha_n\chi_n+\beta$ δεν είναι γραμμική μορφή.

β) Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο **L** όλων των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $x(\tau)$, $\tau\in[\tau_1,\tau_2]\subset\mathbb{R}$. Η σχέση $f(x)=\int_{\tau_1}^{\tau_2}x(\tau)d\tau$ ορίζει μία γραμμική μορφή επί του απειροδιαστάτου **L.**

γ) Εύκολα αποδεικνύεται ότι το σύνολον των γραμμικών μορφών επί του **V**, αποτελεί γραμμικό χώρο $\mathbf{V}'$. Ο χώρος αυτός, καλείται (dual) ***δυϊκός*** χώρος του **V**.

δ) Αν $\vec{0}\in\mathbf{V}$, τότε και $f(\vec{0})=f(0\vec{0})=0f(\vec{0})=0$.

Σημείωση 1. Το ομογενές πολυώνυμο f είναι δυνατόν να γραφή και ως εξής: $f(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_i=\alpha_1\chi_1+\ldots+\alpha_n\chi_n$. Αντί γι αυτό γράφουμε απλά $f(x)=\alpha_i\chi_i$ (1) και νοούμε ότι ο επαναλαμβανόμενος δείκτης αθροίζεται. Στον συμβολισμό αυτό, συνήθως, τους δείκτες $1\le i\le n$ των συντεταγμένων χ, τους γράφουμε άνω: $f(x)=\alpha_i\chi^i$.

Ορολογία. Ένας δείκτης που αθροίζεται καλείται ***βωβός*** δείκτης σε αντίθεση με τους δείκτες που δεν αθροίζονται και οι οποίοι καλούνται ***ελεύθεροι*** δείκτες. Ένας βωβός δείκτης είναι δυνατόν να αντικατασταθεί από οιοδήποτε σύμβολο, μιά και φανερά είναι $\xi_i\chi^i=\xi_j\chi^j=\xi_k\chi^k$, αρκεί βέβαια, να μη πειραχθούν τα όρια αθροίσεως.

Σύμφωνα, λοιπόν, με όσα είπαμε, ένα σύστημα μπορεί να γραφεί $y_i=a_{ik}x^k$. Παρατηρούμε, ότι στην σχέση αυτή, οι δείκτες "ισορροπούν", δηλαδή, όσους ελεύθερους δείκτες (εδώ μόνον ένα, τον i) έχουμε στο αριστερό σκέλος της ισότητας, τόσους ελεύθερους δείκτες έχουμε και στο δεξιό και μάλιστα στην ίδια θέση "πάνω" ή "κάτω".

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2. Ένα πολυώνυμο ορίζεται από τους συντελεστές του. Το n μεταβλητών λοιπόν ομογενές πολυώνυμο (1), ορίζεται από τα α_i. Γράφουμε συνεπώς και $a=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ υπονοώντας το ομογενές πολυώνυμο f. Στην περίπτωση αυτή, το a καθίσταται στοιχείο του n-διαστάτου διανυσματικού χώρου $\mathbf{V}'$ όλων των ομογενών πολυωνύμων n μεταβλητών, εκφρασμένο (συνήθως) στην κανονική βάση. Η τιμή, τώρα, που λαβαίνει το πολυώνυμο $a\in\mathbf{V}'$ επί του x, είναι η $[x,a]=\alpha_i\chi^i$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3. Το σύμβολο $[x,f]$ νοούμενο και σαν στοιχείο του $\mathbf{V}\times\mathbf{V}'$ είναι διγραμμικό, μια και ισχύουν οι σχέσεις $[\kappa x_1+\lambda x_2,f]=\kappa[x_1,f]+\lambda[x_2,f]$ ως επίσης και η $(x,\kappa f_1+\lambda f_2)=\kappa(x,f_1)+\lambda(x,f_2)$. Το $[x,f]$ είναι στην πραγματικότητα μία διγραμμική απεικόνιση του $\mathbf{V}'\times\mathbf{V}$ στο F. Είναι, συνεπώς, μία ***διγραμμική μορφή***.

Θεώρημα. Αν $\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$ μία βάση του **V** και $\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\}$ n οιαδήποτε στοιχεία του F, ορίζεται τότε ένα και μόνον ένα συναρτησιοειδές f επί του **V**, τέτοιο ώστε, $[b_i,f]=\xi_i$ για όλα τα $1\le i\le n$.

Απόδειξη. Το τυχόν $x\in\mathbf{V}$ γράφεται $x=\chi^i b_i$ κατά μοναδικό τρόπο. Αν $f\in\mathbf{V}'$, τότε και $[x,f]=[\chi^i b_i,f]=\chi^i[b_i,f]$. Αρκεί να ορίσουμε το συναρτησιοειδές σε τρόπο ώστε $[b_i,f]=\xi_i$, οπότε και $[x,f]=\xi_i\chi^i$.

Θεώρημα. Αν $\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$ μία βάση του **V**, τότε ορίζεται μία βάση $\{f^1,f^2,\ldots,f^n\}$ του $\mathbf{V}'$, τέτοια ώστε $[b_i,f^j]=\delta_i^j$, όπου $\delta_i^j=\begin{cases}0 \text{ για } i\ne j\\ 1 \text{ για } i=j\end{cases}$.

Απόδειξη. α) Τα f^j παράγουν τον $\mathbf{V}'$. Πράγματι, έστω $f\in\mathbf{V}'$. Είναι, τότε, και $[x,f]=[\chi^i b_i,f]=\chi^i[b_i,f]=\chi^i\xi_i=\xi_i\chi^i$. Όμως, $[x,f^j]=[\chi^i b_i,f^j]=\chi^i[b_i,f^j]=\delta_i^j\chi^i=\chi^j$. Άρα και, $[x,f]=\chi^j\xi_j=\xi_j[x,f^j]=[x,\xi_j f^j]$.

β) Τα f^j είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Πράγματι, αν για κάθε $x\in\mathbf{V}$ είχαμε ότι $[x,f]=\xi_i\chi^i=0$ τότε, αν βάλουμε στην θέση του x το b_j, $1\le j\le n$, θα έχουμε ότι, $0=\xi_i[b_j,f^i]=\delta_j^i\xi_i=\xi_j$.

Η βάση $\{f^1,f^2,\ldots,f^n\}$ του $\mathbf{V}'$, όπως ορίσθηκε παραπάνω, καλείται δυϊκή (dual basis ή και conjugate basis) βάση της $\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$ του **V**.

Σημείωση 2. Το δ_i^j καλείται δ του Kronecker.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Ζητάμε να βρούμε την δυϊκή βάση της βάσης $\{b_1,b_2,b_3\}$ του R^3, όπου $b_1=(1,0,0)$, $b_2=(1,1,0)$, $b_1=(1,1,1)$. Αν $f\in\mathbf{V}'$, τότε και,

$[x,f]=[\chi^1 b_1+\chi^2 b_2+\chi^3 b_3,f]=[b_1,f]\chi^1+[b_2,f]\chi^2+[b_3,f]\chi^3$.

Στην θέση της f, βάζουμε διαδοχικά τα f^1,f^2,f^3, οπότε λαμβάνουμε,

$[x,f^i]=\alpha_1^i\chi^1+\alpha_2^i\chi^2+\alpha_3^i\chi^3$, όπου οι εννέα συντελεστές α_j^i προσδιορίζονται από τις σχέσεις $[b_j,f^i]=\delta_j^i$.

Έχουμε, λοιπόν,:

Για $j=1$, $[b_1, f^1] = \alpha_1^1 1 + \alpha_2^1 0 + \alpha_3^1 0 = 1$,

$[b_2, f^1] = \alpha_1^1 1 + \alpha_2^1 1 + \alpha_3^1 0 = 0$,

$[b_3, f^1] = \alpha_1^1 1 + \alpha_2^1 1 + \alpha_3^1 1 = 0$. Είναι $\alpha_1^1 = 1$, $\alpha_2^1 = -1$, $\alpha_3^1 = 0$,

δηλαδή, $[x, f^1] = 1\chi^1 - 1\chi^2 + 0\chi^3 = \chi^1 - \chi^2$

Για $j=2$, $[b_1, f^2] = \alpha_1^2 1 + \alpha_2^2 0 + \alpha_3^2 0 = 0$,

$[b_2, f^2] = \alpha_1^2 1 + \alpha_2^2 1 + \alpha_3^2 0 = 1$,

$[b_3, f^2] = \alpha_1^2 1 + \alpha_2^2 1 + \alpha_3^2 1 = 0$. Είναι $\alpha_1^2 = 0$, $\alpha_2^2 = 1$, $\alpha_3^2 = -1$,

δηλαδή, $[x, f^2] = 0\chi^1 + 1\chi^2 - 1\chi^3 = \chi^2 - \chi^3$

Για $j=3$, $[b_1, f^3] = \alpha_1^3 1 + \alpha_2^3 0 + \alpha_3^3 0 = 0$,

$[b_2, f^3] = \alpha_1^3 1 + \alpha_2^3 1 + \alpha_3^3 0 = 0$,

$[b_3, f^3] = \alpha_1^3 1 + \alpha_2^3 1 + \alpha_3^3 1 = 1$. Είναι $\alpha_1^3 = 0$, $\alpha_2^3 = 0$, $\alpha_3^3 = 1$.

δηλαδή, $[x, f^3] = 0\chi^1 + 0\chi^2 + 1\chi^3 = \chi^3$

Η δυϊκή βάση, λοιπόν, της $\{b_1, b_2, b_3\}$, αποτελείται από τις απεικονίσεις $\{f^1, f^2, f^3\}$, όπου $[x, f^1] = \chi^1 - \chi^2$, $[x, f^2] = \chi^2 - \chi^3$, $[x, f^3] = \chi^3$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 4. α) Η δυϊκή βάση της κανονικής βάσης του $\mathbf{V}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbf{V}'$. β) Ο $\mathbf{V}'$ έχει διάσταση την ίδια με τον $\mathbf{V}$, άρα είναι ισόμορφος του $\mathbf{V}$ (βλέπε ενότητα "Γραμμικές συναρτήσεις").
γ) Ισχύει ότι $(\mathbf{V}')' = \mathbf{V}$. Πράγματι, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι, το σύμβολο $[x_0, f]$ όπου το $x_0 \in \mathbf{V}$, όταν το $f \in \mathbf{V}'$, παριστά ένα γραμμικό συναρτησιοειδές, που ορίζεται πάνω στις f, και είναι εκείνη η συνάρτηση f_0', που η τιμή της επί της f, είναι η $[x_0, f]$. Είναι, συνεπώς, ένα στοιχείο του χώρου $\mathbf{V}''$. Το γεγονός ότι οι χώροι $\mathbf{V}$, $\mathbf{V}'$, $(\mathbf{V}')' = \mathbf{V}''$ έχουν την ίδια διάσταση, μας εξασφαλίζει ότι είναι ισόμορφοι. Έχουμε, λοιπόν, το μεταθετικό διάγραμμα, το οποίο εξασφαλίζει την ταυτοποίηση της $f_0' \in \mathbf{V}''$ με το $x_0 \in \mathbf{V}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{V} \ni x_0 \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & f_0' \in \mathbf{V}'' \arrow[d] \\
 & {[x_0, f] \in F}
\end{tikzcd}$$

2. Μετασχηματισμός των συντεταγμένων. Έστω η γραμμική μορφή $f \in \mathbf{V}'$, όπου το $x \in \mathbf{V}$ έχει την έκφραση στην βάση $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ του $\mathbf{V}$, $x = \chi^1 a_1 + \ldots + \chi^n a_n$. Είναι, τότε, $[x, f] = \chi^i [a_i, f] = \alpha_i \chi^i$, όπου $[a_i, f] = \alpha_i$. Από την βάση $\{a_1, \ldots, a_n\}$ του $\mathbf{V}$, περνάμε στην νέα βάση $\{b_1, \ldots, b_n\}$ του $\mathbf{V}$ χρησιμοποιώντας τον γραμμικό

μετασχηματισμό $b_i = \rho_{ij} a_j$ (1), $\det(\rho_{ij}) \neq 0$. Στην νέα αυτή βάση, η γραμμική μορφή έχει την έκφραση $[x, f] = \psi^i [b_i, f] = \beta_i \psi^i$, όπου $[b_i, f] = \beta_i$ και $x = \psi^i b_i$. Ζητάμε να εκφράσουμε τους νέους συντελεστές β_i της γραμμικής μορφής f, συναρτήσει των αρχικών συντελεστών της α_i. Είναι, $\beta_i = [b_i, f] = [\rho_{ij} a_j, f] = \rho_{ij} [a_j, f] = \rho_{ij} \alpha_j$. Οι συντελεστές, συνεπώς, της γραμμικής μορφής μετασχηματίζονται σύμφωνα με τις σχέσεις $\beta_i = \rho_{ij} \alpha_j$ (2).
Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f παραμένει αναλλοίωτος ως προς τους μετασχηματισμούς αυτούς (2). Θα δείξουμε, δηλαδή, ότι ισχύει $[\chi^i a_i, f] = [\psi^j b_j, f]$, όπου το $x \in \mathbf{V}$ έχει τις δύο διαφορετικές εκφράσεις $x = \chi^i a_i$ και $x = \psi^j b_j$ στις βάσεις $\{a_1, \ldots, a_n\}$ αντίστοιχα $\{b_1, \ldots, b_n\}$ του **V**. Πράγματι, είναι, $[x, f] = \psi^i \beta_i = (\rho_{ij} \alpha_j) \psi^i$. Όμως, οι τελικές συντεταγμένες ψ^i του x, συνδέονται με τις αρχικές του συντεταγμένες χ^i, με τις σχέσεις (βλέπε ενότητα γραμμικές συναρτήσεις, §5) $\psi^i = \sigma^i{}_j \chi^j$. Είναι, λοιπόν, και $\psi^i \beta_i = (\rho_{ij} \alpha_j)(\sigma^i{}_k \chi^k) = (\rho_{ij} \sigma^i{}_k) \alpha_j \chi^k = \delta^k_j \alpha_j \chi^k = \alpha_j \chi^j$.

3. Διγραμμικές μορφές. Μία απεικόνιση $f : \mathbf{U} \oplus \mathbf{V} \to F$ γραμμική και ως προς τα δύο της ορίσματα $x \in \mathbf{U}$ και $y \in \mathbf{V}$, όπου **U**, **V** διανυσματικοί χώροι με διαστάσεις m και n αντιστοίχως, καλείται διγραμμική μορφή. Το σύνολο των διγραμμικών μορφών, θα το συμβολίζουμε με $\mathcal{B}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 5. Φανερά, η διγραμμική μορφή που ορίζεται από την σχέση, $f(x, y) = \alpha_1 f_1(x, y) + \alpha_2 f_2(x, y)$, όπου $f_1, f_2 \in \mathcal{B}$, είναι και αυτή διγραμμική μορφή. Το σύνολο $\mathcal{B}$, συνεπώς, των διγραμμικών μορφών επί του χώρου $\mathbf{U} \oplus \mathbf{V}$ είναι διανυσματικός χώρος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. α) Η $w(x, f) = [x, f]$ είναι μία διγραμμική μορφή επί του χώρου $\mathbf{V} \oplus \mathbf{V}'$. β) Αν $f \in U'$ και $g \in \mathbf{V}'$, τότε η συνάρτηση που ορίζεται από την σχέση $w = f(x)g(y)$, όπου $x \in \mathbf{U}$ και $y \in \mathbf{V}$, είναι μία διγραμμική μορφή επί του χώρου $\mathbf{U} \oplus \mathbf{V}$.

Θεωρούμε, τώρα, την βάση $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ του **U**, και την βάση $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ του **V** και μία διγραμμική μορφή w επί του $\mathbf{U} \oplus \mathbf{V}$. Έστω τα $x = \chi^i u_i$, $1 \le i \le m$, και $y = \psi^j v_j$ $1 \le j \le n$. Είναι, τότε, $w(\chi^i u_i, \psi^j v_j) = \alpha_{ij} \chi^i \psi^j$, όπου οι $m \times n$ συντελεστές $\alpha_{ij} = w(u_i, v_j) \in F$. Ισχύει και το αντίστροφο: Δοθέντων των $m \times n$ στοιχείων $\alpha_{ij} \in F$, η σχέση $w(\chi^i u_i, \psi^j v_j) = \alpha_{ij} \chi^i \psi^j$ ορίζει μία διγραμμική μορφή επί του $\mathbf{U} \oplus \mathbf{V}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Το εσωτερικό γινόμενο (βλέπε "Γραμμικές Απεικονίσεις" §7) των διανυσμάτων $x, y \in \mathbf{V}(\mathbb{R})$ είναι μία διγραμμική μορφή. Εφ' όσον για τον ορισμό του έχει χρησιμοποιηθεί η κανονική βάση $\{e_i\}$, $1 \le i \le n$ του **V**, μπορούμε να γράφουμε και $w(x, y) = xIy^t$, I ο μοναδιαίος πίνακας, και $x = \chi_1 e_1 + \ldots + \chi_n e_n = (\chi_1, \ldots, \chi_n) \in \mathbb{R}^n$, το x νοείται και σαν ένας $1\times n$ πίνακας, $y=\psi_1 e_1+\ldots+\psi_n e_n=(\psi_1,\ldots,\psi_n)\in \mathbf{R}^n$, το y^t ο ανάστροφος πίνακας του $1\times n$ πίνακα x.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. Η διγραμμική μορφή $f(x,y)=\chi_1\psi_1+2\chi_1\psi_2+6\chi_2\psi_2+8\chi_3\psi_2$ γράφεται και $f(x,y)=\begin{pmatrix}\chi_1 & \chi_2 & \chi_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 6 & 4\\ 4 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi 3\end{pmatrix}=xAy^t$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 6. α) Η σχέση $w(\chi^i u_i,\psi^j v_j)=\alpha_{ij}\chi^i\psi^j$ δηλώνει ότι μία διγραμμική μορφή παρίσταται από ένα ομογενές πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς τις $2n$ μεταβλητές χ^i,ψ^j, $1\le i,j\le n$. Ο $m\times n$ πίνακας (α_{ij}) είναι ο πίνακας των συντελεστών της διγραμμικής μορφής w, ως προς τις βάσεις $\{u_1,\ldots,u_n\}$ και $\{v_1,\ldots,v_n\}$.

Θα ορίσουμε, τώρα, μία βάση του $\mathcal{B}$. Προς τούτο, θεωρούμε τις βάσεις $\{u_1,\ldots,u_n\}$ και $\{v_1,\ldots,v_n\}$ των **U** και **V** αντίστοιχα, και θεωρούμε τις $m\times n$ διγραμμικές μορφές που ορίζονται από τις σχέσεις $w_{pq}(u_i,v_j)=\delta_{ip}\delta_{jq}$. Οι διγραμμικές αυτές μορφές είναι α) γραμμικά ανεξάρτητες. Πράγματι, μία σχέση της μορφής $\alpha_{pq}w_{pq}=0$, όπου, $1\le p\le m$ και $1\le q\le n$, συνεπάγεται και τις $m\times n$ σχέσεις $\alpha_{pq}\delta_{ip}\delta_{jq}=\alpha_{ij}=0$. Εξ' άλλου, β) το τυχόν $w\in\mathcal{B}$ έχει την έκφραση $w(x,y)=\xi^i\eta^j\alpha_{ij}=\alpha_{pq}w_{pq}(x,y)$, όταν $x=\xi^i u_i$, $y=\eta^j v_j$, και, ως εκ τούτου, $w_{pq}(x,y)=\xi^i\eta^j\delta_{ip}\delta_{jq}=\xi_p\eta_q$.

β) $\forall x\in \mathbf{V}$, ισχύει ότι $w(0,x)=w(x,0)=0$.

Περιοριζόμαστε, τώρα, στην περίπτωση που οι διγραμμικές μορφές μας ορίζονται επί του $\mathbf{V}=\mathbf{V}\oplus\mathbf{V}$. Με $\{v_1,\ldots,v_n\}$ θα συμβολίζουμε μία βάση του **V**. Είναι, τότε, $\dim\mathcal{B}=n^2$.

Ορισμός. Μία διγραμμική μορφή $w\in\mathcal{B}$ λέγεται ***συμμετρική*** ανν $w(x,y)=w(y,x)$ και ***αντισυμμετρική*** ανν $w(x,y)=-w(y,x)$, για κάθε $x,y\in\mathbf{V}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 7. α) Ο πίνακας (α_{ij}) μιας συμμετρικής διγραμμικής μορφής, είναι συμμετρικός, δηλαδή, ισχύει ότι, $\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$. Ο πίνακας (α_{ij}) μιας αντισυμμετρικής διγραμμικής μορφής, είναι αντισυμμετρικός, δηλαδή, ισχύει ότι, $\alpha_{ij}=-\alpha_{ji}$. Στην περίπτωση αυτή, τα διαγώνια στοιχεία $\alpha_{ii}=0$.

β) Οι συμμετρικές και οι αντισυμμετρικές μορφές σχηματίζουν υποχώρους του $\mathcal{B}$. Για να βρούμε τις διαστάσεις των υποχώρων αυτών, κατασκευάζουμε βάσεις ως εξής:

Για τον υπόχωρο $\mathcal{B}^+$ των συμμετρικών διγραμμικών μορφών. Υπενθυμίζουμε ότι, ουσιαστικά μία συμμετρική διγραμμική μορφή, δεν είναι τίποτα άλλο, από ένα συμμετρικό ομογενές πολυώνυμο ως προς τις μεταβλητές $\chi_1,\ldots\chi_n$, $\psi_1,\ldots\psi_n$. Για παράδειγμα, αν λάβουμε $n=3$, έχουμε το πολυώνυμο

$$\alpha_{11}\chi_1\psi_1+\alpha_{22}\chi_2\psi_2+\alpha_{33}\chi_3\psi_3+\alpha_{12}\chi_1\psi_2+\alpha_{13}\chi_1\psi_3+\alpha_{21}\chi_2\psi_1+\alpha_{31}\chi_3\psi_1+\alpha_{23}\chi_2\psi_3+\alpha_{32}\chi_3\psi_2$$
και επειδή $\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$, $1\le i\le 3$ και $1\le j\le 3$, το
$$\alpha_{11}\chi_1\psi_1+\alpha_{22}\chi_2\psi_2+\alpha_{33}\chi_3\psi_3+\alpha_{12}(\chi_1\psi_2+\chi_2\psi_1)+\alpha_{13}(\chi_1\psi_3+\chi_2\psi_3)+\alpha_{23}(\chi_2\psi_3+\chi_3\psi_2)$$
Παρατηρούμε ότι, στην γενική περίπτωση, η συμμετρική διγραμμική μορφή είναι δυνατόν να γραφεί $w(x,y)=\sum_{i<j}\alpha_{ij}(\chi_i\psi_j+\chi_j\psi_i)+\sum_k\alpha_{kk}\chi_k\psi_k$. Ορίζουμε, συνεπώς, τις μορφές $w_{ij}(x,y)=\chi_i\psi_j+\chi_j\psi_i$ αν $i\neq j$, $w_{kk}(x,y)=\chi_k\psi_k$, οι οποίες και αποτελούν βάση του υποχώρου των συμμετρικών διγραμμικών μορφών. Το πλήθος των στοιχείων της βάσεως αυτής είναι $\binom{n}{2}+n=\frac{n!}{2!(n-2)!}+n=\frac{n(n-1)}{2}+n=\frac{1}{2}n(n+1)$.

Για τον υπόχωρο $\mathcal{B}^-$ των αντισυμμετρικών διγραμμικών μορφών. Στην περίπτωση αυτή, η τυχούσα αντισυμμετρική διγραμμική μορφή παρίσταται από ένα πολυώνυμο της μορφής $\sum_{p<q}\alpha_{pq}(\chi_p\psi_q-\chi_q\psi_p)$, οπότε και η αντισυμμετρική μορφή έχει την έκφραση, $w(x,y)=\sum_{p<q}\alpha_{pq}(\chi_p\psi_q-\chi_q\psi_p)$. Ορίζουμε, συνεπώς, τις μορφές $w_{pq}(x,y)=\chi_p\psi_q-\chi_q\psi_p$, που αποτελούν και βάση του υποχώρου. Το πλήθος των στοιχείων της βάσεως αυτής είναι $\binom{n}{2}=\frac{n!}{2!(n-2)!}=\frac{1}{2}n(n-1)$.

Πρόταση. Ισχύει ότι, $\mathcal{B}=\mathcal{B}^+\oplus\mathcal{B}^-$.

Απόδειξη. Η $w\in\mathcal{B}$ γράφεται $w(x,y)=\frac{1}{2}[w(x,y)+w(y,x)]+\frac{1}{2}[w(x,y)-w(y,x)]$, είναι δηλαδή άθροισμα συμμετρικής και αντισυμμετρικής διγραμμικής μορφής. Εξ' άλλου, μία διγραμμική μορφή είναι ταυτόχρονα συμμετρική και αντισυμμετρική, μόνον στην περίπτωση, που αυτή είναι η μηδενική. Το σύνολο συνεπώς $\{w_{ij},w_{pq}\}$ των στοιχείων των βάσεων των υποχώρων $\mathcal{B}^+$ και $\mathcal{B}^-$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Άρα, σύμφωνα με το Πόρισμα της §5, ενότητα "Γραμμικοί Χώροι", $\mathcal{B}=\mathcal{B}^+\oplus\mathcal{B}^-$.

4. Μετασχηματισμός των συντεταγμένων. Θεωρούμε τις βάσεις $\{v_1,\dots,v_n\}$ και $\{v_1',\dots,v_n'\}$ του **V**. Θα καλούμε την πρώτη "αρχική" και την δεύτερη "τελική". Αν $v_i'=\rho_{ij}v_j$ οι σχέσεις που συνδέουν την αρχική με την τελική βάση, και $w\in\mathcal{B}$, ζητάμε να βρούμε τον τρόπο μεταβολής των συντελεστών $\alpha_{ij}\in F$ του πολυωνύμου $w(\chi_i v_i,\psi_j v_j)=\alpha_{ij}\chi_i\psi_j$, όπου $\alpha_{ij}=w(v_i,v_j)$, όταν εκφράζουμε αυτό στην τελική βάση. Είναι, βέβαια, $w(x,y)=\alpha_{ik}\chi_i\psi_k=\alpha_{ik}'\chi_i'\psi_k'$, όπου $\alpha_{ik}'=w(v_i',v_k')$ και $x=\chi_i'v_i'$, $y=\psi_k'v_k'$. Άρα και $\alpha_{ik}'=w(v_i',v_k')=w(\rho_{ij}v_j,\rho_{kl}v_l)=\rho_{ij}\rho_{kl}w(v_j,v_l)$, δηλαδή, έχουμε ότι, $\alpha_{ik}'=\alpha_{jl}\rho_{ij}\rho_{kl}$. Θέτουμε, $\gamma_{jk}=\alpha_{jl}\rho_{kl}=\rho_{kl}\alpha_{jl}$, οπότε είναι, $\alpha_{ik}'=\rho_{ij}\gamma_{jk}$. Θεωρούμε, τώρα, ότι τα στοιχεία α, ρ και γ, είναι στοιχεία των πινάκων A, P και C αντίστοιχα. Έχουμε, τότε τις σχέσεις $C=AP^t$ και $A'=PC=PAP^t$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 8. Οι πίνακες P και P^t είναι μη ιδιάζοντες πίνακες (βλέπε ενότητα "Πίνακες" §2). Η τάξη (rank) συνεπώς του πίνακα A της διγραμμικής μορφής w, είναι ίδια με αυτήν του πίνακα A' (βλέπε ενότητα "Πίνακες" §4).

Ορισμός. ***Τάξη*** (rank) της διγραμμικής μορφής w είναι η τάξη του πίνακά της.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 9. Για την ορίζουσα Δ του πίνακα A και την ορίζουσα Δ' του πίνακα A', παρατηρούμε ότι έχουμε $\Delta' = \Delta\,(\det P)^2$.

5. Σχέσεις γραμμικών μετασχηματισμών, πινάκων και μορφών. Ένας γραμμικός μετασχηματισμός $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ είναι ισοδύναμος με το σύστημα

$$\psi^1 = \alpha_1^1\chi^1 + \alpha_2^1\chi^2 + \ldots + \alpha_n^1\chi^n$$
$$\psi^2 = \alpha_1^2\chi^1 + \alpha_2^2\chi^2 + \ldots + \alpha_n^2\chi^n$$
$$\ldots$$
$$\psi^n = \alpha_1^n\chi^1 + \alpha_2^n\chi^2 + \ldots + \alpha_n^n\chi^n$$

το οποίο δίδει και την αντιστοιχία $\mathbf{V} \ni (\chi^1, \chi^2, \ldots, \chi^n) \mapsto (\psi^1, \psi^2, \ldots, \psi^n) \in \mathbf{V}$. Το σύστημα αυτό, συντομογραφικά, το γράφουμε $\psi^i = \alpha_j^i\chi^j$, ή ακόμα, σε μορφή πινάκων, $y = Ax$, όπου $A = (\alpha_j^i)$ είναι ο πίνακας του μετασχηματισμού, και όταν $\det(\alpha_j^i) \neq 0$, ο μετασχηματισμός είναι ένα προς ένα. (Βλέπε ενότητα "Γραμμικοί Μετασχηματισμοί").

Αν, τώρα, μας δοθεί η διγραμμική μορφή $w(x, y) = \alpha_{ij}\chi^i\psi^j$, με $\det(\alpha_{ij}) \neq 0$, και μία τυχούσα γραμμική μορφή $f(x) = \beta_i\chi^i$, έχουμε την δυνατότητα, λύνοντας το σύστημα $\beta_i = \alpha_{ij}\psi^j$, να προσδιορίσουμε το $y = (\psi^1, \psi^2, \ldots, \psi^n) \in \mathbf{V}$, έτσι ώστε, η $w(x, y)$ να συμπίπτει με την $f(x) = w(x, b)$, όπου $b = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbf{V}$. Μία διγραμμική μορφή, περιλαμβάνει, συνεπώς, όλες τις γραμμικές μορφές, που ορίζονται πάνω στον ίδιο χώρο.

Την διγραμμική μορφή $w(x, y) = \alpha_{ij}\chi^i\psi^j$ μπορούμε, ακόμα, να την γράψουμε και ως εξής: $w(x, y) = xAy^t$, όπου x, y οι $1 \times n$ πίνακες, που έχουν για στοιχεία τους τις συντεταγμένες χ^i, ψ^j των $x,\ y \in \mathbf{V}$.

6. Τετραγωνικές μορφές. Μία τετραγωνική μορφή $q(x, x) = \alpha_{ij}\chi_i\chi_j$ προκύπτει από μία συμμετρική διγραμμική μορφή, αν θέσουμε $y = x$. Τούτο είναι ισοδύναμο με το να λέμε ότι ο πίνακας $A = (\alpha_{ij})$ της διγραμμικής μορφής $w(x, y)$ είναι συμμετρικός, δηλαδή $A^t = A$, σε κάθε βάση του χώρου.

Πράγματι αν $\alpha_{ij} = w(a_i, a_j) = w(a_j, a_i) = \alpha_{ji}$, τότε και $y = x$.

Η συμμετρική διγραμμική μορφή, από την οποία προκύπτει η τετραγωνική μορφή, καλείται ***πολική*** της τετραγωνικής μορφής. Αν δοθεί η τετραγωνική μορφή, τότε η πολική της, είναι μονοσήμαντα ορισμένη. Έστω, λοιπόν, ότι η $q(x, x)$ είναι γνωστή, και ότι η άγνωστη πολική της είναι η $w(x, y)$.

Έχουμε, $q(x + y, x + y) = w(x + y, x + y) = w(x, x) + w(x, y) + w(y, x) + w(y, y)$
$$= q(x, x) + 2w(x, y) + q(y, y).$$

Άρα, $w(x, y) = \dfrac{1}{2}\{q(x + y, x + y) - q(x, x) - q(y, y)\}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 7. α) Κάθε ομογενές και συμμετρικό πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς τις n μεταβλητές χ_i, $1 \le i$, $f(x)$,. (είναι, δηλαδή, $f(\alpha x) = \alpha^2 f(x)$), είναι μία τετραγωνική μορφή.

Αν $\{e_i, 1 \le i \le n\}$ η κανονική βάση του χώρου $\mathbf{V} = \{(\chi_1, \ldots, \chi_n), \chi_i \in F\}$, και $\alpha_{ij} = q(e_i, e_j)$, τότε και $q(x,x) = \alpha_{ii}\chi_i^2 + 2\alpha_{ij}\chi_i\chi_j$, όπου $1 \le i < j \le n$.

β) Τετραγωνική μορφή επί του χώρου L είναι και η απεικόνιση $f(x) = \int_0^1 [x(\tau)]^2 d\tau$. Φανερά, ισχύει ότι, $f(\alpha x) = \alpha^2 f(x)$. Η πολική της διγραμμική μορφή, είναι η $\int_0^1 x(\tau)y(\tau)d\tau = \frac{1}{2}\{f(x+y, x+y) - f(x,x) - f(y,y)\}$.

Αν σε κάποια βάση, όλοι οι συντελεστές $\alpha_{ij} = 0$, για $i \ne j$, η τετραγωνική μορφή $q(x,x)$ λαβαίνει την ***κανονική της έκφραση***: $q(x,x) = \alpha_{11}\chi_1^2 + \alpha_{22}\chi_2^2 + \ldots + \alpha_{nn}\chi_n^2$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 8. Όταν μία τετραγωνική μορφή λάβει την κανονική της έκφραση, τότε και η πολική της διγραμμική μορφή έχει μετατραπεί στην ***"διαγώνια"*** μορφή της $w(x,y) = \alpha_{ii}\chi^i\psi^i$, $1 \le i \le n$, μιά και ο πίνακας της τετραγωνικής μορφής, είναι ο ίδιος με τον πίνακα της πολικής της. Στην συγκεκριμένη περίπτωση, ο πίνακας αυτός, είναι ένας διαγώνιος πίνακας. Αν θέλουμε, συνεπώς, να βρούμε την ***τάξη*** της τετραγωνικής μορφής που έχει πίνακα Α, (και που δεν είναι άλλη από την τάξη της πολικής της), δεν έχουμε παρά να εκτελέσουμε έναν μετασχηματισμό των συντεταγμένων, με πίνακα Ρ έτσι ώστε, ο πίνακας $A' = PAP^t$ που θα προκύψει να είναι διαγώνιος (βλέπε ενότητα "Πίνακες", §2.
Επειδή η τάξη του Α΄ είναι ίδια με την τάξη του Α, ο διαγώνιος πίνακας που θα προκύψει, θα έχει το πολύ n μη μηδενικά διαγώνια στοιχεία, μιά και $\operatorname{rank}A \le n$.

Ορισμός. Δύο τετραγωνικές μορφές επί του ιδίου σώματος F καλούνται ***ισοδύναμες***, ανν έχουν την ίδια τάξη.

7. Αναγωγή τετραγωνικής μορφής στην κανονική της έκφραση.

Α. Μέθοδος του Lagrange. Την τετραγωνική μορφή $q(x,x) = \alpha_{ii}\chi_i^2 + 2\alpha_{ij}\chi_i\chi_j$ την γράφουμε ως εξής: $q(x,x) = \alpha_{11}\chi_1^2 + 2\alpha_{12}\chi_1\chi_2 + \ldots + 2\alpha_{1n}\chi_1\chi_n + g(\chi_2, \ldots, \chi_n)$ (1) όπου η g είναι μία τετραγωνική μορφή, που δεν περιέχει την μεταβλητή χ_1. Η παρατήρηση αυτή, μας επιτρέπει να δουλέψουμε επαγωγικά.

i). Για $n = 1$ η τετραγωνική μορφή $q(x,x) = \alpha_{11}\chi_1^2$ είναι στην κανονική της έκφραση.

ii) Επαγωγική υπόθεση: Για $n = n-1$, η $q(x,x)$ μετασχηματίζεται στην

$$q(x,x) = \alpha_{11}\zeta_1^2 + \ldots + \alpha_{n\text{-}1n\text{-}1}\zeta_{n-1}^2).$$

iii) Θεωρούμε τον μετασχηματισμό

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \alpha_{11}\chi_1 + \alpha_{12}\chi_2 + \ldots + \alpha_{1n}\chi_n \\ \psi_2 &= \chi_2 \\ &\cdots \\ \psi_n &= \chi_n \end{aligned} \qquad \text{με πίνακα} \qquad Q = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

και με $\det Q = \alpha_{11} \neq 0$. Ο μετασχηματισμός μας, είναι λοπόν, ένα προς ένα και αντιστρέψιμος. Είναι, $\psi_1^2 = (\alpha_{11}\chi_1 + \alpha_{12}\chi_2 + \ldots + \alpha_{1n}\chi_n)^2$ ή

$$\frac{1}{\alpha_{11}}\psi_1^2 = \alpha_{11}\chi_1^2 + 2\alpha_{12}\chi_1\chi_2 + \ldots + 2\alpha_{1n}\chi_1\chi_n)^2 + \varphi(\chi_2, \ldots, \chi_n).$$

Η (1), τώρα, γράφεται, $q(x,x) = \frac{1}{\alpha_{11}}\psi_1^2 + g(\chi_2, \ldots, \chi_n) - \varphi(\chi_2, \ldots, \chi_n)$ ή

$$q(x,x) = \frac{1}{\alpha_{11}}\psi_1^2 + g(\psi_2, \ldots, \psi_n) - \varphi(\psi_2, \ldots, \psi_n) = \frac{1}{\alpha_{11}}\psi_1^2 + y(\psi_2, \ldots, \psi_n).$$

Η υπόθεση της επαγωγής, μας λεει ότι, η γραμμική μορφή y, είναι δυνατόν να μετασχηματισθεί στην κανονική της διαγώνιο έκφραση, εκτελώντας τον γραμμικό μετασχηματισμό $\zeta_k = \rho_{k\lambda}\psi_\lambda$, $2 \leq k \leq n$.

Είναι, λοιπόν, $y(\psi_2, \ldots, \psi_n) = \beta_{22}\zeta_2^2 + \ldots + \beta_{nn}\zeta_n^2$.

Άρα μετασχηματίζουμε τις μεταβλητές χ_i σε ψ_i και στην συνέχεια, τις ψ_i σε ζ_i με τον μετασχηματισμό $\zeta_1 = \psi_1$, $\zeta_k = \rho_{k\lambda}\psi_\lambda$, για $2 \leq k \leq n$, και η τετραγωνική μορφή μετασχηματίζεται στην $q(x,x) = \frac{1}{\alpha_{11}}\zeta_1^2 + \beta_{22}\zeta_2^2 + \ldots + \beta_{nn}\zeta_n^2)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Για να δουλέψει η μέθοδος αυτή, θα πρέπει να υπάρχει ένας τουλάχιστον συντελεστής $\alpha_{ii} \neq 0$. Στην περίπτωση όμως που όλοι αυτοί οι συντελεστές είναι μηδενικοί, εκτελούμε τον μετασχηματισμό

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \chi_1 + \chi_2 + 0\chi_3 \cdots + 0\chi_n \\
\psi_2 &= \chi_1 - \chi_2 + 0\chi_3 \cdots + 0\chi_n \\
\psi_3 &= \qquad\quad \chi_3 \\
&\qquad\quad \cdots \\
\psi_n &= \qquad\qquad\quad \chi_n
\end{aligned}$$

οπότε αναγώμεθα στην προηγούμενη περίπτωση.

Β. Μέθοδος Jacobi. Για την τετραγωνική μορφή $q(x,x) = \alpha_{ij}\chi_i\chi_j$, [όπου βέβαια, είναι $\alpha_{ij} = q(a_i, a_j), \{a_1, \ldots, a_n\}$ βάση του χώρου **V**], με $\mathrm{rank}A = r \leq n$, υποθέτουμε ότι ο πίνακας A είναι έτσι ώστε, όλες οι ορίζουσες $\Delta_1 = \alpha_{11}$, $\Delta_2 = \det\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}, \ldots \Delta_r$, οι οποίες έχουν ως διαγώνια στοιχεία τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα A, είναι μη μηδενικές. Θα προσδιορίσουμε μία νέα βάση $\{b_1, \ldots, b_n\}$ του **V**, στην οποία η έκφραση της τετραγωνικής μορφής θα είναι η διαγώνια. Για τον σκοπό αυτό, εκτελούμε τον μετασχηματισμό:

$$\begin{aligned}
b_1 &= \rho_{11}a_1 \\
b_2 &= \rho_{21}a_1 + \rho_{22}a_2 \\
&\cdots \\
b_r &= \rho_{r1}a_1 + \ldots + \rho_{rr}a_r
\end{aligned} \qquad (2)$$

Για να έχουμε την τετραγωνική μορφή στην κανονική της έκφραση, θα πρέπει στην βάση $\{b_1,\ldots,b_n\}$ να ισχύουν οι σχέσεις $q(b_i,b_j)=0$ (3). Όμως, είναι, για $1\le i\le j-1$ και για κάθε $1\le j\le n$, $q(b_i,b_j)=q(\rho_{i1}a_1+\ldots+\rho_{ij-1}a_{j-1},b_j)=0$ ή και $\rho_{i1}q(a_1,b_j)+\ldots+\rho_{ij}q(a_{j-1},b_j)=0$ (4). Συνεπώς, οι (3) ισχύουν τότε και μόνον, όταν είναι $q(a_i,b_j)=0$ όπου $1\le i\le j-1$ και $1\le j\le r$ (5).

Οι ισότητες αυτές, μου επιβάλουν οι συντελεστές των "διπλασίων γινομένων" να είναι μηδέν. Χάριν απλότητας, επιβάλουμε να έχουμε μονάδες για τους συντελεστές των "τετραγώνων". Θεωρούμε, δηλαδή, και τις ισότητες $q(a_j,b_j)=1$, $1\le j\le r$. Μπορούμε, τώρα, να υπολογίσουμε όλους τους συντελεστές ρ_{ij} του παραπάνω μετασχηματισμού.

Για $r=1$, έχουμε ότι, $1=q(a_1,b_1)=\rho_{11}q(a_1,a_1)=\rho_{11}\alpha_{11}$, απ' όπου προκύπτει ότι $\rho_{11}=\dfrac{1}{\alpha_{11}}=\dfrac{\Delta_0}{\Delta_1}$.

Για $r=2$, έχουμε ότι, για $i=1$, $j=1,2$, την $q(a_1,b_2)=\rho_{21}q(a_1,a_1)+\rho_{22}q(a_1,a_2)=0$, ή $\rho_{21}\alpha_{11}+\rho_{22}\alpha_{21}=0$, την οποία λαβαίνουμε σαν πρώτη εξίσωση του συστήματός μας. Για δεύτερη λαβαίνουμε αυτήν που προκύπτει από την σχέση $q(a_2,b_2)=1$, που είναι η $q(a_2,b_2)=\rho_{21}q(a_2,a_1)+\rho_{22}q(a_2,a_2)=1$, ή $\rho_{21}\alpha_{21}+\rho_{22}\alpha_{22}=1$. Καταλήγουμε, λοιπόν, στο σύστημα

$$\begin{aligned}\alpha_{11}\rho_{21}+\alpha_{21}\rho_{22}&=0\\ \alpha_{21}\rho_{21}+\alpha_{22}\rho_{22}&=1\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι, $\rho_{22}=\dfrac{\Delta_1}{\Delta_2}$.

Για $r=k$, έχουμε ότι, για $i=1,\ldots,k\text{-}1$, $j=1,\ldots,k$, ισχύουν οι σχέσεις $q(a_i,b_j)=0$ όπου $1\le i\le j-1$ και $1\le j\le k$, στις οποίες προσθέτουμε και την $q(a_k,b_k)=1$. Το σύστημα στο οποίο καταλήγουμε, είναι το

$$\begin{aligned}\alpha_{11}\rho_{k1}+\alpha_{12}\rho_{k2}+\ldots+\alpha_{1k}\rho_{kk}&=0\\ \alpha_{21}\rho_{k1}+\alpha_{22}\rho_{k2}+\ldots+\alpha_{2k}\rho_{kk}&=0\\ &\ldots\\ \alpha_{k1}\rho_{k1}+\alpha_{k2}\rho_{k2}+\ldots+\alpha_{kk}\rho_{kk}&=0\end{aligned}$$

απ' όπου υπολογίζονται οι συντελεστές του μετασχηματισμού (2). Παρατηρούμε ότι $\rho_{kk}=\dfrac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}$, με $\Delta_k\ne 0$ για κάθε $1\le k\le r$. Η ορίζουσα D του πίνακα P του μετασχηματισμού (2), είναι η $D=\rho_{11}\rho_{22}\cdots\rho_{nn}=\dfrac{\Delta_0}{\Delta_1}\dfrac{\Delta_1}{\Delta_2}\cdots\dfrac{\Delta_{r\text{-}1}}{\Delta_r}=\dfrac{1}{\Delta_r}\ne 0$, και συνεπώς, ο μετασχηματισμός μας είναι μη ιδιάζων (βλέπε ενότητα Πίνακες, §2.)

Η τετραγωνική μορφή, που στην βάση $\{a_1,\ldots,a_n\}$ έχει την έκφραση $q(x,x)=\alpha_{ij}\chi_i\chi_j$, στην βάση $\{b_1,\ldots,b_n\}$ λαβαίνει την κανονική της έκφραση, που είναι η

$$q(x,x)=\frac{\Delta_0}{\Delta_1}\chi_1^2+\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\chi_2^2+\ldots+\frac{\Delta_{r\text{-}1}}{\Delta_r}\chi_r^2 \qquad (6).$$

Ο πίνακας της (6) είναι ένας διαγώνιος πίνακας, με διαγώνια στοιχεία τους συντελεστές $\lambda_i = \dfrac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}$, $1 \le i \le r$, της (6).

8. Ισοδύναμες τετραγωνικές μορφές. Έστω ότι, η $q(x,x)$ έχει λάβει, σε κάποια βάση, την κανονική της έκφραση. Αν A ο πίνακας της $q(x,x)$, και $\text{rank}A = r \le n$, τότε, οι μη μηδενικοί συντελεστές της τετραγωνικής μορφής, θα είναι r το πλήθος.
Η $q(x,x)$ γράφεται και ως εξής: $q(x,x) = \lambda_1(\chi^1)^2 + \lambda_2(\chi^2)^2 + \ldots + \lambda_r(\chi^r)^2$ (1), όπου ισχύει ότι $\lambda_i \ne 0$ όταν $1 \le i \le r$.
Ο μετασχηματισμός $\psi^i = \sqrt{|\lambda_i|}\chi^i$, $1 \le i \le r$, και $\psi^i = \chi^i$, για $r+1 \le i \le n$ μετατρέπει την $q(x,x) = \alpha_{ij}\chi^i\chi^j$ στην $q(x,x) = s_i(\psi^i)^2$, όπου $s_i = \pm 1$. Ας υποθέσουμε ότι οι όροι με θετικό πρόσημο είναι p, οπότε αυτοί με αρνητικό θα είναι $r-p$. Θα δείξουμε ότι:

Θεώρημα Αδρανείας. Δύο ισοδύναμες τετραγωνικές μορφές έχουν το ίδιο πλήθος θετικών (άρα και αρνητικών) όρων.
Απόδειξη. Έστω οι ισοδύναμες τετραγωνικές μορφές
$(\chi^1)^2 + \ldots + (\chi^p)^2 - (\chi^{p+1})^2 - \ldots - (\chi^r)^2$ και $(\psi^1)^2 + \ldots + (\psi^q)^2 - (\psi^{q+1})^2 - \ldots - (\psi^r)^2$.
Το γεγονός ότι οι τετραγωνικές αυτές μορφές είναι ισοδύναμες, σημαίνει ότι μπορούμε να τις θεωρήσουμε ότι είναι εκφράσεις μιάς και της αυτής τετραγωνικής μορφής $q(x,x)$ σε δύο διαφορετικές βάσεις $\{a_1,\ldots,a_n\}$ και $\{b_1,\ldots,b_n\}$ του χώρου **V**. Θεωρούμε τους υποχώρους **P** και **Q** του **V** που παράγονται από τα $a_1,\ldots,a_p$ και $b_{q+1},\ldots,b_n$. Για κάθε $0 \ne x \in \mathbf{P}$, φανερά, είναι $q(x,x) = (\chi^1)^2 + \ldots + (\chi^p)^2 > 0$. Επίσης για κάθε $y \in \mathbf{Q}$, $q(y,y) = -(\psi^{q+1})^2 - \ldots - (\psi^r)^2 \le 0$. Εξ' άλλου, $\mathbf{P} \cap \mathbf{Q} = \{0\}$, άρα και $\dim\mathbf{P} + \dim\mathbf{Q} \le n$, ή και $p + (n-q) \le n$, ή $p \le q$. Ανάλογα, έχουμε και την $q \le p$.

Ορισμός. Μία τετραγωνική μορφή επί του διανυσματικού χώρου **V**, $(\dim\mathbf{V} = n)$, καλείται ***"θετικά ορισμένη"*** ανν $\forall x \in \mathbf{V}, q(x,x) > 0$.

Φανερά, μία τετραγωνική μορφή της οποίας η τάξη είναι n και το σύνολο p των θετικών της όρων στην κανονική της έκφραση είναι και αυτό n, είναι θετικά ορισμένη.

Κριτήριο του Sylvester. Μία τετραγωνική μορφή είναι θετικά ορισμένη, ανν $\Delta_i > 0, 1 \le i \le n$.
Απόδειξη. Το αναγκαίο προκύπτει από την (6). Αντίστροφα, αν η q , της οποίας ο πίνακας είναι A, είναι θετικά ορισμένη, είναι δυνατόν, τότε, να βρεθεί μία κατάλληλη βάση, στην οποία ο πίνακας A' της q θα είναι ο μοναδιαίος πίνακας, οπότε, και, (βλέπε παρατήρηση 9), $\det A = \det(P^t)\det(P) = \det(P)^2 > 0$, όπου P ο πίνακας του μετασχηματισμού της αλλαγής της βάσης.

Ορίζουσα του Gram. Δίδονται $k \le n$ διανύσματα του $p_1, p_2, \ldots, p_k \in \mathbf{V}$, και η τετραγωνική μορφή $q(x,x): \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to F$. Ορίζουσα του Gram είναι η

$$G=\begin{pmatrix} q(p_1,p_1) & \cdots & q(p_1,p_k) \\ & \ddots & \\ q(p_k,p_1) & \cdots & q(p_k,p_k) \end{pmatrix}.$$

Θεώρημα. Έστω ότι η q είναι θετικά ορισμένη. Τότε $G>0$, αν τα p_i, $1\le i\le k$, είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Αν τα p_i είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε $G=0$.

Απόδειξη. α) Τα p_i είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Θεωρούμε τον χώρο που αυτά παράγουν, και περιορίζουμε την q πάνω σ' αυτόν τον χώρο. Αφού η q είναι θετικά ορισμένη, η $\Delta_k>0$. Η ορίζουσα όμως αυτή δεν είναι άλλη από την ορίζουσα του Gram.

β) Τα p_i είναι γραμμικά εξαρτημένα. Υπάρχουν τότε $0\ne\lambda^j\in F$, $1\le j\le k$, έτσι ώστε $\lambda^j p_j=0$. Άρα και $q(p_i,\lambda^j p_j)=0$, $1\le i\le k$. Το σύστημα αυτό έχει μη μηδενική λύση λ^j, και συνεπώς, η ορίζουσα των συντελεστών του είναι μηδέν.

9. Μία γενίκευση του εσωτερικού γινομένου. (Για τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου, βλέπε ενότητα "Γραμμικές απεικονίσεις" §7. Δες επίσης και την ενότητα "Γεωμετρικές Εφαρμογές §3). Οι διγραμμικές μορφές, χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες: Τις συμμετρικές, όταν, $w(x,y)=w(y,x)$, και τις αντισυμμετρικές, όταν $w(x,y)=-w(y,x)$. Η παράγραφος αυτή, ασχολείται με τις συμμετρικές διγραμμικές μορφές.

Ορισμός. Μία απεικόνιση $\mathbf{V}(F)\times\mathbf{V}(F)\ni(x,y)\to x\cdot y\in\mathbb{R}_+$ θα καλείται ***μονόμετρο*** ή ***εσωτερικό*** γινόμενο των διανυσμάτων x και y, ανν ισχύουν οι σχέσεις: 1. Συμμετρική $x\cdot y=y\cdot x$ 2. Γραμμική $(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\cdot y=\lambda_1x_1\cdot y+\lambda_2x_2\cdot y$ 3. Ο πυρήνας της είναι $\{0\}$. Άμεση συνέπεια των ιδιοτήτων αυτών είναι, το εσωτερικό γινόμενο να είναι μία συμμετρική διγραμμική μορφή με τάξη πίνακος ίση με την διάσταση του χώρου.

Αν $\{v_1,\dots,v_n\}$ τυχούσα βάση του $\mathbf{V}(\mathbb{R})$, η απεικόνιση $x\cdot y=g(x,y)=g_{ij}\chi^i\psi^j$, όπου χ^i οι συντεταγμένες του διανύσματος x, (το οποίο νοείται και ως $n\times1$ πίνακας), ψ^j οι συντεταγμένες του διανύσματος y, εκφρασμένες βάση $\{v_1,\dots,v_n\}$ του $\mathbf{V}(\mathbb{R})$ και $g_{ij}=g(v_i,v_j)=g(v_j,v_i)=g_{ji}$. Γράφουμε και $d(x,y)=x^tGy$.

Τα διανύσματα x, y είναι ***ορθογώνια,*** ανν $x\cdot y=0$. Το διάνυσμα x είναι ***ορθογώνιο στον υπόχωρο*** $\mathbf{U}=L(v_1,\dots,v_k)$ ανν είναι ορθογώνιο σε κάθε v_κ, $1\le\kappa\le k$. Δύο υπόχωροι **U** και **W** είναι ***ορθογώνιοι,*** ανν κάθε διάνυσμα του ενός, είναι ορθογώνιο σε κάθε διάνυσμα του άλλου. Η ***νόρμα*** (norm) του x, ορίζεται από την σχέση $|x|=+\sqrt{x\cdot x}$. **Προσοχή**! Η νόρμα του x, είναι δυνατόν να είναι ένας φανταστικός αριθμός.

Μετρική d, θα καλούμε κάθε τετραγωνική μορφή $d:\mathbf{V}(F)\times\mathbf{V}(F)\to\mathbb{R}_+$, που το τετράγωνό της ορίζεται από την σχέση $(x,x)=|x^2|$. Η τετραγωνική αυτή μορφή, προκύπτει από την διγραμμική μορφή "εσωτερικό γινόμενο", την οποία έχει και ως πολική, και την οποία συμβολίζουμε και αυτήν με $d(x,y)$. Μέσα στον $\mathbf{V}(\mathbb{R})$, έχουμε ότι, $(x,x)=|x|^2=g_{ij}\chi^i\chi^j$. Στην περίπτωση, που η μετρική είναι θετικά ορισμένη, στην περίπτωση, δηλαδή, που έχουμε ότι $d(x,y)\ge0$ με $d(x,y)=0$ ανν $x=y$, ισχύει τότε και η τριγωνική ανισότης $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Σε έναν Ευκλείδειο χώρο, (βλέπε ενότητα "Γεωμετρικές Εφαρμογές" §3) όπου $x = \overrightarrow{OX}$, $y = \overrightarrow{OY}$, είναι, $|\overrightarrow{XY}|^2 = \sum_{i=1}^{n} (\psi_i - \chi_i)^2$, η μετρική του χώρου, ορίζεται από την σχέση $d(x,x) = g_{ij}\chi^i\chi^j$ όπου χ^α οι συντεταγμένες του διανύσματος x, εκφρασμένες στην τυχούσα βάση $\{v_1,\ldots,v_n\}$ του $\mathbf{V}(\mathbb{R})$ και $g_{ij} = (v_i, v_j)$ το εσωτερικό γινόμενο των στοιχείων της βάσεως του **V.** Γράφουμε και $d(x,x) = x^t Gx$, εφ' όσον το διάνυσμα x νοείται και ως πίνακας $n \times 1$. Η σχέση $d(x,y) = d(y,x)$ υποχρεώνει τον πίνακα $G = (g_{ij})$ (που καλείται και ***μετρικός τανυστής*** του χώρου) να είναι συμμετρικός πίνακας και αντίστροφα, αν ο G είναι συμμετρικός, τότε $d(x,y) = d(y,x)$. Πράγματι, έχουμε ότι, $g_{ij}\chi^i\psi^j = g_{\alpha j}\chi^\alpha\psi^j = g_{\alpha i}\chi^\alpha\psi^i = g_{ji}\chi^j\psi^i$, μιά και οι αθροιζόμενοι δείκτες είναι βωβοί δείκτες. Το γεγονός ότι η d είναι γραμμική προκύπτει από τις σχέσεις :
$g_{ij}(\kappa\chi^i)\psi^j = g_{ij}\chi^i(\kappa\psi^j) = \kappa g_{ij}\chi^i\psi^j$, και $g_{ij}(\chi_1^i + \chi_2^i)\psi^j = g_{ij}\chi_1^i\psi^j + g_{ij}\chi_2^i\psi^j$. Η σχέση $d(x,y) \geq 0$ υποχρεώνει τον πίνακα G να πληροί το κριτήριο του Sylvester. Έχουμε, επαγωγικά, για $n = 1$, φανερά $g_{11} > 0$. Για $n = 2$ και $g_{11} > 0$, έχουμε ότι, $x^t Gy = g_{11}\chi^1\psi^1 + g_{12}\chi^1\psi^2 + g_{21}\chi^2\psi^1 + g_{22}\psi^2\psi^2$. Η διακρίνουσα του δευτεροβαθμίου αυτού πολυωνύμου είναι η $g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = g_{11}g_{22} - {g_{12}}^2$, και πρέπει αυτή να είναι θετική, για να έχει το πολυώνυμο το πρόσημο του g_{11}, να είναι δηλαδή, πάντα θετικό. Επαγωγικά, λαβαίνουμε το κριτήριο του Sylvester.
Θεωρούμε, τώρα, το διάνυσμα $x \in \mathbf{V}(\mathbb{R})$ και το τετράγωνο του μήκους του, $d(x,x) = x^t Gx = x^2$. Αλλάζουμε στην συνέχεια την βάση του χώρου, από $\{v_1,\ldots,v_n\}$ σε $\{v_1',\ldots,v_n'\}$. Επειδή το μήκος του x δεν μεταβάλλεται, όταν αυτό εκφράζεται στην νέα βάση, έχουμε ότι, $x^2 = (x'^t P^t)G(Px') = x'^t(P^t GP)x'$, όπου, $x' = P^{-1}x$, η νέα έκφραση του x στην βάση $\{v_1',\ldots,v_n'\}$. Στην νέα αυτή βάση, η μετρική του χώρου έχει την έκφραση $G' = P^t GP$.

10. Πλειογραμμικές μορφές. Οι μονόμετρες απεικονίσεις (μορφές) που θα θεωρούμε εδώ, θα είναι της μορφής $w^m : \mathbf{V}(F) \otimes \ldots \otimes \mathbf{V}(F) \ni (x_1,\ldots,x_m) \to w(x_1,\ldots,x_m) \in F$. Οι απεικονίσεις αυτές, θεωρούνται γραμμικές ως προς κάθε $x_i \in \mathbf{V}$. Ισχύει, δηλαδή, $w(x_1,\ldots,\alpha a + \beta b,\ldots,x_m) = \alpha w(x_1,\ldots,a,\ldots,x_m) + \beta w(x_1,\ldots,b,\ldots,x_m)$. Γράφουμε και $w \in \mathsf{L}(T_0^m)$. Οι απεικονίσεις αυτές, λέγονται ***m-μορφές*** (Προσοχή ! Το n δηλώνει την διάσταση του χώρου των συντεταγμένων του **V** επί το σώμα F, που είναι διαφορετικό, εν γένει, από το πλήθος m των ορισμάτων (= μεταβλητών) της απεικονίσεως w). Θα θεωρούμε επίσης μονόμετρες απεικονίσεις της μορφής w_q^p, όπου θα έχουμε p ορίσματα (μεταβλητές) από τον χώρο **V** και q από τον δυϊκό του χώρο **V′**. (Γενικότερα: Αρκεί να έχουμε ζεύγος χώρων **V, V′,** έτσι ώστε, ένας γραμμικός μετασχηματισμός που δρα επί τον **V** και μετασχηματίζει covariantly τα στοιχεία του και contravariantly τις συντεταγμένες των στοιχείων του, επι του **V′**, να μετασχηματίζει contravariantly τα στοιχεία του και covariantly τις συντεταγμένες των στοιχείων του.) Τις απεικονίσεις αυτές, είναι δυνατόν να τις χωρίσουμε σε δύο μεγάλες κατηγορίες:

1) Τις συμμετρικές, για τις οποίες ισχύει ότι $w(x_1,\ldots,x_m)=w(x_{p_1},\ldots,x_{p_m})$, όπου $p_1,\ldots,p_m$ μία διάταξη των δεικτών, και οι οποίες γενικεύουν το εσωτερικό γινόμενο, και 2), αυτές, για τις οποίες $w(x_1,\ldots,x_m)=-w(x_{p_1},\ldots,x_{p_m})$ όπου $p_1,\ldots,p_m$ μία περιττή διάταξη των δεικτών, και οι οποίες γενικεύουν το εξωτερικό γινόμενο.
Ιδιαίτερα, μία διγραμμική μορφή $w:\mathbf{V}(F)\times\mathbf{V}(F)\ni(x,y)\to w(x,y)\in F$ καλείται ***εξωτερική***, ανν είναι αντισυμμετρική ισχύει δηλαδή, $w(x,y)=-w(y,x)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Έστω $x=(\xi_1,\xi_2), y=(\eta_1,\eta_2)\in \mathbb{R}^2$. Ορίζουμε $w:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ως εξής $w(x,y)=\det\begin{pmatrix}\xi_1 & \eta_1\\ \xi_2 & \eta_2\end{pmatrix}=\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Στην περίπτωση, που το $y\in\mathbf{V}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο από το $x\in\mathbf{V}$, και αντιστρόφως, τότε, $w(x,y)=0$. Πράγματι είναι, $w(x,\lambda x)=-w(\lambda x,x)$ και, συνεπώς, $\forall x\in\mathbf{V}$, $\lambda w(x,x)=-\lambda w(x,x)$, και επειδή $\lambda\neq 0$, αναγκαστικά $w(x,x)=0$. Συνέπεια του γεγονότος αυτού, είναι ότι η διάσταση του χώρου **V**, είναι ίση με δύο, που είναι το πλήθος των ορισμάτων της w.

Για την γενική περίπτωση, με $\dim\mathbf{V}=n$ και πλήθος ορισμάτων $m=n$, βλέπε την ενότητα "Ορίζουσες"

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ εξωτερικού γινομένου δύο 1-μορφών επί του $\mathbb{R}^n$, τις $w^1(x_1)$ και $w^1(x_2)$, όπου $x_1,x_2\in\mathbb{R}^n=\mathbf{V}$. Το ***εξωτερικό γινόμενο*** των $w_1=w^1(x_1)$ και $w_2=w^1(x_2)$ είναι η 2-μορφή $w_1\wedge w_2:\mathbf{V}\times\mathbf{V}\to\mathbb{R}$, που ορίζεται από την ισότητα,

$$w^2(x_1,x_2)=(w_1\wedge w_2)(x_1,x_2)=\begin{vmatrix}w_1(x_1) & w_2(x_1)\\ w_1(x_2) & w_2(x_2)\end{vmatrix}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Το εξωτερικό γινόμενο των μορφών $w_1(x_1)$ και $w_2(x_2)$ συμπίπτει απολύτως, με το διπλάσιο εμβαδόν του τριγώνου, που έχει κορυφές τα σημεία $O=(0,0)$, $A=(\xi_1,\xi_2)$ και $B=(\eta_1,\eta_2)$.

Υποθέτουμε, τώρα, ότι έχουμε τον γραμμικό χώρο **V** και τον δυϊκό του $\mathbf{V}'$, με βάσεις αντίστοιχα $\{b_i\}$ και $\{f^j\}$, $1\le i,j\le n$ (βλέπε και ενότητα "Άλγεβρα Τανυστών", §6.
Σχηματίζουμε το τανυστικό γινόμενο T^p_q και υποθέτουμε ακόμα, ότι έχουμε και την γραμμική μορφή $w^p_q:T^p_q\to F$, όπου F το σώμα των πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών. Αν εκφράσουμε τα ορίσματα της γραμμικής μορφής στις βάσεις $\{b_i\}$ και $\{f^j\}$, θα λάβουμε την ισότητα

$$w=w^p_q(x_1,\ldots,x_p,y^1,\ldots,y^q)=\tau^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\chi^{j_1}_1\cdots\chi^{j_p}_p\psi^1_{i_1}\cdots\psi^q_{i_q}$$

όπου $\tau^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ είναι η τιμή της γραμμικής μορφής πάνω σε όλα τα τυπικά γινόμενα των στοιχείων των βάσεων $\{b_i\},\{f^j\}$ και $\chi^{j_1}_1\ldots\chi^{j_p}_p$, $\psi^1_{i_1}\ldots\psi^q_{i_q}$ οι συντεταγμένες των $x_1,\ldots,x_p$,και $y^1,\ldots,y^q$ στις αντίστοιχες βάσεις. Οι βάσεις όμως αυτές είναι αντίστροφες. Η τιμή συνεπώς της γραμμικής μορφής είναι είτε μηδέν είτε ένα, ανάλογα με την εμφάνιση τυπικού γινομένου (= ζεύγους) με ίδιους είτε διαφορετικούς άνω και κάτω δείκτες. Είναι, λοιπόν, $w_q^p(x_1,\ldots,x_p,y^1,\ldots,y^q)=\tau_{j_1\ldots j_q}^{i_1\ldots i_p}$. Σε κάθε γραμμική μορφή w, είναι συνεπώς δυνατόν να αντιστοιχίσουμε κατά μοναδικό τρόπο τον τανυστή $t=\tau_{j_1\ldots j_q}^{i_1\ldots i_p} b_{i_1}\ldots b_{i_p} f^{j_1}\ldots f^{j_q}\in T_q^p$. Η αντιστοιχία αυτή είναι ένα προς ένα, και ανεξάρτητος από τις χρησιμοποιούμενες βάσεις. Ο t καλείται και τανυστής της w.

11. Οι δύο μεγάλες κατηγορίες των n-μορφών. Θεωρούμε την γραμμική μορφή $\mathsf{L}(T_0^p)\ni w=w^p(x_1,\ldots,x_p)=w^p(\chi^{i_1}b_{i_1}\ldots\chi^{i_p}b_{i_p})=\chi^{i_1}\ldots\chi^{i_p}w^p(b_{i_1}\ldots b_{i_p})=\tau_{i_1\ldots i_p}\chi^{i_1}\ldots\chi^{i_p}$ Η μορφή αυτή είναι, όπως σημειώσαμε παραπάνω, είτε συμμετρική, είτε αντισυμμετρική. Ο τανυστής, που αντιστοιχεί σε συμμετρική μορφή καλείται ***συμμετρικός*** ενώ αυτός που αντιστοιχεί σε αντισυμμετρική μορφή, ***αντισυμμετρικός***.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ***τα δ του Kronecker.*** Έστω το $T_p^p=\mathbf{V}\otimes\ldots\otimes\mathbf{V}\otimes\mathbf{V}'\otimes\ldots\otimes\mathbf{V}'$ με $\dim\mathbf{V}=n$. Το δ του Kronecker το ορίσαμε για την περίπτωση $p=1$ από τις σχέσεις $[b_i,f^j]=\delta_i^j$ με τιμές $\delta_i^j=1$ ανν $i=j$, $\delta_i^j=0$ ανν $i\neq j$. Το δ_i^j μπορούμε, συνεπώς, να το ταυτίσουμε με τον τανυστή της διγραμμικής μορφής $[b_i,f^j]$, και να τον παριστάνουμε με τον μοναδιαίο πίνακα $\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}$. Μία βασική ιδιότητα του δ, εκφράζεται από την σχέση $\delta_i^j u_j=u_i$. Ερχόμαστε, τώρα, στην περίπτωση, που $p=2$. Ορίζουμε, τότε, το $\delta_{\kappa\lambda}^{ij}=\det\begin{pmatrix}\delta_\kappa^i & \delta_\lambda^i\\ \delta_\kappa^j & \delta_\lambda^j\end{pmatrix}=\delta_\kappa^i\delta_\lambda^j-\delta_\lambda^i\delta_\kappa^j$, $1\le i,j,\kappa,\lambda\le n$. Επαγωγικά, μπορούμε να ορίσουμε το $\delta_{\kappa\lambda\ldots\rho}^{ij\ldots p}=\det\begin{pmatrix}\delta_\kappa^i & \delta_\lambda^i & \cdots & \delta_\rho^i\\ \delta_\kappa^j & \delta_\lambda^j & \cdots & \delta_\rho^j\\ & & \ddots & \\ \delta_\rho^p & \delta_\rho^p & \cdots & \delta_\rho^p\end{pmatrix}$, $1\le i,j,\ldots p,\kappa,\lambda,\ldots p\le n$. Οι τιμές που λαβαίνει η συνάρτηση αυτή, είναι

$$\begin{cases}+1 \text{ για διαφορετικούς άνω και κάτω δείκτες, σε αρτία μετάθεση των μεν ως} \\ \quad\text{προς τους δε}\\ -1 \text{ για διαφορετικούς άνω και κάτω δείκτες, σε περιττή μετάθεση των μεν ως}\\ \quad\text{προς τους δε}\\ 0 \text{ σε κάθε άλλη περίπτωση}\end{cases}$$

Παράδειγμα. $p=2$, $1\le i,j,\kappa,\lambda\le 2$. Είναι, $\delta_{12}^{12}=1$, $\delta_{21}^{12}=-1$ και όλες οι άλλες οι περιπτώσεις = 0. Πράγματι,
$\delta_{12}^{12}=\det\begin{pmatrix}\delta_1^1 & \delta_2^1\\ \delta_1^2 & \delta_2^2\end{pmatrix}=\delta_1^1\delta_2^2-\delta_2^1\delta_1^2=1$, και $\delta_{21}^{12}=\det\begin{pmatrix}\delta_2^1 & \delta_1^1\\ \delta_2^2 & \delta_1^2\end{pmatrix}=\delta_2^1\delta_1^2-\delta_1^1\delta_2^2=-1$ ενώ η περίπτωση $\delta_{22}^{12}=\det\begin{pmatrix}\delta_2^1 & \delta_2^1\\ \delta_2^2 & \delta_2^2\end{pmatrix}=\delta_2^1\delta_2^2-\delta_2^1\delta_2^2=0$.

$p=3$, $1\le i,j,m,\kappa,\lambda,\mu\le 3$. Εδώ, είναι, $\delta_{123}^{123}=\delta_{123}^{231}=\delta_{123}^{321}=1$, $\delta_{123}^{123}=\delta_{123}^{321}=\delta_{123}^{213}=-1$, και κάθε άλλη περίπτωση, όπως η $\delta_{123}^{332}=0$.

Ορίζουμε την απεικόνιση $\sigma: L(T_0^p)\to L(T_0^p)$ ως εξής:

$$L(T_0^p)\ni w=w^p(x_1,\dots,x_p)\mapsto w^p(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(p)})\in L(T_0^p)$$

Όπου σ(1),…;σ(p) μία μετάθεση των δεικτών. Η απεικόνιση αυτή, είναι, φανερά, ένας ισομορφισμός του $L(T_0^p)$ στον εαυτό του. Στην συνέχεια, ορίζουμε και τις απεικονίσεις ( ) και [ ] του $L(T_0^p)$ επί του $L(T_0^p)$ θέτοντας

$$(w^p)=\frac{1}{p!}\sum_{\sigma(p)}\sigma(w^p) \quad \text{και} \quad [w^p]=\frac{1}{p!}\sum_{\sigma(p)}\delta_{1,2,\dots,p}^{\sigma(1),\dots,\sigma(p)}\sigma(w^p).$$

Οι τανυστές $t\in T_0^p$ που αντιστοιχούν στις μορφές (w^p) και $[w^p]$ είναι αντίστοιχα οι

$$(t)=\frac{1}{p!}\sum_{\sigma(p)}\chi_1^{\sigma(1)}\dots\chi_p^{\sigma(p)}b_{\sigma(1)}\dots b_{\sigma(p)}\in T_0^p \quad \text{και}$$

$$[t]=\frac{1}{p!}\sum_{\sigma(p)}\delta_{12\dots p}^{\sigma(1)\dots\sigma(p)}\chi_1^{\sigma(1)}\dots\chi_p^{\sigma(p)}b_{\sigma(1)}\dots b_{\sigma(p)}\in T_0^p$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. 1) Για $p=2$, $\left(w^2(x,u)\right)=\frac{1}{2!}\{w^2(x,u)+w^2(u,x)\}$.

Για $\dim \mathbf{V}=2$ με βάση $\{e_1,e_2\}$ του χώρου **V**, περνώντας σε συντεταγμένες, $x=\chi^1e_1+\chi^2e_2$, $y=\psi^1e_1+\psi^2e_2$,

$$\left(w^2(x_1,x_2)\right)=\frac{1}{2}\{w^2(\chi^1e_1+\chi^2e_2,\psi^1e_1+\psi^2e_2)+w^2(\psi^1e_1+\psi^2e_2,\chi^1e_1+\chi^2e_2)=$$
$$\frac{1}{2}\{\chi^1\psi^1w^2(e_1,e_1)+\chi^1\psi^2w^2(e_1,e_2)+\chi^2\psi^1w^2(e_2,e_1)+\chi^2\psi^2w^2(e_2,e_2)+$$
$$\psi^1\chi^1w^2(e_1,e_1)+\psi^1\chi^2w^2(e_1,e_2)+\psi^2\chi^1w^2(e_2,e_1)+\psi^2\chi^2w^2(e_2,e_2)\}=$$
$$g_{11}\chi^1\psi^1+g_{22}\chi^2\psi^2+g_{12}\chi^1\psi^2+g_{21}\chi^2\psi^1$$

Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι $x=y$, $\left(w^2(x,x)\right)=g_{11}\chi^1\chi^1+g_{22}\chi^2\chi^2+(g_{12}+g_{21})\chi^1\chi^2$ και αν πρόκειται για συμμετρική μορφή, $\left(w^2(x,x)\right)=g_{11}\chi^1\chi^1+g_{22}\chi^2\chi^2+2g_{12}\chi^1\chi^2$.
Στην περίπτωση, που είναι $\dim \mathbf{V}=n$, $\left(w^2(x,x)\right)=\sum_i g_{ii}\chi^i\chi^i+\sum_{i<j}g_{ij}\chi^i\chi^j$.

2) Ανάλογα,

$$\left[w^2(x_1,x_2)\right]=\frac{1}{2!}\{w^2(x,y)-w^2(y,x)\}=\delta_{12}^{11}g_{11}\chi^1\psi^1+\delta_{12}^{22}g_{22}\chi^2\psi^2+\delta_{12}^{12}g_{12}\chi^1\psi^2+\delta_{12}^{21}g_{21}\chi^2\psi^1=$$
$$g_{12}\chi^1\psi^2-g_{21}\chi^2\psi^1$$

3) Για $p=3$,

$$\left(w^3(x_1,x_2,x_3)\right)=\frac{1}{3!}\{w^3(x_1,x_2,x_3)+w^3(x_2,x_3,x_1)+w^3(x_3,x_1,x_2)$$
$$+w^3(x_1,x_3,x_2)+w^3(x_3,x_2,x_2)+w^3(x_2,x_1,x_3)\}=$$
$$\frac{1}{3!}g_{ij\kappa}\chi_1^i\chi_2^j\chi_3^\kappa$$

και, $\left[w^3(x_1, x_2, x_3)\right] = \frac{1}{3!}\delta^{ij\kappa}_{123} g_{ij\kappa} \chi^i_1 \chi^j_2 \chi^\kappa_3$

4) Για $p = n$,

$\left(w^n(x_1, \ldots, x_n)\right) = g_{\sigma(1)\ldots\sigma(n)} \chi^{\sigma(1)\ldots\sigma(n)}_{1\ldots n}$ και,

$\left[w^n(x_1, \ldots, x_n)\right] = \frac{1}{n!}\delta^{\sigma(1)\ldots\sigma(n)}_{1\ldots n} g_{\sigma(1)\ldots\sigma(n)} \chi^{\sigma(1)\ldots\sigma(n)}_{1\ldots n} = g_{1\ldots n}\Delta$, όπου

$$\Delta = \det\begin{pmatrix} \chi^1_1 & \cdots & \chi^n_1 \\ & \ddots & \\ \chi^1_n & \cdots & \chi^n_n \end{pmatrix}$$

η ορίζουσα των συντεταγμένων των

Ένας συμμετρικός τανυστής χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι, η μορφή με την οποία συνδέεται πληροί την σχέση $(w) = w$, ενώ για έναν αντισυμμετρικό έχουμε την $[w] = w$