Ι. Γ Ρ Α Μ Μ Ι Κ Ο Ι   Χ Ω Ρ Ο Ι

1. Προλεγόμενα. Η έννοια του ***διανύσματος***, έχει τις απαρχές της στην διάκριση των θετικών από τους αρνητικούς αριθμούς, τοποθετημένους πάνω σε έναν άξονα.
Μπορούμε όμως να θεωρούμε τον John Wallis (1616-1703) ως θεμελιωτή του κλάδου αυτού των μαθηματικών, μιά και στο βιβλίο του Algebra (1673), έδειξε τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να παραστήσουμε τις ρίζες των δευτεροβαθμίων εξισώσεων. Χρειάσθηκε όμως να περάσουν εκατό ακόμα χρόνια, έως ότου γίνει το 1798 η εισαγωγή του άξονα των φανταστικών αριθμών, από τον Νορβηγό μαθηματικό Caspar Wessel (1745-1818). Ο Wessel, στο πόνημά του On the Analytic Representation of Direction: an Attempt, ουσιαστικά εισάγει την άλγεβρα των διανυσμάτων.

Ο παραδοσιακός ορισμός του διανύσματος, θέλει να είναι τούτο μία ποσότης, η οποία να έχει μέγεθος, διεύθυνση και φορά. Οπως αντιλαμβάνεται ο αναγνώστης, ο ορισμός αυτός, περιέχει πολλές ασάφειες. Ακόμη και αν θελήσουμε να τον κατανοήσουμε σαφέστερα, λέγοντας ότι διάνυσμα είναι ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, πάλι, σύντομα θα αντιμετωπίσουμε δυσκολίες. Για παράδειγμα, όλα τα ευθύγραμμα τμήματα, τα οποία είναι δυνατόν να συμπέσουν με μία μεταφορά, που να διατηρεί την φορά τους, μπορεί να ορίζουν το ίδιο διάνυσμα.

Στο σημείο αυτό, ας αναλογισθεί ο αναγνώστης πόσες έννοιες χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε, για να είμαστε, απλά και μόνον, σε θέση να ορίσουμε την ισότητα δύο διανυσμάτων.

Ολα αυτά δείχνουν την αποτελεσματικότητα της αξιωματικής μεθόδου, που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια. Η αξιωματική μέθοδος, δεν ορίζει το συγκεκριμένο αντικείμενο, αλλά ένα σύνολο απ' αυτά, με κοινές ιδιότητες. Συνεπώς, είναι δυνατόν, τα αντικείμενα που πληρούν τις ιδιότητες που θέσαμε, να βρεθεί ότι ειναι πολύ ευρύτερου τύπου, απ' αυτά, που σκοπεύαμε να περιγράψουμε.

Συντομογραφίες: ανν = αν και μόνον αν. $\forall$ = Για κάθε. $\Rightarrow$ = συνεπάγεται. $\exists$ = υπάρχει.
αντ. = αντιστοίχως. σελ. = σελίς. παρ. = παράδειγμα, παρατήρηση.

Δίδουμε εδώ, ένα μικρό λεξικό όρων και εννοιών, που θα χρησιμοποιήσουμε πάρα κάτω, και που γενικώς θα θεωρούμε ότι, είναι γνωστές στον αναγνώστη.

α) Σύνολο: (Βλέπε και την ενότητα Σύνολα). Αρχική έννοια, που δεν την ορίζουμε. Την χρησιμοποιούμε με την κοινή έννοια της συλλογής διαφορετικών στοιχείων. Τα σύνολα, θα τα συμβολίζουμε με κεφαλαία γράμματα. Δεχόμεθα ότι, μπορούμε να διακρίνουμε αν κάποιο στοιχείο ανήκει ή όχι στο σύνολο που θεωρούμε. Αν Α το θεωρούμενο σύνολο, και α τυχόν στοιχείο, γράφουμε $\alpha \in A$ ανν το α ανήκει στο Α, ενώ $\alpha \notin A$, ανν το α δεν ανήκει στο Α. Αλλη περίπτωση δεν υφίσταται. Ενα σύνολο, εξ' ορισμού, δεν περιέχει επαναλαμβανόμενα στοιχεία. Ετσι, είναι π.χ., $\{\alpha,\alpha\} = \{\alpha\}$

Υποθέτουμε ότι, υπάρχει ένα και μόνον σύνολο, το οποίο δεν περιέχει κανένα στοιχείο. Το σύνολο αυτό, το συμβολίζουμε με "$\varnothing$", και το καλούμε ***κενό*** σύνολο. Υποθέτουμε ότι, το $\varnothing$ περιέχεται σε κάθε σύνολο.

Δύο σύνολα Α και Β ταυτίζονται, ανν το τυχόν στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του Β, και το τυχόν στοιχείο του Β, είναι και στοιχείο του Α. Στην περίπτωση αυτή, γράφουμε
$A = B$. Ωστε, για να αποδείξουμε κάθε φορά, ότι $A = B$, θα πρέπει να αποδεικνύουμε τις εξής δύο συνεπαγωγές:

$$\alpha \in A \Rightarrow \alpha \in B, \text{ και } \alpha \in B \Rightarrow \alpha \in A.$$

Αν δεν ισχύουν οι παραπάνω δύο συνεπαγωγές, γράφουμε $A \neq B$.

Αν τώρα $\alpha \in A \Rightarrow \alpha \in B$, αλλά κάποιο $\beta \in B$ δεν ανήκει και στο Α, τότε λέμε, ότι το Α είναι υποσύνολο του Β, ή ότι το Α περιέχεται στο Β. Γράφουμε $A \subset B$. Την σχέση αυτή, μπορούμε να την γράψουμε και $B \supset A$, οπότε λέμε ότι, το Β περιέχει το Α. Στην περίπτωση, που ισχύουν αμφότερες οι σχέσεις $A \subset B$ και $B \subset A$, έχουμε βέβαια, ότι $A = B$. Αν θέλουμε, στον παραπάνω συμβολισμό να συμπεριλάβουμε και την περίπτωση ισότητας δύο συνόλων, γράφουμε, $A \subseteq B$, ή $B \supseteq A$.

Η σχέση "=" έχει, φανερά, τις ιδιότητες: i) $A = A$ (ανακλαστική) ii) Αν $A = B$ τότε και $B = A$ (συμμετρική) iii) Αν $A = B$ και $B = \Gamma$ τότε και $A = \Gamma$ (μεταβατική).

Χρησιμοποιούμε επίσης τον εξής συμβολισμό για να δηλώσουμε το σύνολο A:

$$A = \{\alpha \mid \text{κάποια συνθήκη που πληροί το } \alpha\}$$

Αν η συνθήκη είναι γνωστή, παραλείπεται από τον συμβολισμό μας.

Πάντοτε, τα σύνολα που θεωρούμε, υποτίθεται ότι είναι όλα υποσύνολα κάποιου "μεγάλου" συνόλου E.

Η ***ένωση*** "$\cup$" και η ***τομή*** "$\cap$" δύο συνόλων A και B, ορίζονται ως τα εξής σύνολα: $A \cup B = \{x \mid x \in A, \text{ είτε } x \in B\}$ και $A \cap B = \{x \mid x \in A, \text{ και } x \in B\}$.

Δύο σύνολα με τομή ίση με $\varnothing$ (τομή κενή), λέγονται και ***ξένα*** μεταξύ τους.

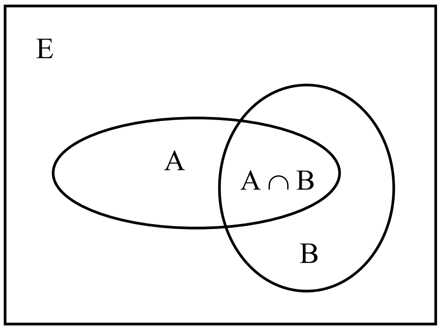
Εύκολα αποδεικνύονται οι σχέσεις

$$A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma \qquad A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$$
$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$$
$$A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma) \qquad A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$$

Θεωρούμε τα σύνολα A και $B \subset A$. Το σύνολο τότε $A \setminus B$ (ή $A - B$) καλείται ***διαφορά*** των A και B, και ορίζεται ως $A \setminus B = \{\alpha \in A \mid \alpha \notin B\}$. Ιδιαίτερα, αν $\alpha \in A$, $A \setminus \{\alpha\}$ είναι εκείνο το σύνολο, που προκύπτει από το A, μετά την αποβολή του στοιχείου α.

Στην περίπτωση που, $A \subseteq B$, το σύνολο $B \setminus A$ καλείται και ***συμπλήρωμα*** του A ως προς B. Αν γνωρίζουμε ως προς πιο σύνολο θεωρούμε τα συμπληρώματα διαφόρων υποσυνόλων του, τα συμβολίζουμε αυτά, με A', ή A^c ή ακόμα και με CA. Είναι λοιπόν $A' = \{\beta \in B \mid \beta \notin A\}$.

Ολες οι παραπάνω σχέσεις ανάμεσα στα σύνολα, απεικονίζονται γραφικά, στο διάγραμμα του Venn:



Ασκήσεις. 1) Να δείξετε ότι: $(A \cup B)' = A' \cap B'$ και $A' \cup B' = (A \cap B)'$ (σχέσεις του de Morgan). 2) Το σύνολο των υποσυνόλων ενός συνόλου με n στοιχεία, έχει το πλήθος 2^n στοιχεία. 3) Να δείξετε ότι, $A \cap A' = \varnothing$, και $A \cup A' = E$.

β) Διμελείς σχέσεις, Δεχόμεθα ότι, αν μας δοθούν δύο σύνολα A και B, μπορούμε να νοήσουμε το ***διατεταγμένο ζεύγος*** (α,β), όπου $\alpha \in A$ και $\beta \in B$. [Το (α,β) ορίζεται και από την ισότητα, $(\alpha,\beta) = \{\alpha, \{\alpha,\beta\}\}$. Φανερά, $(\alpha,\beta) \neq (\beta,\alpha)$, αν $\alpha \neq \beta$,
ενώ $(\alpha,\alpha) = \{\alpha, \{\alpha,\alpha\}\} = \{\alpha, \{\alpha\}\}$, το οποίο εξ' ορισμού ισούται με $\{\{\alpha\}\}$.

Ολα τα δυνατά διατεταγμένα ζεύγη (α,β), αποτελούν το σύνολο $A \times B$, που το ονομάζουν, ***καρτεσιανό γινόμενο*** των συνόλων A και B. Η έννοια του διατεταγμένου ζεύγους, ως και αυτή του καρτεσιανού γινομένου δύο συνόλων, γενικεύεται, επαγωγικά, στις έννοιες αντίστοιχα, της διατεταγμένης παρενθέσεως n στοιχείων $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, (που καλείται και n-άδα), και του καρτεσιανού γινομένου $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

Ιδιαίτερα, αν $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$, γράφουμε $A = A \times A \times \ldots \times A$ (n παράγοντες).

Ένα καθορισμένο υποσύνολο $R \subseteq A\times A$, καλείται ***διμελής σχέση*** επί του συνόλου A. Εφ' όσον η $(\alpha_1,\alpha_2)\in R$ αληθεύει, γράφουμε και $\alpha_1 R\alpha_2$. Συνήθως, δεν χρησιμοποιούμε το σύμβολο R στην προηγούμενη γραφή, αλλά άλλα σύμβολα, όπως π.χ. "$\approx$", "$=$", "$\leq$ " κ.ο.κ., που έχουν κάποιο ειδικότερο νόημα, όπως θα δούμε παρακάτω.

Σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου A, είναι μία διμελής σχέση R επί του A, η οποία πληροί τις ιδιότητες: 1) Για κάθε $\alpha\in A$, $(\alpha,\alpha)\in R$ (ανακλαστική). 2) Για κάθε $\alpha,\beta\in R$, αν είναι $(\alpha,\beta)\in R$, είναι τότε, και $(\beta,\alpha)\in R$ (συμμετρική). 3) Οι σχέσεις $(\alpha,\beta)\in R$ και $(\beta,\gamma)\in R$, συνεπάγονται την $(\alpha,\gamma)\in R$ (μεταβατική). Οι ιδιότητες 1), 2) και 3), γράφονται και ως εξής:

1) Ανακλαστική: $\alpha \approx \alpha$.

2) Συμμετρική: $\alpha \approx \beta, \Rightarrow \beta \approx \alpha$.

3) Μεταβατική: $\alpha \approx \beta$ και $\beta \approx \gamma \Rightarrow \alpha \approx \gamma$.

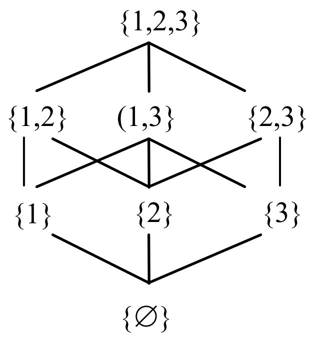
Εστω ότι, μας δίδεται το μη κενό σύνολο A, και μία σχέση ισοδυναμίας R έπ' αυτού. Τότε, με το τυχόν στοιχείο α του A, θεωρώ και όλα τα ισοδύναμα προς αυτό στοιχεία. Αυτά, αποτελούν το σύνολο, (λέμε την ***κλάση)*** C_α. Φανερά, $C_\alpha \neq \varnothing$ μιά και $\alpha\in C_\alpha$ αφού $\alpha \approx \alpha$. Είναι λοιπόν $x\in C_\alpha$, ανν $x \approx \alpha$. Παρατηρούμε ότι, το σύνολο A, μερίζεται σε τάξεις ισοδυνάμων στοιχείων. Μερίζεται δηλαδή σε υποσύνολα C_α, C_β, κλπ., τέτοια ώστε, να έχουν ανά δύο τομή κενή, και η ένωση όλων να είναι το A.

Πράγματι, αν $C_\alpha \cap C_\beta \neq \varnothing$, και $\gamma\in C_\alpha \cap C_\beta$, τότε, $\gamma\in C_\alpha$ και $\gamma\in C_\beta$. Για κάθε $\alpha\in C_\alpha$ είναι όμως, $\alpha \approx \gamma$ και επειδή το γ είναι και στοιχείο του C_β, $\gamma \approx \beta$. Αρα και $\alpha \approx \beta$, οπότε, $\alpha\in C_\beta$ μιά και αυτό, περιέχει όλα τα ισοδύναμα προς το β στοιχεία. Δείξαμε έτσι,

ότι $C_\alpha \subseteq C_\beta$. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και η $C_\alpha \supseteq C_\beta$. Αρα είναι $C_\alpha = C_\beta$.

Δεν μπορούμε λοιπόν, να έχουμε διαφορετικές κλάσεις, με τομή μη κενή. Ξεκινάμε λοιπόν, από το τυχόν στοιχείο α του A. Σχηματίζουμε την κλάση C_α. Αν αυτή δεν ταυτίζεται με το A, λαβαίνουμε το στοιχείο $\beta\in A$ με $\beta\notin C_\alpha$ και θεωρούμε όλα τα ισοδύναμα προς αυτό στοιχεία. Αυτά, φανερά, δεν θα ανήκουν στο C_α, και αποτελούν την C_β. Αν $C_\alpha \cup C_\beta \neq A$, λαβαίνουμε εκείνο το στοιχείο γ του A, που δεν ανήκει στην προηγούμενη ένωση, κ.ο.κ. Με τον τρόπο αυτό, επιτυγχάνουμε τον μερισμό του A.

Σχέση (μερικής) ***διατάξεως*** επί του μη κενού συνόλου A, είναι μία διμελής σχέση R επί του A, η οποία είναι ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική. Το "αντισυμμετρική" σημαίνει ότι, αν $(\alpha,\beta)\in R$ και $(\beta,\alpha)\in R$, τότε και $\alpha = \beta$. Την σχέση αυτή R την συμβολίζουν με το " $\leq$ ". Στην περίπτωση που $R = A\times A$, η R καλείται σχέση ***ολικής*** (ή γραμμικής) διατάξεως. Δύο στοιχεία του A, το ζεύγος των οποίων ανήκει στην R, καλούνται ***συγκρίσιμα*** στοιχεία. Σε ολική διάταξη όλα τα στοιχεία του A είναι συγκρίσιμα.



Το σύνολο των υποσυνόλων ενός συνόλου, είναι ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο, ως προς την διάταξη "$\subseteq$". Την μερική διάταξη, την εμφανίζουμε με την χρήση διαγραμμάτων, όπως το παραπλεύρως. Το διάγραμμα αυτό, παριστάνει την διάταξη "$\subseteq$" του σύνολου των υποσυνόλων του συνόλου {1,2,3}, που είναι το

$$\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Θεωρούμε το σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z}$. Εισάγουμε στο $\mathbb{Z}$ την εξής διμελή σχέση R: $(\alpha,\beta)\in R$, ανν $\beta-\alpha$ = πολλαπλάσιο του 3. Η R είναι σχέση ισοδυναμίας. Πράγματι: 1) $(\alpha,\alpha)\in R$, μιά και $\alpha-\alpha = 0$, και $0 = 0\cdot 3$. 2) Αν $(\alpha,\beta)\in R$, τότε και $(\beta,\alpha)\in R$, μιά και η β–α = 3k, δίδει και την α–β = 3(–k), δηλαδή, την (β,α)∈R. 3) Τέλος, αν (α,β)∈R και (β,γ)∈R, δηλαδή, β–α = $3k_1$ και γ–β = $3k_2$, τότε οι β = $3k_2 - \gamma$, και β = $3k_1 - \alpha$ δίδουν την $3k_2 - \gamma = 3k_1 - \alpha$, δηλαδή, την γ–α = $3(k_1 - k_2)$, που είναι η (α,γ)∈R. Ας δούμε τώρα, ποίες είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας, που μερίζουν το σύνολο $\mathbb{Z}$. Προς τούτο, ας λάβουμε το 1∈$\mathbb{Z}$. Η C_1 περιέχει όλους τους ακεραίους, που διαφέρουν από τον 1, κατά πολλαπλάσιο του 3. Αρα $x \in C_1$ ανν x = 1+3k. Οι ακέραιοι αυτοί, είναι εκείνοι, οι οποίοι διαιρούμενοι με το 3, δίδουν υπόλοιπο 1. Είναι λοιπόν, $C_1 = \{\pm1, \pm4, \pm7, \ldots\}$. Επειδή ο $2 \notin C_1$, ας σχηματίσουμε την C_2. Είναι, με τον ίδιο τρόπο σκεπτόμενοι, $C_2 = \{\pm2, \pm5, \pm8, \ldots\}$. Φανερά, μία ακόμα κλάση υπάρχει. Η $C_0 = \{0, \pm3, \pm6, \ldots\}$.

Σύνολο Πηλίκο ονομάζουμε το σύνολο εκείνο, που έχει σαν στοιχεία του, τις κλάσεις ισοδυναμίας του Α. Το συμβολίζουμε με A/R.

Στο προηγούμενο παράδειγμα, $\mathbb{Z}/R = \{C_0, C_1, C_2\}$.

γ) Συναρτήσεις = απεικονίσεις = μετασχηματισμοί, κλπ. Με τον όρο "συνάρτηση από το σύνολο Α στο σύνολο Β" καλύπτουμε εκείνον τον μηχανισμό, που σε κάποιο στοιχείο x ενός μη κενού συνόλου Α, αντιστοιχεί ***ένα και μόνον*** στοιχείο y ενός άλλου (ή και του ιδίου) μη κενού συνόλου Β. Τον μηχανισμό αυτόν, τον παριστάνουμε με f, g, κλπ. Ωστε, για να μπορούμε να λέμε ότι έχουμε μία συνάρτηση, θα πρέπει να πληρούνται τα ακόλουθα: 1) Να έχουν δοθεί δύο σύνολα Α και Β (≠ ∅, χωρίς να αποκλείουμε Β = Α). 2) Να γνωρίζουμε, για κάθε x∈A, το μοναδικό y∈B, που αντιστοιχεί μέσω κάποιου συγκεκριμένου μηχανισμού, σ' αυτό. Καλούμε το y ***τιμή*** της f. Γράφουμε y = f(x) ή y = xf. Μπορούμε συνεπώς να θεωρούμε, το διατεταγμένο ζεύγος (x,y)∈A×B. Γνωρίζουμε δηλαδή την f, ανν γνωρίζουμε το υποσύνολο Γ ⊆ A×B, που είναι το Γ = {(x,y) | y = f(x)}. 3) Για να είναι καλά ορισμένη η f, θα πρέπει να αποδείξουμε την μοναδικότητα του f(x). Θα πρέπει δηλαδή, να αποδείξουμε ότι, η σχέση $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$.Το σύνολο Α καλείται ***πεδίον ορισμού*** της f. Το σύνολο Β καλείται ***πεδίον τιμών*** της f. Το σύνολο f(A) = {y∈B | ∃x∈A με f(x) = y} καλείται ***σύνολο τιμών*** αυτής. Θεωρούμε και το σύνολο $f^{-1}(B') = \{x \in A \;\; \text{ìå} \;\; f(x) \in B' \subseteq B\}$, που καλείται, αντίστροφη εικόνα του συνόλου Β΄. Στην περίπτωση που, το $f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(y)$ είναι μονοσύνολο, ορίζεται συνάρτηση $f^{-1}: B \to A$, που καλείται, αντίστροφη συνάρτηση της f.

Συμβολισμοί. Με f|A, δηλώνουμε ότι, η f ορίζεται πάνω στο Α. Με f: X → Y, περιγράφουμε μία συνάρτηση, που ορίζεται στο σύνολο Χ και παίρνει τιμές μέσα στο σύνολο Υ. Χρήσιμος είναι επίσης και ο συμβολισμός, $x \mapsto y = f(x)$.

Εστω η f: X → Y και A, A_i, i∈I, υποσύνολα του Χ και Β, B_j, j∈J υποσύνολα του Υ. Ισχύουν οι σχέσεις : i) $f^{-1}(A) \supseteq A$. ii) $f(f^{-1}(B)) \subseteq f(B)$. iii) $f^{-1}(B) = f^{-1}(B \cap f(X))$

$$\text{iv) } f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i) \qquad \text{v) } f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i)$$

Ορισμοί. ***Επί*** καλείται η f: X → Y, ανν f(X) = Y. *Εντός* καλείται η f ανν f(X) ⊂Y. Ο ***περιορισμός*** g της f επί του υποσυνόλου A ⊂ X, είναι εκείνη η g: A → Y, για την οποία ισχύει ότι g(x) = f(x), ∀x∈A. Συνήθως, τον περιορισμό της f τον συμβολίζουμε με το ίδιο σύμβολο (δηλαδή το f). Στην περίπτωση αυτή, η f λέγεται και ***επέκταση*** της g.

δ) Δομές. Θεωρούμε το σύνολο Α, το Α×Α, και την f: A×A → A. Καλούμε τότε την f ***εσωτερική πράξη*** επί του Α. Στην περίπτωση αυτή, αντί να γράφουμε (α,β) ↦ γ, ή ότι γ = f((α,β)) [γράφουμε απλά f(α,β)]. Γράφουμε και γ = αfβ. Βέβαια, στον συμβολισμό αυτό, ποτέ δεν δηλώνουμε την εσωτερική μας πράξη με το f. Χρησιμοποιούμε σύμβολα, όπως το

"+", το "∘" κλπ. Ετσι, φθάνουμε στην γνωστή γραφή $\gamma = \alpha+\beta$, ή $\gamma = \alpha-\beta$, κλπ. Αν τώρα έχουμε τα σύνολα T, A, και την $g: T\times A \to A$, λέμε ότι έχουμε μία ***εξωτερική πράξη***.

Οταν έχουμε σύνολα με πράξεις, έχουμε Δομές.

Η απλούστερη δομή, είναι αυτή της ημιομάδας. Εδώ, έχουμε ένα σύνολο A, με μία εσωτερική πράξη "∘" (πολλαπλασιασμό), η οποία είναι ***προσεταιριστική***. Ισχύει δηλαδή, ότι, (παραλείπουμε το σύμβολο "∘"), $\forall$ α, β, $\gamma\in A$, $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ (Προσεταιρισμός). Αν υπάρχει στοιχείο e του A με την ιδιότητα $e\alpha = \alpha$, για κάθε $\alpha\in A$, λέμε ότι το e είναι μία "αριστερή" μονάδα του A. Ανάλογα έχουμε και την "δεξιά" μονάδα του A. Αν το e είναι και αριστερή και δεξιά μονάδα, λέγεται απλά ***μονάδα*** ή ***ουδέτερο στοιχείο*** του A. Το "αριστερά" αντίστροφο στοιχείο α^{-1} του α, αν υπάρχει εν A, είναι εκείνο, για το οποίο ισχύει ότι $\alpha^{-1}\alpha = e$. Και εδώ έχουμε κατ' αναλογία "δεξιά" αντίστροφο, και τέλος ***αντίστροφο*** στοιχείο.

Μία ημιομάδα, με μονάδα, και αντίστροφα στοιχεία για όλα τα στοιχεία της, καλείται ***ομάδα*** (Group). ***Αντιμεταθετική*** ή ***Αβελιανή*** καλείται μία ομάδα, αν ισχύει επιπλέον ότι, για κάθε δύο στοιχεία της, α, β, είναι, $\alpha\beta = \beta\alpha$. Συνήθως, την αντιμεταθετική εσωτερική πράξη, την συμβολίζουν με το "+". Τότε, η μονάδα συμβολίζεται με το "0". και το αντίστροφο στοιχείο του α, με $-\alpha$, και καλείται αντίθετο στοιχείο του α. Σε μία ομάδα G, ισχύουν τα παρακάτω:

1) Η μονάδα, είναι μοναδική. 2) Το αντίστροφο στοιχείου, είναι μοναδικό.

2) Για κάθε $\alpha\in G$, $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$. 4) Για όλα τα α, $\beta\in G$, $(\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1}$.

Πράγματι, το 1) προκύπτει από το γεγονός ότι, μία μονάδα, είναι και αριστερή και δεξιά μονάδα. Είναι δηλαδή, για κάθε στοιχείο α της G, $e\alpha = \alpha e = \alpha$. Αν συνεπώς είχαμε και άλλη μία μονάδα, π.χ. την $u\in G$, τότε θα είχαμε και ότι, $eu = ue = u$, και επίσης, $ue = eu = e$. Είναι δηλαδή, $e = u$. Το 2) τώρα, είναι συνέπεια της μοναδικότητας της e. Πράγματι, αν το α είχε δύο αντίστροφα, τα a_1 και a_2, τότε θα είχαμε και ότι, $\alpha a_1 = e = \alpha a_2$, δηλαδή, ότι $\alpha a_1 = \alpha a_2$. Αν τώρα, α^{-1} ένα ακόμα αντίστροφο του α, $\alpha^{-1}(\alpha a_1) = \alpha^{-1}(\alpha a_2)$, ή $(\alpha^{-1}\alpha)a_1 = (\alpha^{-1}\alpha)a_2$, και συνεπώς, $a_1 = a_2$. Το 3) είναι συνέπεια του 2). Πράγματι, αφού το αντίστροφο του α είναι μοναδικό, μοναδικό είναι και το αντίστροφο του α^{-1}. Αν καλέσουμε β αυτό το αντίστροφο, [$\beta = (\alpha^{-1})^{-1}$], τότε είναι και $\alpha^{-1}\beta = e$. Είναι όμως και $\alpha^{-1}\alpha = e$. Αρα και $\beta = \alpha$. Τέλος, ένας απλός λογαριασμός, δίδει την ιδιότητα 4).

Ενα ***σώμα*** F (field), είναι μία δομή δύο εσωτερικών πράξεων, όπου ως προς την μία, το F είναι αντιμεταθετική ομάδα, και ως προς την άλλη, το F εξαιρουμένου του μοναδιαίου στοιχείου 0 της "+", είναι ομάδα. Επιπλέον, οι δύο αυτές πράξεις, συντονίζονται από την σχέση: $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta+\alpha\gamma$ (Επιμερισμός). Ενα σώμα λέγεται αντιμεταθετικό, αν και η "∘" είναι αντιμεταθετική. Ενα σώμα λοιπόν, έχει πάντα κατ' ελάχιστον δύο στοιχεία: Τα 0 και 1, μονάδες αντίστοιχα, των πράξεων "+" και "∘" (πρόσθεση και πολλαπλασιασμό). Το σύνολο {0, 1} καθίσταται σώμα, αν ορίσουμε τις πράξεις "+" και "∘" ως εξής:

$0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 0$ και $0\circ 0 = 0$, $0\circ 1 = 0$, $1\circ 0 = 0$, $1\circ 1 = 1$.

Σε ένα αντιμεταθετικό σώμα, έχουμε τον γνωστό αλγεβρικό λογισμό.

Για παράδειγμα, $(-\alpha)(-\beta) = \alpha\beta$. **Απόδειξη**. $(-\alpha)(-\beta)+(-\alpha)\beta+\alpha\beta = (-\alpha)[(-\beta)+\beta]+\alpha\beta = \alpha\beta$ και επίσης $(-\alpha)(-\beta)+(-\alpha)\beta+\alpha\beta = (-\alpha)(-\beta)+[(-\alpha)+\alpha]\beta = (-\alpha)(-\beta)$.

Ενα σώμα λέγεται ***διατεταγμένο***, ανν σαν σύνολο είναι ολικά διατεταγμένο, και η διάταξή του " $\le$ " είναι συμβατή με τις πράξεις "+" και "∘". Ισχύουν δηλαδή οι σχέσεις,

i) $\alpha_1 \le \beta_1$ και $\alpha_2 \le \beta_2 \Rightarrow \alpha_1 + \beta_1 \le \alpha_2 + \beta_2$,

ii) αν $0 \le \lambda$ και $\alpha \le \beta$, τότε και $\lambda\alpha \le \lambda\beta$ και iii) αν $\alpha \le \beta$, τότε και $-\beta \le -\alpha$.

2. Ορισμός διανυσματικού χώρου. Υπόχωροι. Ενα μη κενό σύνολο **V**, μέσα στο οποίο ορίζεται μία εσωτερική πράξη "+", (που καλούμε ***πρόσθεση***), και που το καθιστά αντιμεταθετική ομάδα, και μία εξωτερική πράξη, (που καλούμε ***μονόμετρο*** ή ***βαθμωτό πολλαπλασιασμό***), $F\times\mathbf{V} \to \mathbf{V}$, όπου F κάποιο αντιμεταθετικό σώμα, και οι οποίες, έχουν τις παρακάτω ιδιότητες, ονομάζεται ***διανυσματικός χώρος*** ή ***Γραμμικός χώρος*** (Vector or Linear space) επί του σώματος F:

1) $\forall\ \lambda, \xi\in F, x\in\mathbf{V}, (\lambda+\xi)x = \lambda x+\xi x$ 3) $\forall\ \lambda, \xi\in F, x\in\mathbf{V}, (\lambda\xi)x = \lambda(\xi x)$

2) $\forall\ \lambda\in F, x, y\in\mathbf{V}, \lambda(x+y) = \lambda x+\lambda y$ 4) $\forall\ x\in\mathbf{V}, 1x = x$.

Σημβολισμός. Με ελληνικούς χαρακτήρες, τα στοιχεία του αντιμεταθετικού σώμάτος F (μονόμετρα ή βαθμοτά μεγέθη [scalars]). Με λατινικούς χαρακτήρες τα στοιχεία του **V** (***ανύσματα*** ή ***διανύσματα***, [vectors]).

Αν F = R το σώμα των πραγματικών αριθμών, λέμε ότι έχουμε έναν ***πραγματικό διανυσματικό χώρο***.

Το ουδέτερο στοιχείο της "+" καλείται και μηδενικό διάνυσμα. Αν **0** το μηδενικό διάνυσμα και 0 το μονόμετρο μηδέν, είναι τότε, $0\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
Πράγματι, 0 = 0+0 και $(0+0)\mathbf{0} = 0\mathbf{0}+0\mathbf{0}$. Αρα και $0\mathbf{0} = 0\mathbf{0}+0\mathbf{0}$. Ομως, το μοναδικό διάνυσμα, που έχει την ιδιότητα, προστιθέμενο σε κάθε άλλο διάνυσμα, άρα και στο $0\mathbf{0}$, να δίδει άθροισμα το ίδιο, είναι το μοναδικό ουδέτερο στοιχείο, δηλαδή το **0**. Είναι συνεπώς, $0\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Γενικότερα, έχουμε ότι, $\forall x\in\mathbf{V}$, $0x = \mathbf{0}$.
Τούτο προκύπτει από την ιδιότητα $(\lambda+\xi)x = \lambda x+\xi x$, αν θέσουμε, $\lambda = \xi = 0$, οπότε και
$0x = 0x+0x$, άρα και, $\mathbf{0} = 0x-0x = 0x$.

Είναι εξ' άλλου και $\forall\xi\in F$, $\xi\mathbf{0} = \mathbf{0}$, μιά και $\xi(x+y) = \xi x+\xi y$ οπότε για $x = y = \mathbf{0}$ είναι και
$\xi\mathbf{0} = \xi\mathbf{0}+\xi\mathbf{0}$, άρα και $\xi\mathbf{0}-\xi\mathbf{0} = \mathbf{0} = \xi\mathbf{0}$.

Λόγω των ισοτήτων αυτών, δεν διακρίνουμε συνήθως το **0** από το 0 με διαφορετικό σύμβολο. Ο αναγνώστης πρέπει κάθε φορά, να μπορεί να καταλάβει, αν πρόκειται για 0 μονόμετρο, ή 0 διάνυσμα.

Ισχύει ακόμα και η σχέση: $(-1)x = -x$. Πράγματι είναι,
$0x = (1-1)x = 1x+(-1)x = x+(-1)x$, δηλαδή, το $(-1)x$ είναι ένα αντίθετο στοιχείο του x, και επειδή τα αντίθετα στοιχεία είναι και μοναδικά, $(-1)x = -x$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Θεωρούμε το καρτεσιανό γινόμενο E = R^n. Τα στοιχεία του συνόλου αυτού, θα τα καλούμε ***σημεία*** και θα τα συμβολίζουμε με κεφαλαία γράμματα. Είναι λοιπόν, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathsf{R}^n$. Γράφουμε ακόμα και (x_i), εφ' όσον είναι γνωστό, ότι το i παίρνει τις τιμές 1, . . . ,n. Στο σύνολο E εισάγουμε μία εσωτερική πράξη "+" μέσω των ισοτήτων $(x_i)+(y_i) = (x_i + y_i)$. Φανερά, η πράξη αυτή, καθιστά το E αντιμεταθετική ομάδα, με ουδέτερο στοιχείο το $O = (0_i)$. Εισάγουμε και έναν μονόμετρο πολλαπλασιασμό

$(\lambda,X) \mapsto \lambda X$ (εξωτερική πράξη, $\mathsf{R}\times\mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^n$) από την σχέση,

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n).$$

Το σύνολο E καθίσταται έτσι, ένας διανυσματικός χώρος. Ο χώρος αυτός, καλείται και ***χώρος των συντεταγμένων***, μιά και η x_i καλείται και i - συντεταγμένη του σημείου X. Το σημείο O καλείται και αρχή του χώρου. Στην περίπτωση, που n = 2, ο χώρος R^2 καλείται και "πραγματικό επίπεδο" ενώ, για n = 3, ο R^3 καλείται και "χώρος E"

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Θεωρούμε το σύνολο των ακεραίων Z και το σύνολο των θετικών ρητών $\mathsf{R}^+ = \{r\in\mathbf{R} \mid r > 0\}$. Εισάγουμε στο R^+ την εξής πρόσθεση: α+β = αβ. Καλούμε δηλαδή "πρόσθεση" στο R^+, το γινόμενο δύο στοιχείων του R^+, πολλαπλασιαζόμενα, ως στοιχεία

του R. Το R^+ με την πρόσθεση αυτή "+΄ ", καθίσταται αντιμεταθετική ομάδα με ουδέτερο στοιχείο το 1. Εισάγουμε τώρα, και έναν μονόμετρο πολλαπλασιασμό $(\lambda, r) \mapsto r^{\lambda}$.
Παρατηρούμε ότι, ο πολλαπλασιασμός αυτός, είναι καλά ορισμένος, και το σύνολο R^+ εφοδιασμένο με αυτές τις πράξεις, απότελεί ένα διανυσματικό χώρο. Πράγματι, είναι:
1) $(\lambda+\xi, x) \mapsto x^{\lambda+\xi} = x^{\lambda}x^{\xi} = x^{\lambda} +' x^{\xi}$ 2) $(\lambda, x+'y) \mapsto (xy)^{\lambda} = x^{\lambda}y^{\lambda} = x^{\lambda} +' y^{\lambda}$.
3) $(\xi, x^{\lambda}) \mapsto x^{\lambda\xi} = (x^{\lambda})^{\xi}$ 4) Τέλος, εδώ, το 1x μεταφράζεται σε $x^1 = x$. Παρατηρούμε ότι, το αντίθετο του $x\in\mathsf{R}^+$, είναι το x^{-1}, μιά και το ουδέτερο στοιχείο του R^+ είναι το 1, και το "άθροισμα" $x\,x^{-1} = x^0 = 1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Θεωρούμε το σύνολο F των πραγματικών συναρτήσεων, που ορίζονται κατά κάποιο τρόπο πάνω σε ένα σύνολο X. Το άθροισμα δύο τέτοιων συναρτήσεων f και g, ορίζεται ως η συνάρτηση f+g: $X \to \mathsf{R}$, που $\forall x\in X$ είναι, $(f+g)x = f(x)+g(x)$. Η πράξη "+", που ορίστηκε μ' αυτόν τον τρόπο, είναι μία καλά ορισμένη εσωτερική πράξη επί του συνόλου F, που καθιστά το σύνολο αυτό αντιμεταθετική ομάδα. Το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας αυτής, είναι η "μηδενική" συνάρτηση f_0 που έχει την ιδιότητα, το κάθε $x\in X$, να το απεικονίζει στο 0 εν R. Θεωρούμε ακόμα, το σύνολο R και την εξωτερική πράξη
$(\lambda, f) \mapsto \lambda f$. Η $\lambda f\in F$ ορίζεται από την σχέση $(\lambda f)x = \lambda(f(x))$. Με αυτές τις πράξεις, το σύνολο F αποτελεί έναν πραγματικό διανυσματικό χώρο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. Ιδιαίτερη περίπτωση, είναι αυτή των πολυωνυμικών συναρτήσεων. Με P_n θα συμβολίζουμε τον διανυσματικό χώρο των πολυωνύμων μέχρι και n βαθμού, με συντελεστές από το σώμα των πραγματικών αριθμών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6. Εστω οι διανυσματικοί χώροι $\mathbf{V}_1$ και $\mathbf{V}_2$ επί του F. Το καρτεσιανό γινόμενο $\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2$ καθίσταται και αυτό διανυσματικός χώρος επί του F, αν ορίσουμε τις πράξεις "πρόσθεση" και "μονόμετρος πολλαπλασιασμός", όπως ακριβώς ορίστηκαν στο παρ.1.

Ορισμός. Ενα υποσύνολο $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}$ θα καλείται ***υπόχωρος*** του **V**, ανν είναι και αυτό με τις ίδιες πράξεις, διανυσματικός χώρος.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1. Για να είναι το **W** υπόχωρος του **V**, θα πρέπει μέσα σ' αυτόν, να ορίζονται καλά οι πράξεις. Δηλαδή, με κάθε δύο στοιχεία w_1 και $w_2 \in \mathbf{W}$, και το $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in \mathbf{W}$. Λέμε ότι, το **W** είναι κλειστό ως προς τις πράξεις πρόσθεση και μονόμετρο πολλαπλασιασμό. Συνέπεια της προηγουμένης σχέσεως, είναι ότι, α) το $0\in\mathbf{W}$ και
β), με κάθε $w\in\mathbf{W}$, και το $-w\in\mathbf{W}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7. Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο F του παρ. 3, με X = R. Μία συνάρτηση $f\in F$ καλείται ***αρτία***, ανν $f(x) = f(-x)$ και ***περιττή***, ανν $f(x) = -f(-x)$. Το σύνολο των αρτίων συναρτήσεων, το συμβολίζουμε με F_+ και των περιττών, με F_-. Η μηδενική συνάρτηση f_0 είναι αρτία, μιά και $f_0(x) = 0 = f_0(-x)$. Είναι όμως και περιττή, μιά και $f_0(x) = 0 = -f_0(-x)$. Αρα, $f_0 \in F_+ \cap F_-$. Θα δείξουμε ότι,
$F_+ \cap F_- = \{f_0\}$. Πράγματι, αν $g\in F_+ \cap F_-$ τότε και $g(x) = g(-x) = -g(x)$.
Αρα, $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = f(x)-g(x) = (f-g)(x)$, δηλαδή, $\forall x\in \mathsf{R}$, $f+g = f-g$.
Αρα και 2g = 0, δηλαδή, $\forall x\in \mathsf{R}$, g = 0. Η g είναι και αυτή, ουδέτερο στοιχείο της "+". Ομως, όπως είδαμε, το ουδέτερο στοιχείο της "+" είναι μοναδικό. Αρα $g = f_0$.

Θα δείξουμε τώρα ότι, κάθε ένα από τα F_+, F_-, είναι διανυσματικός χώρος, υπόχωρος του F. Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι, κάθε $f \neq f_0$ είτε θα είναι αρτία, είτε θα είναι περιττή συνάρτηση.

Εστω τώρα, f, $g \in F_+$. Είναι τότε, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\lambda f)(-x) = \lambda f(-x) = \lambda f(x) = (\lambda f)(x)$, άρα λf αρτία. Εξ' άλλου, $(f+g)(-x) = f(-x)+g(-x) = f(x)+g(x) = (f+g)(x)$, δηλαδή η f+g αρτία. Ο F_+ είναι λοιπόν υπόχωρος του F. Ανάλογα έχουμε και ότι ο F_- είναι υπόχωρος του F. Βλέπουμε εδώ, ότι ο F έχει μεριστεί σε δύο υπόχωρους με τομή την f_0. Και το $\{f_0\}$ αποτελεί φανερά, υπόχωρο των F_+ και F_-.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8. Θεωρούμε τον χώρο Ε (βλέπε παρ. 1). Το σύνολο των σημείων της μορφής $X_1 = (x_1, 0, 0)$, $X_2 = (0, x_2, 0)$ και $X_3 = (0, 0, x_3)$, αποτελούν, αντίστοιχα, υπόχωρους του Ε. Οι υπόχωροι αυτοί, ταυτίζονται με τους άξονες Ox_1, Ox_2, και Ox_3 ενός συστήματος αναφοράς του χώρου Ε. Χρησιμοποιούμε ακόμα και τους συμβολισμούς, $X = (x, 0, 0)$, $Y = (0, y, 0)$, $Z = (0, 0, z)$ και Ox, Oy, Oz.

Στο πραγματικό επίπεδο $\mathbb{R}^2$ το σύνολο των σημείων $X = (x_1, x_2)$, που πληρούν την σχέση $x_2 = kx_1$, όπου $k \in \mathbb{R}$ παράμετρος, αποτελούν υπόχωρο του $\mathbb{R}^2$. Ο υπόχωρος αυτός, καλείται ***ευθεία*** διερχόμενη από την αρχή του χώρου, με κλίση, ως προς τον άξονα Ox_1, k. Ας καλέσουμε **W** τον υπόχωρο αυτόν. Εισάγουμε, τώρα, στον $\mathbb{R}^2$ την εξής σχέση ισοδυναμίας: $X \approx Y$, ανν $X-Y \in \mathbf{W}$. Η "≈" είναι σχέση ισοδυναμίας, μιά και α) X = X, επειδή, $X-X = 0 \in \mathbf{W}$. β) $X \approx Y \Rightarrow Y \approx X$, μιά και όταν το $Z = Y-X \in \mathbf{W}$, και το $-Z = X-Y \in \mathbf{W}$. Τέλος, γ) οι $X \approx Y$ και $Y \approx Z \Rightarrow X \approx Z$. Ας θεωρήσουμε, τώρα, μιά τυχούσα κλάση ισοδυναμίας. Την $C_A = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid X \approx A\}$. Αρα, $X \in C_A$, ανν $X-A \in \mathbf{W}$, δηλαδή, ανν $x_2 - \alpha_2 = k(x_1 - \alpha_1)$, όπου $(\alpha_1, \alpha_2) = A$. Είναι λοιπόν, και $x_2 = kx_1 + (\alpha_2 - k\alpha_1)$ ή $x_2 = kx_1 + b$, $b = \alpha_2 - k\alpha_1$. Καλούμε την C_A ευθεία, παράλληλο της **W**.

Θεωρούμε τώρα, την ένωση και την τομή δύο υποχώρων $\mathbf{V}_1$ και $\mathbf{V}_2$ του **V**.

Για την $\mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2$ παρατηρούμε ότι, αν λx και $\mu y \in \mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2$, τότε και λx, $\mu y \in \mathbf{V}_1$, και επειδή ο $\mathbf{V}_1$ υπόχωρος, $\lambda x + \mu y \in \mathbf{V}_1$. Επίσης, λx, $\mu y \in \mathbf{V}_2$, και επειδή ο $\mathbf{V}_2$ υπόχωρος, $\lambda x + \mu y \in \mathbf{V}_2$. Αρα και $\lambda x + \mu y \in \mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2$, άρα η $\mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2$ υπόχωρος.

Για την $\mathbf{V}_1 \cup \mathbf{V}_2$, παρατηρούμε ότι, αυτή δεν είναι πάντοτε υπόχωρος του **V**. Πράγματι, αρκεί να λάβουμε $\mathbf{V}_1 = \{\lambda a \mid \lambda \in F\}$ και $\mathbf{V}_2 = \{\xi b \mid \xi \in F\}$. Τα σύνολα $\mathbf{V}_1$ και $\mathbf{V}_2$ είναι φανερά υπόχωροι του **V**, όμως η $\mathbf{V}_1 \cup \mathbf{V}_2$ δεν είναι υπόχωρος, μιά και στην περίπτωση, που είναι $b \neq \mu a$, το στοιχείο $\lambda a + \xi b \notin \mathbf{V}_1 \cup \mathbf{V}_2$.

3. Γραμμική εξάρτηση. Μιά σχέση γραμμικής εξάρτησης ανάμεσα σε ένα πεπερασμένο πλήθος διανυσμάτων ενός διανυσματικού χώρου **V**(F), είναι μιά ισότητα της μορφής $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$, ***όπου δεν είναι όλοι οι συντελεστές*** λ_i ίσοι με 0. Γράφουμε και $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$, ή απλά, $\sum \lambda_i x_i = 0$.

Ορισμοί. Ενα πεπερασμένο σύνολο από διανύσματα του **V**(F) λέγεται σύνολο ***γραμμικά εξαρτημένο***, ανν υφίσταται μιά σχέση γραμμικής εξάρτησης ανάμεσα στα στοιχεία του. Κάθε σύνολο, που δεν είναι γραμμικά εξαρτημένο, λέγεται σύνολο ***γραμμικά ανεξάρτητο***.

Στη συνέχεια, το ερώτημα αν και κατά πόσον ένα σύνολο διανυσμάτων είναι γραμμικά εξαρτημένο, θα τίθεται πάντα γιά ***πεπερασμένα*** σύνολα.

Εστω ότι, το σύνολο $\{x_1, x_2, \ \dots \ , x_k\}$ είναι σύνολο γραμμικά εξαρτημένο. Υπάρχει τότε κάποια σχέση $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ \dots \ + \lambda_k x_k = 0$ ανάμεσα στα στοιχεία του, όπου δεν είναι όλοι οι συντελεστές $\lambda_j = 0$. Ιδιαίτερα, έστω ότι ο $\lambda_1 \neq 0$. Είναι τότε και

$x_1 + \lambda_2' x_2 + \ \dots \ + \lambda_k' x_k = 0$, $\lambda_j' = \lambda_j / \lambda_1$, j = 2, . . . ,k. Αρα και $x_1 = \sum_{j=2}^{k} -(\lambda_j / \lambda_1) x_j$. Λέμε ότι, το x_1 εκφράζεται γραμμικά από τα x_j.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ 2. i) Οταν έχουμε ένα σύνολο γραμμικά ανεξάρτητο, δεν είναι δυνατόν να υφίσταται σχέση γραμμικής εξαρτήσεως ανάμεσα στα στοιχεία του.
Το σύνολο λοιπόν B = $\{b_1, b_2, \ \dots \ , b_n\}$, είναι σύνολο γραμμικά ανεξάρτητο, ανν μιά οιαδήποτε σχέση γραμμικής εξαρτήσεως $\sum \lambda_i b_i = 0$ συνεπάγεται τις ισότητες $\lambda_\iota = 0$, i = 1, . . . ,n.

ii) Το μονοσύνολο {x}. α) Για x = 0 είναι σύνολο γραμμικά εξαρτημένο, μιά και η $\lambda 0 = 0$, ισχύει, με $\lambda \neq 0$. β) Για $x \neq 0$, είναι σύνολο γραμμικά ανεξάρτητο, μιά και η $\lambda x = 0$ ισχύει ανν $\lambda = 0$.

iii) Αν το u εξαρτάται γραμμικά από τα x_j, γράφουμε, όπως είδαμε, $u = \sum_{j=1}^{k} ë_j x_j$. Και αντίστροφα, όταν ισχύει μιά τέτοια σχέση, το σύνολο X = $\{u, x_1, x_2, \ \dots \ , x_k\}$ είναι σύνολο γραμμικά εξαρτημένο. Σε ένα γραμμικά εξαρτημένο σύνολο, το ***οιοδήποτε*** στοιχείο του, που, στην σχέση γραμμικής εξάρτησης έχει συντελεστή $\lambda \neq 0$, γράφεται ως γραμμικώς συνδυασμός των υπολοίπων. Συνήθως, διατάσουμε κατά τέτοιο τρόπο τα στοιχεία του X, έτσι ώστε, το στοιχείο που θέλουμε να το εκφράσουμε γραμμικά συναρτήσει των υπολοίπων, να είναι τελευταίο, οπότε αυτό, εκφράζεται γραμμικά, συναρτήσει των προηγουμένων του στοιχείων.

iv) Κάθε πεπερασμένο σύνολο m διανυσμάτων, που περιέχει κάποιο γραμμικά εξαρτημένο σύνολο, είναι και αυτό γραμμικά εξαρτημένο. Πράγματι, μιά σχέση γραμμικής εξαρτήσεως ανάμεσα σε k στοιχεία, είναι δυνατόν, να επεκταθεί σε μιά σχέση γραμμικής εξαρτήσεως ανάμεσα σε όλα τα m στοιχεία του δοθέντος συνόλου, ανν θεωρήσουμε ότι έχουμε m–k συντελεστές ίσους με μηδέν.

v) Πόρισμα της προηγούμενης παρατήρησης μαζί με την ii), είναι ότι, κάθε πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων, που περιέχει το {0}, είναι σύνολο γραμμικά εξαρτημένο.

vi) Αν το $\{b_1, b_2, \ \dots \ , b_k\} \subset \mathbf{V}$ είναι σύνολο γραμμικά ανεξάρτητο, και κάθε υποσύνολό του, είναι σύνολο γραμμικά ανεξάρτητο.

Ορισμός. Λέμε ότι, το σύνολο B = $\{b_1, b_2, \ \dots \ , b_k\}$ με $0 \notin B$, παράγει τον χώρο **V**, ανν το τυχόν στοιχείο x του **V**, γράφεται ως γραμμική έκφραση των b_j: $x = \sum_{j=1}^{k} ë_j b_j$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3. i) Το σύνολο $\mathbf{W} = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ \dots \ + \lambda_k b_k$ όπου, λ_j τυχόντα στοιχεία του F, και b_j δοσμένα στοιχεία του **V**(F), αποτελεί τον μικρότερο διανυσματικό χώρο που παράγουν τα b_j υπό την εξής έννοια:

α) Ο **W** είναι διανυσματικός χώρος, και β), κάθε άλλος διανυσματικός χώρος που περιέχει το σύνολο $\{b_1, b_2, \ \dots \ , b_k\}$, περιέχει και τον **W**.

Πράγματι, α) Το $0 \in \mathbf{W}$, μιά και το λαβαίνουμε, αν θέσουμε σε όλα τα λ_j την τιμή 0. Με κάθε $y_1, y_2 \in \mathbf{W}$, και $\lambda y_2 - y_1 \in \mathbf{W}$, μιά και η διαφορά αυτή, εξακολουθεί να είναι κάποια γραμμική έκφραση των w_j. β) Ενας γραμμικός χώρος, που περιέχει τα b_j, περιέχει εξ' ορισμού και κάθε γραμμική τους έκφραση. Αρα περιέχει και τον **W**.

ii) Ο **W** είναι συνεπώς, η τομή όλων των υπόχωρων του **V**, που περιέχουν το σύνολο $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$. Και αντίστροφα, η τομή **W** όλων των υπόχωρων του **V**, που περιέχουν το σύνολο $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$, είναι ένας υπόχωρος, (βλέπε σελ. 8), κάθε στοιχείο x του οποίου έχει την έκφραση $x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j b_j$.

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο των στοιχείων της μορφής $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j b_j$. Το σύνολο αυτό είναι φανερά υπόχωρος του **V**(F), που περιέχει το $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$. Αρα ο υπόχωρος **W** περιέχεται μέσα σ' αυτό. Κάθε στοιχείο x∈**W** είναι συνεπώς της μορφής $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j b_j$.

Συμβολισμός. Τον χώρο, που παράγουν τα $b_1, b_2, \ldots, b_k$, τον συμβολίζουν με $< b_1, b_2, \ldots, b_k >$ ή με $L(b_1, b_2, \ldots, b_k)$.

Ορισμός. Ο χώρος $L(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ καλείται ***γραμμική θήκη*** (linear hull) των b_j.

Την γραμμική θήκη των b_j, είναι δυνατόν να την θεωρήσουμε ως την εικόνα μιάς απεικονίσεως L: P(**V**) → B, όπου P(**V**) το σύνολο των υποσυνόλων του **V**, και B το σύνολο των υπόχωρων του **V**.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 4. Εστω A τυχόν υποσύνολο του **V**. Ισχύουν τότε:
α) L(L(A)) = L(A) β) $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow L(A_1) \subseteq L(A_2)$ γ) A ⊂ L(A).

Ασκηση. Να εξετάσετε αν αληθεύουν ή όχι οι σχέσεις:
$L(A_1 \cup A_2) = L(A_1) \cup L(A_2)$ και $L(A_1 \cap A_2) = L(A_1) \cap L(A_2)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ 5. i) Εστω $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ τυχόν υποσύνολο του **V**, γραμμικά εξαρτημένο με 0∉A, και L(A) ο υπόχωρος, που αυτό παράγει. Αν είναι a∈A, με $a = \sum_{k=1}^{m} \xi_k a_k$, τότε, το σύνολο A′ = L(A)\{a}, εξακολουθεί να παράγει τον L(A). Ας εξετάσουμε το A′. Αν αυτό εξακολουθεί να είναι γραμμικά εξαρτημένο, η προηγούμενη διαδικασία αποβολής κάποιου στοιχείου του, μπορεί να επαναληφθεί. Με τον τρόπο αυτό, θα καταλήξουμε σε κάποιο υποσύνολο B του A, το οποίο θα είναι σύνολο γραμμικά ανεξάρτητο, και το οποίο, θα εξακολουθεί να παράγει τον L(A). Αυτό, είναι και το ελαχίστου πλήθους στοιχείων υποσύνολο του A, που παράγει τον L(A).

ii) Αν το σύνολο $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο που παράγει τον χώρο L(B), τότε, το σύνολο B∪{z}, z∈L(B), που έχει k+1 στοιχεία είναι σύνολο γραμμικά εξαρτημένο.

Ορισμός. ***Βάση*** ενός διανυσματικού χώρου **V**(F) είναι κάθε ***διατεταγμένο*** σύνολο B ⊂ **V**, το οποίο είναι α) γραμμικά ανεξάρτητο, και β) παράγει τον **V**.

Στο εξής, όλοι οι διανυσματικοί χώροι που θα χρησιμοποιούμε, θα δέχονται σύνολο με πεπερασμένο πλήθος από στοιχεία, ως βάση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9. Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$. Το σύνολο B = $\{e_1, e_2, e_3\}$, όπου $e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$ με $\delta_{ij} = 1$ για i = j, $\delta_{ij} = 0$ για $i \neq j$, αποτελεί μιά βάση για τον $\mathbb{R}^3$. α) Το B παράγει τον χώρο, μιά και το τυχόν $x \in \mathbb{R}^3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ γράφεται,

$$x = x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1) = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3,$$

β) Το B είναι γραμμικά ανεξάρτητο, μιά και μιά σχέση της μορφής

$$x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1) = (x_1, x_2, x_3) = 0,$$

ισχύει μόνον ανν $x_1 = x_2 = x_3$.

Η βάση αυτή, καλείται και ***κανονική βάση*** του $\mathbb{R}^3$. Τα παραπάνω, μεταφέρονται εύκολα στον $\mathbb{R}^n$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10. Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$. Το σύνολο
B = $\{b_1, b_2, b_3\}$ όπου $b_i = (\beta_{i1}, \beta_{i2}, \beta_{i3})$ με $\beta_{ij} = 1$ για $i \leq j$, $\beta_{ij} = 0$ για i > j, αποτελεί μιά βάση για τον $\mathbb{R}^3$.
Πράγματι είναι, $x = (x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 - 2x_3)(1,0,0) + (x_2 - x_3)(1,1,0) + x_3(1,1,1)$ και μιά σχέση της μορφής $x_1b_1 + x_2b_2 + x_3b_3 = 0$, είναι ισοδύναμη με το σύστημα των τριών εξισώσεων $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$, $x_3 = 0$, το οποίο, έχει την μοναδική λύση $x_i = 0$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1. Αν το σύνολο $B = \{b_1, b_2, \ \ldots \ , b_k\} \subset \mathbf{V}$ είναι σύνολο γραμμικά ανεξάρτητο, και $b \in L(B)$, τότε οι συντελεστές λ στην έκφραση b = $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j b_j$, είναι μοναδικοί.

Απόδειξη. Εστω ότι, υπήρχε και κάποια άλλη έκφραση του b, η b = $\sum_{j=1}^{k} \xi_j b_j$. Τότε και $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j b_j - \sum_{j=1}^{k} \xi_j b_j$ = 0, οπότε και $\sum_{j=1}^{k} (\lambda_j - \xi_j) b_j$ = 0, και συνεπώς, για κάθε j, $\lambda_j = \xi_j$.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Steinitz). Ολες οι βάσεις του **V** έχουν το αυτό πλήθος στοιχείων.
Απόδειξη. (Βλέπε και παρατήρηση 5). Εστω ότι, ο **V** δέχεται τα σύνολα A και B ως βάσεις με αντίστοιχο πλήθος στοιχείων κ και λ. Εστω ακόμα ότι, $\kappa \leq \lambda$. Αν b_1 τυχόν στοιχείο του B, θεωρούμε το σύνολο $\Gamma_1 = \{b_1\} \cup A$. Το σύνολο αυτό, έχει κ+1 το πλήθος στοιχεία και είναι πια ένα γραμμικά εξαρτημένο σύνολο, (βλέπε παρατήρηση 5, ii) το οποίο εξακολουθεί να παράγει τον χώρο. Εστω $\sum_{i=1}^{\kappa} \lambda_i a_i + \xi_1 b_1 = 0$ η σχέση γραμμικής εξάρτησης του Γ_1. Δεν μπορεί όλοι οι συντελεστές λ στη σχέση αυτή να είναι ίσοι με μηδέν, μιά και τότε, $\xi_1 b_1 = 0$, οπότε και $\xi_1 = 0$ ($b_1 \neq 0$). Τούτο όμως θα οδηγούσε σε άτοπο, μιά και το Γ_1 σύνολο γραμμικά εξαρτημένο.

Ας υποθέσουμε, λοιπόν ότι, ο $\lambda_\kappa \neq 0$. Μπορούμε, λοιπόν, να αποβάλουμε το a_κ από το σύνολο Γ_1, (βλέπε παρατήρηση 2, iii)) και έστω $A' = \Gamma_1 \setminus \{a_\kappa\}$. Το σύνολο αυτό, περιλαμβάνει το b_1, έχει κ το πλήθος στοιχεία, είναι γραμμικά ανεξάρτητο, και εξακολουθεί να παράγει τον χώρο. Το ότι το A΄ είναι σύνολο γραμμικά ανεξάρτητο, έπεται ως εξής: Θεωρούμε την σχέση $\sum_{i=1}^{\kappa-1} \lambda_i a_i + \xi_1 b_1 = 0$ (1). Στην σχέση αυτή, αν το $\xi_1 = 0$, τότε και κάθε $\lambda_i = 0$ μιά και η $\sum_{i=1}^{\kappa-1} \lambda_i a_i = 0$ ισχύει μόνον όταν όλοι οι συντελεστές λ είναι μηδέν, αφού το

$\{a_1, a_2, \ldots, a_{\kappa-1}\}$ είναι υποσύνολο γραμμικά ανεξάρτητου συνόλου. Αν τώρα $\xi_1 \neq 0$ και το Α΄ είναι σύνολο γραμμικά εξαρτημένο, μπορούμε από το σύνολο Α΄ να αποβάλουμε το στοιχείο b_1, (βλέπε παρατήρηση 2, iii)) και το σύνολο που απομένει, να εξακολουθεί να παράγει τον χώρο. Τούτο όμως είναι άτοπο, μιά και στοιχείο του χώρου είναι και το a_κ, το οποίο δεν παράγεται από τα a_i, i = 1, . . ., κ–1. Αρα και το Α΄ γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο.

Την ίδια διαδικασία, την επαναλαμβάνουμε θέτοντας στην θέση του Α το Α΄. Το σύνολο Α΄΄ που θα λάβουμε, θα έχει κ το πλήθος στοιχεία, θα είναι γραμμικά ανεξάρτητο, και θα παράγει τον χώρο. Ακόμα, θα περιλαμβάνει δύο στοιχεία από το σύνολο Β.

Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται, μέχρις ότου κ στοιχεία του Β, εμφανιστούν στο $A^{(\kappa)}$. Θα έχουμε τότε, ένα σύνολο από στοιχεία b, κ το πλήθος, τα οποία είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, και παράγουν τον χώρο. Συνεπώς, και τα κ–λ απομένοντα στοιχεία του Β. Τούτο όμως είναι άτοπο, μιά και κανένα στοιχείο του Β δεν γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του Β. Αναγκαστικά, λοιπόν, κ = λ.

Ορισμός. Γραμμική διάσταση, ή απλά ***διάσταση*** (dimension) του **V**, καλείται το πλήθος των στοιχείων μιάς βάσεως του **V**. Συμβολικά γράφουμε, dim**V**.

Ασκηση. Για ποιές τιμές του λ, το σύνολο {(1,2,λ), (0,1,λ–1), (3,4,3)} είναι γραμμικά εξαρτημένο ;

4. Εφαρμογή. Ο χώρος της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Εστω ο Ε = $\mathbb{R}^n$ του παρ.1 Ιδιαίτερα, θα ασχοληθούμε με τις περιπτώσεις όπου n = 2, 3.

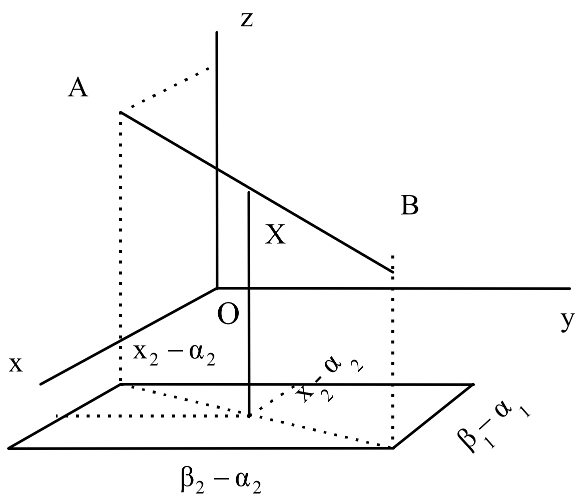
Ορολογία. Συγγραμμικά = πάνω στην ίδια ευθεία. ΑΒ = ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το σημείο $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ και πέρας το $B = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$.

Σχηματίζουμε το Ε×Ε, και στη συνέχεια, θεωρούμε την απεικόνιση του Ε×Ε επί του Ε, που ορίζεται από την σχέση, στο (Α,Β)∈Ε×Ε αντιστοιχεί το Β–Α∈Ε. Θα καλούμε το σημείο Β–Α ***(γεωμετρικό) διάνυσμα*** με αρχή το Α και πέρας το Β, και θα το συμβολίζουμε με $\overrightarrow{AB}$ ή απλά $\vec{c}$, όταν τα άκρα του διανύσματος είναι γνωστά. Τα σημεία R του Ε, επειδή είναι, R = R–O, ταυτίζονται με τα διανύσματα $\vec{r}$ = $\overrightarrow{OR}$, τα οποία και καλούνται ***ακτινικά*** διανύσματα, ή ***διανύσματα θέσεως*** [radial vectors].

Παρατηρούμε ότι, στο διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ απεικονίζεται και κάθε άλλο ζεύγος της μορφής (Α+Κ, Β+Κ). Οταν θεωρούμε λοιπόν το $\overrightarrow{AB}$, μαζί μ' αυτό πρέπει να θεωρούμε και όλα τα διανύσματα της μορφής $\overrightarrow{XY}$, όπου Χ = Α+Κ και Υ = Β+Κ. Τούτο επιτυγχάνεται, αν ορίσουμε την εξής σχέση ισοδυναμίας επί του Ε: $\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{XY}$. Οι τάξεις ισοδυναμίας που λαμβάνουμε κατ' αυτόν τον τρόπο, καλούνται ***(ελεύθερα) διανύσματα***. Υποθέτουμε, τώρα, γνωστή την Ευκλείδειο Γεωμετρία. Λαβαίνουμε τυχόν σημείο του Ευκλείδειου χώρου, και αντιστοιχούμε σ' αυτό, το σημείο Ο του χώρου Ε (περίπτωση, n = 3). Θεωρούμε ακόμα, τρεις μη συνεπίπεδες ευθείες L_1, L_2, και L_3, που διέρχονται από το σημείο Ο. Πάνω σ' αυτές, αντιστοιχίζουμε αντιστοίχως, τα σημεία των υπόχωρων Οx, Oy και Oz (βλέπε παρ. 7), έτσι ώστε, το (0,0,0) να συμπίπτει με την αρχή Ο του χώρου. Τα διανύσματα $\vec{e}_1$ = (1,0,0), $\vec{e}_2$ = (0,1,0) και $\vec{e}_3$ =(0,0,1), όπως είδαμε (βλέπε παρ. 8, σελ 8) αποτελούν την κανονική βάση του χώρου μας.

Κάθε σημείο $X = (x_1, x_2, x_3)$ του χώρου μας, έχει την έκφραση $(x_1, x_2, x_3) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$.

Θεωρούμε, τώρα, τα δύο σημεία Α, Β του χώρου μας Ε, και μαζί μ' αυτά, το σύνολο των σημείων $X = (x_1, x_2, x_3)$ του Ε, που πληρούν τις αναλογίες:



$$\frac{x_1-\alpha_1}{\beta_1-\alpha_1}=\frac{x_2-\alpha_2}{\beta_2-\alpha_2}=\frac{x_3-\alpha_3}{\beta_3-\alpha_3}$$

Τα σημεία αυτά, λόγω του θεωρήματος του Θαλή, βρίσκονται πάνω στην ευθεία L, που ορίζουν τα σημεία A, B. Αν την τιμή των λόγων αυτών την καλέσουμε t, οι παραπάνω αναλογίες, είναι ισοδύναμες προς το σύστημα:

$$x_i=\alpha_i+(\beta_i-\alpha_i)t,\ i=1,2,3.$$

Το σύστημα αυτό γράφεται και στη μορφή $\vec{r}=\vec{a}+t(\overrightarrow{AB})$. Η παράμετρος t, διατάσει φυσιολογικά τα σημεία της ευθείας L. Για t = 0 λαβαίνουμε το σημείο A, αρχή του $\overrightarrow{AB}$, και για t = 1, το σημείο B, πέρας του $\overrightarrow{AB}$. Η σχέση αυτή, προσδιορίζει μία ευθεία που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στο ευθύγραμμο τμήμα AB.

Ας δούμε, τώρα, πότε δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι συγγραμμικά. Εστω λοιπόν, τα ευθύγραμμα τμήματα AB και XY, συγγραμμικά. Τότε, τα σημεία A, B και X, Y είναι πάνω στην ίδια ευθεία. Είναι τότε, $\vec{b}=\vec{x}+t_1(\vec{y}-\vec{x})$ και $\vec{a}=\vec{x}+t_2(\vec{y}-\vec{x})$.

Αρα και $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}=\lambda(\vec{y}-\vec{x})=\lambda(\overrightarrow{XY})$ $\lambda\neq 0$. Λέμε ότι, τα $\overrightarrow{XY}$ και $\overrightarrow{AB}$ είναι ***ανάλογα***. Αντίστροφα, αν $\overrightarrow{AB}=\lambda(\overrightarrow{XY})$, τότε τα A, B, X, Y είναι συγγραμμικά, μιά και τότε έχουμε την $\vec{b}=\vec{a}+\lambda(\overrightarrow{XY})$. Η σχέση αυτή, προσδιορίζει μία ευθεία, που διέρχεται από το σημείο A και είναι παράλληλη στο ευθύγραμμο τμήμα XY.

Δείξαμε λοιπόν ότι, δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{p}$, $\vec{q}$ αντιστοιχούν σε συγγραμμικά ευθύγραμμα τμήματα, ανν αυτά είναι ανάλογα $(\vec{p}=\lambda\vec{q})$. Αν $\lambda>0$, τα τμήματα έχουν την ίδια φορά. Αν $\lambda<0$, τα τμήματα έχουν την αντίθετο φορά.

Σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα AB, αντιστοιχεί το $\overrightarrow{AB}$ κατά ένα και μόνο τρόπο. Αντίστροφα, όλα τα ευθύγραμμα τμήματα, τα οποία μέσω μιάς παραλλήλου μεταφοράς που διατηρεί την φορά τους, συμπίπτουν, αντιστοιχούν στο ίδιο ελεύθερο διάνυσμα.

Θα εξετάσουμε, τώρα, την περίπτωση τριών ευθυγράμμων τμημάτων, που δεν είναι συγγραμμικά. Υποθέτουμε ότι, σ' αυτά, αντιστοιχούν τα ελεύθερα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, και $\vec{z}$. Λαβαίνουμε δύο εξ' αυτών, έστω τα $\vec{x}$ και $\vec{y}$, και σε αυτά αντιστοιχούμε ευθύγραμμα τμήματα, με κοινή αρχή το σημείο A. Τα AB και AΓ. Αυτά, ορίζουν ένα επίπεδο μέσα στον χώρο E. Το ευθύγραμμο τμήμα, που αντιστοιχεί στο $\vec{z}$, με μιά παράλληλη μεταφορά, λαβαίνετε πάνω στο επίπεδο αυτό, έτσι ώστε, η αρχή του, να συμπίπτει με το τέλος του AB. Ας το καλέσουμε BΔ. Εστω τώρα ότι, τα ευθύγραμμα αυτά τμήματα δεν είναι ανά δύο παράλληλα. Τότε, η ευθεία BΔ και η ευθεία AΓ τέμνονται, έστω στο σημείο P. Είναι τότε, $\overrightarrow{BP}=\kappa(\overrightarrow{B\Delta})=\kappa\vec{z}$ και $\overrightarrow{AP}=\lambda(\overrightarrow{A\Gamma})=\lambda\vec{y}$. Εχουμε όμως ότι, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AP}$. Αρα και $\vec{x}+\kappa\vec{z}=\lambda\vec{y}$, ή $\vec{x}=\lambda\vec{y}-\kappa\vec{z}$. Η σχέση αυτή δείχνει ότι, το $\{\vec{x},\vec{y},\vec{z}\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο. Φανερά, ισχύει και το αντίστροφο.

Αν τώρα, κάποιο απ' αυτά είναι παράλληλο προς κάποιο άλλο, με μία μεταφορά τα παράλληλα τμήματα καθίστανται συγγραμμικά, και τα αντιστοιχούντα σ' αυτά διανύσματα, ανάλογα. Η προηγούμενη σχέση γραμμικής εξάρτησης ισχύει λοιπόν, αν επιτρέψουμε να έχουμε κάποιον συντελεστή ίσο με μηδέν.

Συνεπώς, τρία διανύσματα είναι συνεπίπεδα, ανν είναι γραμμικά εξαρτημένα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11. Επί της ευθείας L να βρεθεί ένα σημείο X, που να χωρίζει το ευθύγραμμο τμήμα AB σε λόγο $\frac{1}{n}$.

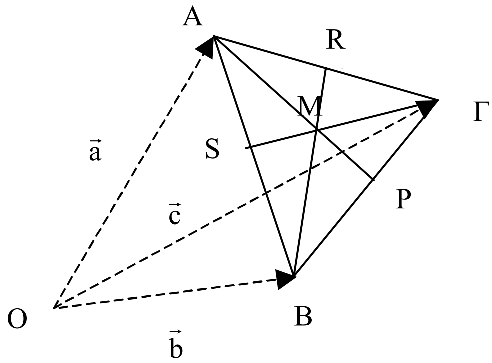
Θέλουμε να λάβουμε το σημείο X έτσι ώστε, όταν το τμήμα AX ληφθεί ως μονάδα σύγκρισης, το τμήμα AB να είναι n φορές αυτή. Θέλουμε λοιπόν να έχουμε ότι, $\overrightarrow{AB} = n(\overrightarrow{AX})$. Η σχέση αυτή είναι ισοδύναμη με το σύστημα, $\beta_i - \alpha_i = n(x_i - \alpha_i)$, i = 1,2,3. Αρα και με το $x_i = \frac{\beta_i - (1-n)\alpha_i}{n}$ i = 1,2,3, που γράφεται ισοδύναμα και $\vec{r} = \frac{\vec{b} + (n-1)\vec{a}}{n}$.

Στην περίπτωση, που το X θέλουμε να είναι μέσον του AB, n = 2, και $\vec{r} = \frac{\vec{b} + \vec{a}}{2}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12. Να δείξετε ότι τα σημεία P(1,–1,4) και S(5,3,0) είναι συγγραμμικά με τα σημεία X(2,0,3) και Y(–2,–4,7).

Θέλουμε να δείξουμε ότι, τα ευθύγραμμα τμήματα $\overrightarrow{PS}$ = (5–1, 3+1, 0–4) = (4,4,–4) και $\overrightarrow{XY}$ = (–2–2, –4–0, 7–3) = (–4, –4, 4) βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία. Τούτο πράγματι είναι αληθές, μιά και $\overrightarrow{XY} = (-1)\ \overrightarrow{PS}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13. Θα δείξουμε ότι, παντός τριγώνου, οι διάμεσοι διέρχονται δια του αυτού σημείου M. Εστω λοιπόν, A, B, Γ οι κορυφές του τριγώνου, και O ένα σημείο του χώρου, που δεν κείται στο επίπεδο του τριγώνου. Τα διανύσματα θέσεως αυτών, είναι αντίστοιχα, τα $\vec{a}$, $\vec{b}$ και $\vec{c}$. Φανερά, το $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ είναι σύνολο γραμμικά ανεξάρτητο. Είναι



$\vec{c} - \vec{b} = \overrightarrow{B\Gamma}$, $\vec{b} - \vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{a} - \vec{c} = \overrightarrow{\Gamma A}$. Τότε, αν P, S, R τα μέσα αντιστοίχως των πλευρών BΓ, AB και AΓ, έχουμε ότι, (βλέπε παρ. 10),

$$\vec{p} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2},\quad \vec{s} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2},\quad \vec{r} = \frac{\vec{c} + \vec{a}}{2}$$

Θεωρούμε, τώρα, και το σημείο M, τομή των διαμέσων ΓS και BR.
Είναι τότε, $\overrightarrow{BM} = \kappa(\overrightarrow{BR})$, $\overrightarrow{\Gamma M} = \lambda(\overrightarrow{\Gamma S})$. Εξ' άλλου, $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{B\Gamma}$ ή $\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{\Gamma M} = \overrightarrow{B\Gamma}$ ή και $\overrightarrow{BR} - \lambda(\overrightarrow{\Gamma S}) = \overrightarrow{B\Gamma}$. Αρα και $\kappa(\vec{r} - \vec{b}) - \lambda(\vec{q} - \vec{c}) = \vec{c} - \vec{b}$. Είναι λοιπόν και

$$\kappa\frac{\vec{a} + \vec{c}}{2} - \kappa\vec{b} - \lambda\frac{\vec{b} + \vec{a}}{2} + \lambda\vec{c} = \vec{c} - \vec{b} \qquad ή \qquad (\kappa-\lambda)\frac{\vec{a}}{2} + (1-\kappa-\frac{\lambda}{2})\vec{b} + (\frac{\kappa}{2} + \lambda - 1)\vec{c} = 0.$$

Το $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ όμως, είναι σύνολο γραμμικά ανεξάρτητο. Αρα, $\kappa - \lambda = 0$, $1 - \kappa - \frac{\lambda}{2} = 0$, και $\frac{\kappa}{2} + \lambda - 1 = 0$. Είναι λοιπόν, $\kappa = \lambda = \frac{2}{3}$. Δηλαδή, $\overrightarrow{\Gamma M} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{\Gamma S})$. Αρα και $\vec{m} - \vec{c} = \frac{\vec{a} + \vec{c} - 2\vec{b}}{3}$ ή $\vec{m} = \frac{\vec{a} + \vec{c} + \vec{b}}{3}$. Βλέπουμε λοιπόν, ότι το σημείο M προσδιορίζεται από τις κορυφές του τριγώνου, και. είναι ανεξάρτητο από την εκλογή των συγγεκριμένων διαμέσων. Αρα όλες οι διάμεσοι του τριγώνου, το περιέχουν.

Ασκήσεις. 1) Τα σημεία (1,1,–1), (2,1,1), (3,–1,2), (0,3,–2) είναι ή δεν είναι συνεπίπεδα;
2) Ποία είναι η διανυσματική εξίσωση του επιπέδου, που ορίζεται από τα σημεία (0,1,–1), (1,–1,1) και (3,–2,4). 3) Ποία είναι η διανυσματική εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία (1,–1,2), (3,1,1) και είναι παράλληλο προς την ευθεία που ορίζουν τα σημεία

$(-1,2,3)$ και $(4,-1,1)$.

5. Πράξεις με τους υπόχωρους. Θεωρούμε έναν γραμμικό χώρο $\mathbf{V}(F)$ και δύο υποχώρους του $\mathbf{U}$ και $\mathbf{W}$. Είδαμε (σελ. 7) ότι, η τομή τους είναι και αυτή υπόχωρος του $\mathbf{V}$. Στο παρακάτω παράδειγμα, θα δούμε τον τρόπο με τον οποίο ο υπόχωρος αυτός προσδιορίζεται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 15. Εστω $\mathbf{U} = L\{(1,-1,0), (1,0,2)\}$ και $\mathbf{W} = L\{(0,1,0), (0,1,2)\}$. Εστω x ένα στοιχείο της τομής $\mathbf{U}\cap\mathbf{W}$ αυτών. Είναι τότε, $x = \kappa(1,-1,0)+\lambda(1,0,2)$ μιά και $x\in\mathbf{U}$ και
$x = \mu(0,1,0)+\nu(0,1,2)$ μιά και $x\in\mathbf{W}$. Αρα, $\kappa(1,-1,0)+\lambda(1,0,2) = \mu(0,1,0)+\nu(0,1,2)$.
Εχουμε λοιπόν ότι, $(\kappa+\lambda, -\kappa-\mu-\nu, 2\lambda-2\nu) = (0,0,0)$, και συνεπώς οδηγούμεθα στο σύστημα
$\kappa+\lambda = 0$, $-\kappa-\mu-\nu = 0$, $\lambda-\nu = 0$. Από τις ισότητες αυτές λαβαίνουμε τις $\lambda = \nu$, $\kappa = -\nu$, $\mu = 0$.
Αρα $x = -\nu(1,-1,0)+\nu(1,0,2) = \nu(0,1,2)$, και συνεπώς, $\mathbf{U}\cap\mathbf{W} = L\{(0,1,2)\}$.
Οπως είδαμε, σελ. 8, η ένωση δύο υπόχωρων, δεν είναι πάντα υπόχωρος.
Εισάγουμε λοιπόν, την έννοια του αθροίσματος δύο υποχώρων.

Ορισμός. Το σύνολο όλων των δυνατών αθροισμάτων κάθε $x\in\mathbf{U}$ με κάθε $y\in\mathbf{W}$ καλείται ***άθροισμα*** $\mathbf{U}+\mathbf{W}$ των υποχώρων $\mathbf{U}$ και $\mathbf{W}$.

Είναι λοιπόν, $z\in\mathbf{U}+\mathbf{W}$, ανν $z = x+y$, όπου $x\in\mathbf{U}$ και $y\in\mathbf{W}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2. Το $\mathbf{U}+\mathbf{W}$ είναι υπόχωρος του $\mathbf{V}$.
Απόδειξη. Ενα τυχόν διάνυσμα $z\in\mathbf{U}+\mathbf{W}$ έχει την μορφή $z = x+y$, όπου $x\in\mathbf{U}$ και $y\in\mathbf{W}$. Αν λοιπόν z_1 και z_2 δύο στοιχεία του $\mathbf{U}+\mathbf{W}$, τότε και $z_1 = x_1 + y_1$, $z_2 = x_2 + y_2$, οπότε και
$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = x + y$, στοιχείο του $\mathbf{U}+\mathbf{W}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 8. α) Φανερά, αν $\mathbf{U} = L(u_1, u_2, \ \ldots \ , u_\kappa)$ και $\mathbf{W} = L(w_1, w_2, \ \ldots \ , w_\lambda)$,

$$\mathbf{U}+\mathbf{W} = L(u_1, u_2, \ \ldots \ , u_\kappa, w_1, w_2, \ \ldots \ , w_\lambda) = L\{\mathbf{U}\cup\mathbf{W}\}$$

Αρα και, $L\{\mathbf{U}\cup\mathbf{W}\} = L(\mathbf{U})+L(\mathbf{W})$
β) Αν ο $\mathbf{U}\cup\mathbf{W}$ υπόχωρος, τότε είτε $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$ είτε $\mathbf{U} \supseteq \mathbf{W}$. Πράγματι, έστω $z\in\mathbf{U}\cup\mathbf{W}$.
Επειδή ο $\mathbf{U}\cup\mathbf{W}$ υπόχωρος, $\mathbf{U}\cup\mathbf{W} = L\{\mathbf{U}\cup\mathbf{W}\} = L(\mathbf{U})+L(\mathbf{W})$.

Αρα και $z = u+w$. Ομως είτε $z\in\mathbf{U}$ (είτε $\mathbf{U}\cap\mathbf{W}$) οπότε και $w = z-u$ δηλαδή $w\in\mathbf{U}$, είτε $z\in\mathbf{W}$ (είτε $\mathbf{U}\cap\mathbf{W}$) οπότε και $u = z-w$ δηλαδή $u\in\mathbf{W}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 16 i) Να βρεθεί το άθροισμα των χώρων $\mathbf{U}$ και $\mathbf{W}$ του προηγουμένου παραδείγματος.

Φανερά, $\mathbf{U}+\mathbf{W} = L\{(1,-1,0), (1,0,2), (0,1,0), (0,1,2)\}$. Απομένει να βρούμε μιά βάση για τον χώρο. Δοκιμάζουμε να δούμε, αν το $(0,1,2)$ είναι γραμμική εξάρτηση των προηγουμένων του. Προς τούτο, θεωρούμε την $(0,1,2) = \kappa(1,-1,0)+\lambda(1,0,2)+\mu(0,1,0)$ ή την
$(0,1,2) = (\kappa+\lambda, -\kappa+\mu, 2\lambda)$ οπότε και $\kappa+\lambda = 0$, $-\kappa+\mu = 1$, $\lambda = 2$. Αρα και $\lambda = 2$, $\kappa = -2$, $\mu = -1$, και το $(0,1,2)$ εξαρτάται γραμμικά από τα προηγούμενά του.
Είναι λοιπόν και $\mathbf{U}+\mathbf{W} = L\{(1,-1,0), (1,0,2), (0,1,0)\}$. Θα δούμε τώρα, αν το σύνολο αυτό είναι ή όχι γραμμικά εξαρτημένο. Εστω πάλι, $(0,1,0) = \kappa(1,-1,0)+\lambda(1,0,2) = (\kappa+\lambda,-\kappa, 2\lambda)$ απ' όπου, $\kappa+\lambda = 0$, $-\kappa = 1$, $\lambda = 0$. Οι ισότητες αυτές όμως είναι αδύνατες. Αρα το προηγούμενο σύνολο είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Συνεπώς, αποτελεί βάση γιά τον χώρο $\mathbf{U}+\mathbf{W}$.

ii) Αν $a = (1,1,0)$ και $b = (2,1,1)\in \mathbb{R}^3$, ποία συνθήκη πρέπει να πληρούν τα (ξ_1,ξ_2,ξ_3) γιά να είναι $(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in<\{a,b\}>$;

α) Αν $(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in<\{a,b\}>$ τότε και $(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \lambda a+\mu b = \lambda(1,1,0)+\mu(2,1,1) = (\lambda+2\mu, \lambda+\mu, \mu)$ οπότε από τις ισότητες $\xi_1 = \lambda+2\mu$, $\xi_2 = \lambda+\mu$, $\xi_3 = \mu$ λαβαίνουμε την σχέση $\xi_1 = \xi_2+\xi_3$ που είναι και η συνθήκη που ζητάμε.

β) Αντίστροφα, αν $\xi_1 = \xi_2+\xi_3$. Τότε είναι και $(\xi_2+\xi_3, \xi_2, \xi_3) = \xi_2(1,1,0)+\xi_3(1,0,1)$. Παρατηρούμε ότι $(1,0,1) = (2,1,1)-(1,1,0)\in<\{a,b\}>$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3. Ισχύει ότι: dim(**U**+**W**) = dim**U**+dim**W** – dim(**U**∩**W**).
Απόδειξη. Εστω dim**U** = λ, και $\{u_1, u_2, \ \dots \ , u_\lambda\}$ βάση του **U**,
dim**W** = μ, και $\{w_1, w_2, \ \dots \ , w_\mu\}$ μία βάση του **W**. Εστω dim(**U**∩**W**) = κ. Ξεκινάμε, από μιά βάση $B = \{b_1, b_2, \ \dots \ , b_k\}$ της τομής **U**∩**W**. Αν το $u_1 \in \mathbf{U}$ και $u_1 \notin L(B)$, θεωρούμε το σύνολο $u_1 \cup B$. Αν $L(u_1 \cup B) \neq \mathbf{U}$, θεωρούμε το $u_2 \in \mathbf{U}$ έτσι ώστε $u_2 \notin L(u_1 \cup u_2 \cup B)$. Με τον τρόπο αυτό, κατασκευάζουμε το σύνολο $\{u_1, u_2, \ \dots \ , u_{\lambda'}\} \cup B$, λ΄ = λ–κ, το οποίο είναι βάση του **U**. Ομοια κατασκευάζουμε το $B \cup \{w_1, w_2, \ \dots \ , w_{\mu'}\}$, μ΄ = μ–κ, το οποίο είναι μιά βάση γιά τον **W**. Αρκεί να δείξουμε ότι το

$$\{u_1, u_2, \ \dots \ , u_{\lambda'}\} \cup B \cup \{w_{\mu'}, w_{\mu'-1}, \ \dots \ , w_1\} \qquad (1)$$

είναι βάση του **U**+**W**. Πράγματι, το x∈**U**+**W** γράφεται x = u+w. Είναι τώρα,

$$u = \sum_{i=1}^{\lambda'} \eta_i u_i + \sum_{j=1}^{\kappa} \xi_j b_j \quad \text{και} \quad w = \sum_{i'=1}^{\mu'} \eta'_{i'} w_{i'} + \sum_{j'=1}^{\kappa} \xi_{j'} b_{j'}$$

και συνεπώς, το x παράγεται από τα στοιχεία του συνόλου (1). Θα πρέπει ακόμα να δείξουμε ότι, τα στοιχεία του (1) είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Προς τούτο, θεωρούμε μιά σχέση της μορφής $\sum_{i=1}^{\lambda-\kappa} \eta_i u_i + \sum_{j=1}^{\kappa} \xi_j b_j + \sum_{i'=1}^{\mu-\kappa} \eta'_{i'} w_{i'} = 0$. Παρατηρούμε τώρα τα εξής:

α) Κανένας γραμμικός συνδυασμός των u δεν είναι γραμμική έκφραση των υπολοίπων στοιχείων, (δεν μπορούμε δηλαδή να έχουμε $\sum_{k=1}^{\rho} \mu_k u_k = \sum_{j=1}^{\kappa} \xi_j b_j + \sum_{i'=1}^{\mu-\kappa} \eta'_{i'} w_{i'}$, ρ ≤ λ–κ) γιατί σε αντίθετη περίπτωση, αυτός, θα ανήκε στην τομή των **U** και **W**, πράγμα που αποκλείεται. β) Γιά τον ίδιο λόγο, κανένας γραμμικός συνδυασμός των w δεν είναι γραμμική έκφραση των υπολοίπων στοιχείων. γ) Τέλος, κανένας γραμμικός συνδυασμός των b δεν είναι γραμμική έκφραση των υπολοίπων στοιχείων, μιά και τα στοιχεία αυτά, δεν μπορούν να εκφράσουν κανένα από τα στοιχεία της βάσεως της τομής **U**∩**W**. Το σύνολο συνεπώς (1) αποτελεί βάση του **U**+**W**, και η βάση αυτή, έχει λ΄+κ+μ΄= λ+μ–κ το πλήθος στοιχεία.

Ορισμός. ***Ευθύ*** καλείται το άθροισμα των **U** και **W**, ανν **U**∩**W** = {0}.
Στην περίπτωση αυτή, γράφουμε **U**⊕**W**, και καλούμε τους χώρους **U** και **W** ***συμπληρωματικούς***. Επαγωγικά, ορίζεται το ευθύ άθροισμα πεπερασμένου πλήθους υποχώρων.
Αν έχουμε n υπόχωρους $\mathbf{W}_i$ του **V**, το άθροισμά τους είναι ευθύ, τότε και μόνον αν, η τομή του τυχόντος υπόχωρου $\mathbf{W}_i$ με το άθροισμα των υπολοίπων, είναι ο {0}.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 17. Ισχύει ότι, Ε = Χ⊕Υ⊕Ζ (βλέπε και παρ.8, σελ.8).

ΠΡΟΤΑΣΗ 4. Αν κάθε στοιχείο του x∈$\mathbf{V} = \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 + \ \dots \ + \mathbf{U}_k$ έχει την μοναδική έκφραση $x = u_1 + u_2 + \ \dots \ + u_k$ όπου $u_\kappa \in \mathbf{U}_\kappa$, κ = 1, . . . ,k, τότε και μόνον τότε, το παραπάνω άθροισμα των υποχώρων είναι μοναδικό.
Απόδειξη. α) Εστω ότι $\mathbf{V} = \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 + \ \dots \ + \mathbf{U}_k$ και ότι η έκφραση του τυχόντος στοιχείου x του **V**, $x = u_1 + u_2 + \ \dots \ + u_k$ με $u_\kappa \in \mathbf{U}_\kappa$, κ = 1,…,k, είναι μοναδική. Θα δείξουμε ότι, $\mathbf{V} = \mathbf{U}_1 \oplus \mathbf{U}_2 \oplus \ \dots \ \oplus \mathbf{U}_k$. Αρκεί να δείξουμε ότι, η τομή κάποιου απ' αυτούς, έστω του $\mathbf{U}_1$ με το άθροισμα των υπολοίπων, είναι ο υπόχωρος {0}. Εστω λοιπόν, ότι η τομή αυτή, περιέχει και ένα στοιχείο x ≠ 0. Τότε, x∈ $\mathbf{U}_1$ και x∈ $\mathbf{U}_2 + \ \dots \ + \mathbf{U}_k$.
Αρα $x = u_1$ και $x = u_2 + \ \dots \ + u_k$. Το x δεν έχει λοιπόν μοναδική έκφραση, αντίθετα με την υπόθεσή μας.
β) Εστω ότι, $\mathbf{V} = \mathbf{U}_1 \oplus \mathbf{U}_2 \oplus \ \dots \ \oplus \mathbf{U}_k$. Θα δείξουμε ότι, η έκφραση

$x = u_1 + u_2 + \dots + u_k$ είναι μοναδική. Πράγματι, αν είχαμε και $x = u'_1 + u'_2 + \dots + u'_k$ τότε θα είχαμε και ότι, $(u_1 - u'_1) + (u_2 - u'_2) + \dots + (u_k - u'_k) = 0$. Αρα, το $(u_1 - u'_1) + (u_2 - u'_2) + \dots + (u_k - u'_k)$ είναι στοιχείο της τομής όλων των υποχώρων. Αρα, $(u_1 - u'_1) + (u_2 - u'_2) + \dots + (u_k - u'_k) \in \mathbf{U}_j$ γιά κάθε j = 1,. . .,k. Είναι, λοιπόν, γιά j = 1, $(u_1 - u'_1) + (u_2 - u'_2) + \dots + (u_k - u'_k) \in \mathbf{U}_1$ και επειδή $(u_1 - u'_1) \in \mathbf{U}_1$ είναι και $(u_2 - u'_2) + \dots + (u_k - u'_k) \in \mathbf{U}_1$. Τούτο όμως είναι δυνατόν μόνον αν $(u_2 - u'_2) + \dots + (u_k - u'_k) = 0$. Εφαρμόζουμε τον προηγούμενο συλλογισμό γιά το προκύπτον άθροισμα, συνεχώς, μέχρις ότου καταλήξουμε στην σχέση $(u_k - u'_k) = 0$.
Είναι λοιπόν, $u_k = u'_k$ Ομοια $u_{k-1} = u'_{k-1}$, κ.ο.κ., $u_1 = u'_1$, οπότε έχουμε την μοναδικότητα της έκφρασης του x, ως $x = u_1 + u_2 + \dots + u_k$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1). Αν το σύνολο $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε έχουμε ότι, $L(B) = L(b_1) \oplus L(b_2) \oplus \dots \oplus L(b_k)$. 2). $\dim L(B) = \sum_{j=1}^{\kappa} \dim L(b_j)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 18. Μέσα στον E, dimE = 3 θεωρούμε δύο υπόχωρους με διάσταση r = 2. H τομή των δύο αυτών υπόχωρων δεν έχει διάσταση μηδέν, μιά και τότε, το άθροισμά τους θα ήταν ευθύ, πράγμα άτοπο, μιά και dimE = 3. Αρα η τομή αυτή έχει διάσταση είτε 1 είτε 2. Στην περίπτωση, που η διάσταση της τομής είναι 2, οι υπόχωροι ταυτίζονται αναγκαστικά.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 19. Στο παράδειγμα 8, είδαμε ότι, η σχέση $x \approx y$ ανν $y-x \in \mathbf{W}$ όπου ο $\mathbf{W}$ υπόχωρος του $\mathbf{V}$, είναι σχέση ισοδυναμίας. Θεωρούμε το σύνολο πηλίκο $\mathbf{V}/\mathbf{W}$. Το οργανώνουμε σε διανυσματικό χώρο, ορίζοντας το άθροισμα δύο στοιχείων του C_a και C_b με την σχέση $C_a + C_b = C_{a+b}$, και τον μονόμετρο πολλαπλασιασμό ως εξής: $\lambda C_a = C_{\lambda a}$. Οι πράξεις αυτές, είναι καλά ορισμένες. Πράγματι, α) γιά το άθροισμα. Θα πρέπει να δείξουμε ότι το άθροισμα δύο τάξεων, δεν εξαρτάται από τον λαμβανόμενο αντιπρόσωπό τους. Αν δηλαδή, και a΄, b΄ δύο άλλα στοιχεία των τάξεων C_a και C_b αντίστοιχα, $C_{a+b} = C_{a'+b'}$. Εχου-με, $a' \approx a$ και $b' \approx b$. Αρα είναι και $a'-a \in \mathbf{W}$, $b'-b \in \mathbf{W}$. Επειδή $\mathbf{W}$ υπόχωρος, $(a'+b')-(a+b) \in \mathbf{W}$, δηλαδή, $a'+b' \in C_{a+b}$. Δείξαμε έτσι, το ότι $C_a + C_b \subseteq C_{a+b}$. Ανάλογα, αποδεικνύεται και η αντίστροφη σχέση. Και ο μονόμετρος πολλαπλασιασμός αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο, ότι είναι καλά ορισμένος.

Με τον τρόπο αυτό, το σύνολο $\mathbf{V}/\mathbf{W}$ οργανώνεται σε γραμμικό χώρο. Το στοιχείο 0 του χώρου αυτού, είναι η τάξη C_0, που ταυτίζεται με τον υπόχωρο $\mathbf{W}$, μιά και $z \approx 0$, δηλαδή, $z-0 \in \mathbf{W}$ ανν $z \in \mathbf{W}$.

Ας υπολογίσουμε, τώρα, την διάσταση του $\mathbf{V}/\mathbf{W}$. Προς τούτο, υποθέτουμε ότι, $\dim\mathbf{V} = n$ και $\dim\mathbf{W} = k$. Στη συνέχεια, θεωρούμε την βάση $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ του $\mathbf{W}$, την οποία και επεκτείνουμε σε μία βάση $\{b_1, b_2, \dots, b_k, b_{k+1}, \dots, b_n\}$ του $\mathbf{V}$.
Φανερά, τα b_j όπου j = 1, . . . ,k είναι όλα ≈ 0, μιά και ανήκουν στον $\mathbf{W}$. Θεωρούμε λοιπόν, τις τάξεις C_i, i = k+1, . . . ,n. Οι τάξεις αυτές, είναι κατ' αρχήν όλες διαφορετικές. Πράγματι, αν δύο απ' αυτές ταυτίζονταν, θα είχαμε π.χ. $b_\kappa \approx b_\lambda$, $k+1 \le \kappa < \lambda \le n$, δηλαδή, $b_\kappa = b_\lambda + w$, $w \in \mathbf{W}$, πράγμα αδύνατον. Εχουμε λοιπόν n–k τέτοιες τάξεις. Φανερά, παράγουν τον χώρο $\mathbf{V}/\mathbf{W}$. Θα δείξουμε και ότι αποτελούν σύνολο γραμμικά ανεξάρτητο. Τούτο έπεται από το ότι, μιά σχέση της μορφής $\lambda_{k+1}C_{k+1} + \lambda_{k+2}C_{k+2} + \dots + \lambda_n C_n = 0$ ή $C_{\lambda_{k+1}b_{k+1} + \lambda_{k+2}b_{k+2} + \dots + \lambda_n b_n} = C_0$ από την οποία έχουμε την $\lambda_{k+1}b_{k+1} + \lambda_{k+2}b_{k+2} + \dots + \lambda_n b_n \in \mathbf{W}$, σχέση που ισχύει μόνον ανν όλοι οι συντελεστές λ είναι ίσοι με μηδέν.

Δείξαμε λοιπόν, ότι $\dim \mathbf{V}/\mathbf{W} = \dim\mathbf{V} - \dim\mathbf{W}$.

Ασκήσεις. 1) Να προσδιορίσετε μία βάση του $\mathbb{R}^4$, η οποία να περιέχει το (1,–1,1,2).

2) Να προσδιορίσετε μία βάση για τον χώρο L{(1,2,0), (–1,1,0), (1,1,0)}

3) Ελέγξετε αν οι χώροι **V** = L{(1,–1,2,0), (2,1,1,1), (3,–1,2,–1)} και **W** = L{(3,0,3,1), (1,2,–1,1), (4,–1,5,1)} ταυτίζονται.

4) Ελέγξετε αν (6,10,16,4)∈L{(1,2,3,1), (2,–1,1,–3), (1,3,4,2)}.

5) Για ποιές τιμές του k, το σύνολο: {(1,2,k), (0,1,k–1), (3,4,3) είναι σύνολο γραμμικά εξαρτημένο ;

6) Για ποιές τιμές του k, τα διανύσματα (k,1–k,k), (2k,2k–1,k+2), και (–2k,k,–k), αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$;

7) Να επεκτείνετε το σύνολο των διανυσμάτων

{(1,1,–1,1), (1,0,1,1), (3,–2,5,7)} σε μία βάση του $\mathbb{R}^4$.

8) Δύο υποσύνολα ενός γραμμικού χώρου **V** καλούνται ισοδύναμα, ανν παράγουν τον ίδιο υπόχωρο του **V**. Να δείξετε ότι, η έκφραση “ισοδύναμο σύνολο διανυσμάτων” ορίζει μιά σχέση ισοδυναμίας επί του **V**.

9) Στο παρ. 5, σελ. 7, αναφερθήκαμε στον χώρο P_n των πολυωνύμων μέχρι και n βαθμού. Μία βάση γιά τον χώρο αυτό, αποτελούν τα πολυώνυμα $x^0, x^1, \ \dots \ , x^n$ μιά και το τυχόν p(x)∈ P_n έχει την γνωστή έκφραση $\alpha_0 + \alpha_1 x^1 + \ \dots \ + \alpha_n x^n$. Εξ’ άλλου είναι p(x) = 0 ∀x∈ $\mathbb{R}$ ανν α_i = 0, i = 1, 2, . . . ,n. Είναι λοιπόν, dim P_n = n+1. Να δείξετε ότι

το σύνολο H = {p(x)∈ P_n | $\int_0^1 p(x)dx = 0$ } ⊂ P_{n+1} είναι υπόχωρος.

10) Εστω $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Ποιό από τα παρακάτω σύνολα είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$; α) Το σύνολο των X∈ $\mathbb{R}^3$ για τα οποία είναι $x_1 = x_2 = x_3$. β) Το σύνολο των X∈ $\mathbb{R}^3$ για τα οποία είναι $x_1 = 0$. γ) Το σύνολο των X∈ $\mathbb{R}^3$ για τα οποία είναι $x_1 = x_2 – x_3$. δ) Το σύνολο των X∈ $\mathbb{R}^3$ για τα οποία είναι $x_1 = 1$.

11) Εστω ότι, **V** = **S**⊕**T**. Θεωρούμε τον χώρο πηλίκο **V**/**S**. Να δείξετε ότι, C_x = **S** +**T**, όπου x = s+t, s∈**S**, t∈**T**.

12) Αν $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2$ και $\mathbf{W} = \mathbf{W}_1 \oplus \mathbf{W}_2$, τότε είναι και

$\mathbf{V}\times\mathbf{W} = \mathbf{V}_1 \times \mathbf{W}_1 \oplus \mathbf{V}_2 \times \mathbf{W}_2$.

13) Να δείξετε ότι αν $\mathbf{W} = \mathbf{W}_1 \oplus \mathbf{W}_2$ και $\mathbf{W}_1 \subseteq \mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}$, τότε και $\mathbf{W} = (\mathbf{W} \cap \mathbf{W}_1) \oplus (\mathbf{W} \cap \mathbf{W}_2)$.

14) Εστω **V** = $\mathbb{R}^3$ και $\mathbf{W}_1$ = {(ξ,0,0) | ξ∈ $\mathbb{R}$ }, $\mathbf{W}_2$ = {(0,ξ,0) | ξ∈ $\mathbb{R}$ }, $\mathbf{W}_3$ = {(ξ,ξ,η) | ξ, η∈ $\mathbb{R}$ }. Να δείξετε ότι τα σύνολα $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3$ είναι υπόχωροι του **V**, ότι

α) $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 = \mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_3 = \mathbf{W}_2 \cap \mathbf{W}_3 = \{0\}$ β) $\mathbf{V} = \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 + \mathbf{W}_3$

γ) Το προηγούμενο άθροισμα δεν είναι ευθύ.