Γ Ε Ω Μ Ε Τ Ρ Ι Κ Ε Σ   Ε Φ Α Ρ Μ Ο Γ Ε Σ

1. Ομοπαράλληλοι ή Συσχετισμένοι χώροι. Θεωρούμε ένα σύνολο $\mathcal{E}$, τα στοιχεία του οποίου θα καλούμε ***σημεία*** και θα τα συμβολίζουμε με κεφαλαία γράμματα. Θεωρούμε και ένα γραμμικό χώρο **V**(F). Σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος σημείων Α, Β του $\mathcal{E}$, αντιστοιχούμε ένα διάνυσμα φ(Α,Β) = $\vec{x} \in$ **V**. Γράφουμε και $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$.

Ορισμός. Η δομή $\mathcal{E}$ = ($\mathcal{E}$, φ) καλείται ***ομοπαράλληλος*** χώρος (Affine space) ανν:

1) Για κάθε $A \in \mathcal{E}$ και $\vec{x} \in$ **V**, υπάρχει ένα και μόνο $B \in \mathcal{E}$, τέτοιο ώστε, $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$.

2) Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{y}$, τότε και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{x} + \vec{y}$ (σχέση του Chasles $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma A} = 0$).

Η εκλογή ενός τυχόντος σημείου $O \in \mathcal{E}$ και μιάς τυχούσης βάσεως $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ \dots \ , \vec{e}_n\} \subset$ **V** εφοδιάζει τον $\mathcal{E}$ με ένα ***σύστημα αναφοράς***. Όταν έχουμε σύστημα αναφοράς, ταυτίζουμε το τυχόν σημείο $R \in \mathcal{E}$ του χώρου με την ***διανυσματική ακτίνα*** ή ***διάνυσμα θέσεως*** $\overrightarrow{OR}$. Είναι, $\overrightarrow{OR} = \vec{r} = \xi_1\vec{e}_1 + \xi_2\vec{e}_2 + \ \dots \ + \xi_n\vec{e}_n$.

Οι συντελεστές ξ, καλούνται ***συντεταγμένες*** του R, και εξαρτώνται από το επιλεγμένο σύστημα αναφοράς. Για δοσμένο σύστημα αναφοράς, οι συντεταγμένες του R είναι βέβαια μοναδικές (βλέπε “Γραμμικοί Χώροι”, Πρόταση 1, σελ. 11).

Η προηγούμενη διαδικασία, της εκλογής, δηλαδή, τυχόντος σημείου $O \in \mathcal{E}$ και της ταυτήσεως του $R \in \mathcal{E}$ με το διάνυσμα θέσεως $\vec{r} = \overrightarrow{OR}$ του **V**, εγκαθιστά μία ένα-ένα αντιστοιχία ανάμεσα στο $\mathcal{E}$ και στο **V**. Μέσω αυτής της αντιστοιχίας, ταυτίζουμε τα σημεία του $\mathcal{E}$ με τα διανύσματα του **V**.

Συμβολισμός. Τα διανύσματα θα τα συμβολίζουμε είτε με βελάκια από πάνω, είτε με μικρά λατινικά στοιχεία. Τα σημεία του $\mathcal{E}$, πάντοτε με κεφαλαία γράμματα.

Ο συσχετισμένος χώρος $\mathcal{E}$, έχει και τις ιδιότητες:

3) Το μηδενικό διάνυσμα, είναι η εικόνα ζεύγους ταυτόσημων σημείων. Τούτο προκύπτει από την 2).

4) Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$, τότε και $\overrightarrow{BA} = -\vec{x}$.

5) Αν $\overrightarrow{OR} = \xi_1\vec{e}_1 + \xi_2\vec{e}_2 + \ \dots \ + \xi_n\vec{e}_n$ και $\overrightarrow{OS} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \ \dots \ + \lambda_n\vec{e}_n$, τότε και $\overrightarrow{RS} = (\lambda_1 - \xi_1)\vec{e}_1 + (\lambda_2 - \xi_2)\vec{e}_2 + \ \dots \ + (\lambda_n - \xi_n)\vec{e}_n$.

Ας λάβουμε ένα νέο σύστημα αναφοράς, που αποτελείται από μιά νέα αρχή O_1 και την ίδια βάση. Θα δούμε τον τρόπο μεταβολής των συντεταγμένων των σημείων και των διανυσμάτων.

6) α) **Για τα σημεία**. Στο σημείο R, αντιστοιχούν τα διανύσματα θέσεως $\overrightarrow{OR} = \xi_1\vec{e}_1 + \xi_2\vec{e}_2 + \ \dots \ + \xi_n\vec{e}_n$ και $\overrightarrow{O_1R} = \xi'_1\vec{e}_1 + \xi'_2\vec{e}_2 + \ \dots \ + \xi'_n\vec{e}_n$. Είναι όμως $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1R}$. Αν λοιπόν, $\overrightarrow{OO_1} = p_1\vec{e}_1 + p_2\vec{e}_2 + \ \dots \ + p_n\vec{e}_n$, τότε από την προηγούμενη ισότητα, προκύπτει το σύστημα $\xi_i = \xi'_i + p_i$, i = 1, . . . ,n, που δίδει τον τρόπο μεταβολής των συντεταγμένων των σημείων.

β) **Για τα διανύσματα**.

Είναι $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OR} = (\overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1S}) - (\overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1R}) = \overrightarrow{O_1S} - \overrightarrow{O_1R} = \overrightarrow{R_1S_1}$, δηλαδή, $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{R_1S_1}$.

Άρα οι συντεταγμένες του $\overrightarrow{RS}$ δεν μεταβάλλονται..7) Κρατάμε τώρα, σταθερό το σημείο O, και θεωρούμε δύο συστήματα αναφοράς, με διαφορετικές βάσεις $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2, \ \dots \ ,\vec{e}_n\}$ και $\{\vec{e}\,'_1,\vec{e}\,'_2, \ \dots \ ,\vec{e}\,'_n\}$.

α) Στο τυχόν σημείο R, αντιστοιχεί το διάνυσμα θέσεως $\overrightarrow{OR}$, που έχει τις δύο διαφορετικές εκφράσεις, $\overrightarrow{OR} = \xi_1\vec{e}_1 + \xi_2\vec{e}_2 + \ \dots \ + \xi_n\vec{e}_n$ και $\overrightarrow{OR} = \xi'_1\vec{e}_1 + \xi'_2\vec{e}_2 + \ \dots \ + \xi'_n\vec{e}_n$. Κάθε όμως e΄, εκφράζεται γραμμικά από τα e. Έχουμε, δηλαδή, και τις n ισότητες

$$\vec{e}\,'_i = p_{i1}\vec{e}_1 + p_{i2}\vec{e}_2 + \ \dots \ + p_{in}\vec{e}_n, \ i = 1, \dots, n$$

Άρα και

$$\overrightarrow{OR} = \left(\xi'_1\sum_{j=1}^{n} p_{1j}\vec{e}_j\right) + \ \dots \ + \xi'_n\left(\xi'_n\sum_{j=1}^{n} p_{nj}\vec{e}_j\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} p_{i1}\xi'_i\right)\vec{e}_1 + \dots + \left(\sum_{i=1}^{n} p_{in}\xi'_i\right)\vec{e}_n$$

Έχουμε, λοιπόν, τις ισότητες,

$$\xi_\kappa = \sum_{i=1}^{n} p_{i\kappa}\xi'_i \quad \text{για} \quad \kappa = 1, \dots, n.$$

Ανάλογα προκύπτουν βέβαια και οι ισότητες,

$$\xi'_\lambda = \sum_{j=1}^{n} q_{\lambda j}\xi_j \quad \text{για} \quad \lambda = 1, \dots, n$$

Από τις ισότητες αυτές, προκύπτει ακόμα και ότι,

$$\xi_\kappa = \sum_{i=1}^{n} p_{i\kappa}\xi'_i = \sum_{i=1}^{n} p_{i\kappa}\left(\sum_{j=1}^{n} q_{ij}\xi_j\right) =$$

$$= p_{1\kappa}(q_{11}\xi_1 + \ \dots \ + q_{1n}\xi_n) + \ \dots \ + p_{n\kappa}(q_{11}\xi_1 + \ \dots \ + q_{nn}\xi_n)$$

$$= (p_{1\kappa}q_{11} + \ \dots \ + p_{n\kappa}q_{1n})\xi_1 + \ \dots \ + (p_{n\kappa}q_{n1} + \ \dots \ + p_{n\kappa}q_{nn})\xi_n$$

ή
$$\xi_\kappa = \left(\sum_{j=1}^{n} p_{1j}q_{j1}\right)\xi_1 + \dots + \left(\sum_{j=1}^{n} p_{nj}q_{jn}\right)\xi_n \quad \text{για κάθε } \kappa = 1, \dots, n$$

Για να ισχύει η ισότητα αυτή, για οιαδήποτε εκλογή των ξ, θα πρέπει να διασώζεται μόνον ο συντελεστής του ξ_κ, ο οποίος μάλιστα, θα πρέπει να έχει και την τιμή 1. Την συνθήκη αυτή, την γράφουμε ως εξής:

$$\sum_{j=1}^{n} p_{\kappa j}q_{j\kappa} = \delta_{\kappa j}. \text{ όπου, για } j \neq \kappa, \ \delta_{\kappa j} = 0, \text{ ενώ για } j = \kappa, \ \delta_{\kappa j} = 1$$

Είναι, λοιπόν, $Q^t = P^{-1}$, όπου, $P = (p_{ij})$, $Q = (q_{\kappa\lambda})$

β) Για τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{RS}$, δεν έχουμε να πούμε κάτι το ιδιαίτερο, μιά και το $\overrightarrow{RS} = \eta_1\vec{e}_1 + \eta_2\vec{e}_2 + \ \dots \ + \eta_n\vec{e}_n = \eta'_1\vec{e}\,'_1 + \eta'_2\vec{e}\,'_2 + \ \dots \ + \eta'_n\vec{e}\,'_n$. (Περίπτωση α).)

8) Ας επιχειρήσουμε, τώρα, να μεταβάλουμε και την αρχή O και την βάση $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2, \ \dots \ ,\vec{e}_n\}$ του χώρου.

Ας υποθέσουμε ότι, οι συντεταγμένες του O΄ στην αρχική βάση είναι $(\alpha_1,\alpha_2, \ \dots \ ,\alpha_n)$ και επίσης ότι $\vec{e}\,'_i = p_{i1}\vec{e}_1 + p_{i2}\vec{e}_2 + \ \dots \ + p_{in}\vec{e}_n$, i = 1, . . .,n. O συνδυασμός των προηγουμένων σχέσεων, δίδει τις ισότητες,

$$\xi_\kappa = \sum_{i=1}^{n} p_{i\kappa}\xi'_i + \alpha_\kappa \quad \text{για} \quad \kappa = 1, \dots, n.$$

Έχουμε επίσης και τις

$$\xi'_\lambda = \sum_{j=1}^{n} q_{\lambda j}\xi_j + \alpha'_\lambda \quad \text{για} \quad \lambda = 1, \dots, n$$

Ερχόμαστε τώρα, να ορίσουμε τις ευθείες και τα επίπεδα του χώρου $\mathcal{E}$.

9) Η διάσταση dim$\mathcal{E}$ του χώρου $\mathcal{E}$, είναι εξ' ορισμού, η διάσταση του γραμμικού χώρου **V**. Η διάσταση n αυτή, συμπίπτει με την διάσταση του γραμμικού χώρου που παράγεται από n ανυσματικές ακτίνες του $\mathcal{E}$, όταν αυτές, αποτελούν σύνολο γραμμικά ανεξάρτητο.

Θεωρούμε, τώρα, δύο συστήματα αναφοράς μέσα στον $\mathcal{E}$. Τα (O, $\bar{e}$) και (O΄, $\bar{e}'$). Έστω P ο πίνακας του μετασχηματισμού της βάσης $\bar{e}$ στην βάση $\bar{e}'$, και |P| η ορίζουσα του πίνακα αυτού. Όλοι οι δυνατοί τέτοιοι μετασχηματισμοί των βάσεων του χώρου, έχουν ορίζουσα, η οποία θα είναι είτε θετική είτε αρνητική. Το σύνολο των μετασχηματισμών αυτών, μερίζεται συνεπώς σε δύο τάξεις ισοδυναμίας: Των μετασχηματισμών με ορίζουσα θετική, και αυτών με ορίζουσα αρνητική. Θα λέμε ότι, στον χώρο μας έχουμε ***δεξιό προσανατολισμό***, ανν η βάση $\bar{b}$ του χώρου μας είναι ισοδύναμη, με την παραπάνω έννοια, προς την κανονική βάση. Στην περίπτωση αυτή, επειδή $\Delta(\vec{e}_1,\vec{e}_2, \dots ,\vec{e}_n)=1$ και η ορίζουσα του μετασχηματισμού $\mathbf{P:}\bar{e}\to\bar{b}$ είναι η $\Delta(\vec{b}_1,\vec{b}_2, \dots ,b_n)$, αναγκαστικά, το πρόσημο της Δ θα είναι "+". Στην περίπτωση, που έχουμε βάση $\bar{a}$ στο χώρο μας με πρόσημο της $\Delta(\vec{a}_1,\vec{a}_2, \dots ,\vec{a}_n)$ αρνητικό, θα λέμε ότι, έχουμε ***αριστερό προσανατολισμό***.

Ορισμός. Το σύνολο των σημείων M του ομοπαράλληλου χώρου A, που πληρούν την σχέση $\overrightarrow{AM}\in L_\rho$ όπου A δοσμένο σημείο του $\mathcal{E}$ και L_ρ γραμμικός υπόχωρος του **V** διαστάσεως ρ καλείται ρ-διαστάσεως επίπεδο διερχόμενο από το σημείο A και κατά την διεύθυνση του L_ρ. Ο υπόχωρος L_ρ καλείται και ***οδηγός υπόχωρος*** του επιπέδου. Στην περίπτωση ρ = 1, το επίπεδο καλείται ***ευθεία***. Στην περίπτωση, όπου η διάσταση ρ = n–1, με n = dim**V**, το επίπεδο καλείται ***υπερεπίπεδο***. Στην περίπτωση n = 3, το υπερεπίπεδο καλείται απλά ***επίπεδο***.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1. ρ+1 σημεία του $\mathcal{E}$ ορίζουν ένα επίπεδο P_ρ, ανν τα ρ οιαδήποτε ανύσματα που προκύπτουν απ' αυτά, είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3. Τα επίπεδα του $\mathcal{E}$, είναι και αυτά ομοπαράλληλοι υπόχωροι.
Απόδειξη. Έστω P_ρ το επίπεδο που διέρχεται από το A στην διεύθυνση του L_ρ. Θεωρούμε τα σημεία M και N του P_ρ. Αυτά, σαν σημεία του $\mathcal{E}$, έχουν εικόνα, το $\overrightarrow{MN}$. Τα $\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{AN}$ ανήκουν εξ ορισμού στον L_ρ. Άρα και το $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}$ ανήκει στον L_ρ. Το σημείο O του $\mathcal{E}$, θα ανήκει στον L_ρ, μιά και στην αρχή του χώρου, αντιστοιχεί το μηδενικό διάνυσμα, το οποίο βέβαια είναι στοιχείο του υποχώρου L_ρ.

ΠΆΡΑΤΗΡΗΣΗ 2. Κάθε υπόχωρος L_ρ είναι δυνατόν να θεωρηθεί και σαν επίπεδο, που διέρχεται από την αρχή του συστήματος αναφοράς.

Σε ότι ακολουθεί, θα δεχόμεθα ότι ο χώρος μας $\mathcal{E}$ έχει dim = n και ένα σύστημα αναφοράς που αποτελείται από το σημείο O και την βάση $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2, \dots ,\vec{e}_n\}$.

ΠΆΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. i) Περίπτωση ρ = 1. Μία ευθεία του $\mathcal{E}$, που διέρχεται από το σημείο A, αποτελείται από εκείνα τα σημεία R του $\mathcal{E}$, στα οποία αντιστοιχεί το $\overrightarrow{AR}\in L_1$. Επειδή ρ = 1, έστω $\vec{u}$ μία βάση του L_1. Το {A, $\vec{u}$} αποτελεί σύστημα αναφοράς του χώρου P_1. Τα διανύσματα του L_1 έχουν την έκφραση $\overrightarrow{AR}=\lambda\vec{u}$.

Είναι $\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OA}$. Άρα και $\vec r=\vec a+\lambda\vec u$, σχέση, που όπως θα δούμε στην §7, προσδιορίζει την ευθεία του χώρου, που διέρχεται από το σημείο Α και είναι παράλληλη προς το ευθύγραμμο τμήμα, που αντιστοιχεί στο. $\vec u$. Η σχέση αυτή, είναι ισοδύναμος προς το μονοπαραμετρικό σύστημα

$$x_i=\alpha_i+\lambda\xi_i,\quad i=1,\dots,n,$$

όπου $\vec r=(x_1,x_2,\ \dots\ ,x_n)$, $A=(\alpha_1,\alpha_2,\ \dots\ ,\alpha_n)$ και $\vec u=(\xi_1,\xi_2,\ \dots\ ,\xi_n)$ όπου όλες οι συντεταγμένες είναι εκφρασμένες στην βάση $\{\vec e_1,\vec e_2,\ \dots\ ,\vec e_n\}$.

Τα σημεία Χ της ευθείας, που λαβαίνονται για λ > 0, αποτελούν τον ***θετικό ημιάξονα*** ΑΧ αυτής. Ανάλογα έχουμε τον ***αρνητικό ημιάξονα*** της ευθείας. Οι διατάξεις των μονόμετρων μεγεθών λ, μεταφέρεται στα σημεία της ευθείας, και καθορίζουν την ***φορά*** της.

ii) Ας εξετάσουμε, τώρα, την γενική περίπτωση, dimA = n, $\dim L_\rho$ = ρ. Θεωρούμε το επίπεδο P_ρ, που διέρχεται από το σημείο Α και έχει οδηγό τον L_ρ. Είναι τότε,

$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AR}.\qquad \text{Άρα και,}\qquad \vec r=\vec a+\sum_{j=1}^{r}\lambda_j\vec q_j\,,\qquad (1),$$

όπου $\vec r$, $\vec a$ οι διανυσματικές ακτίνες των σημείων R και A, και $\{\vec q_1,\vec q_2,\ \dots\ ,\vec q_\rho\}$ μιά βάση του L_ρ.

Έστω, τώρα, και μιά βάση $\{\vec e_1,\vec e_2,\ \dots\ ,\vec e_n\}$ του χώρου **V**. Εκφράζουμε σ' αυτήν την βάση τις διανυσματικές μας ακτίνες και τα $\vec q_j$. Είναι,

$$\vec r=\overrightarrow{OM}=x_1\vec e_1+x_2\vec e_2+\ \dots\ +x_n\vec e_n,\qquad \vec a=\overrightarrow{OA}=\alpha_1\vec e_1+\alpha_2\vec e_2+\ \dots\ +\alpha_n\vec e_n\qquad \text{και}$$

$$\vec q_j=\xi_{j1}\vec e_1+\xi_{j2}\vec e_2+\ \dots\ +\xi_{jn}\vec e_n.$$

Αντικαθιστούμε στην (1), και λαβαίνουμε το ισοδύναμο σύστημα,

$$x_i=\alpha_i+\sum_{j=1}^{r}\lambda_j\xi_{ji}\,.\qquad (1')$$

Το σύστημα αυτό, έχει r παραμέτρους λ. Σε περίπτωση που έχουμε υπερεπίπεδο, οπότε ρ = n–1, μπορούμε πάντα από τις n εξισώσεις να κάνουμε απαλοιφή των n–1 παραμέτρων, και να λάβουμε μιά εξίσωση της μορφής

$$A_1x_1+A_2x_2+\ \dots\ +A_nx_n+B=0.\qquad (2)$$

Το σύστημα (1΄) καλείται ***παραμετρικό σύστημα*** του επιπέδου. Η εξίσωση (2) καλείται ***Καρτεσιανή μορφή*** του υπερεπιπέδου.

Ένα υπερεπίπεδο διαιρεί τον χώρο σε δύο τμήματα: Ένα τμήμα που βρίσκεται στην ***δεξιά πλευρά*** του, και ένα τμήμα, που βρίσκεται στην ***αριστερή πλευρά*** του. Το δεξιό τμήμα περιλαμβάνει εκείνα τα σημεία Χ του χώρου τα οποία, μαζί με το σημείο Α του P_{n-1}, προσδιορίζουν το διάνυσμα $\overrightarrow{AX}$, το οποίο, μαζί με την βάση του L_{n-1} και το σημείο Α, δίδουν ένα σύστημα αναφοράς του χώρου, που τον προσανατολίζει θετικά. Ανάλογα για τον ορισμό της αριστερής πλευράς.

Για την περίπτωση, που είναι **V** = $\mathbb{R}^n$, τον $\mathcal{E}$ τον ταυτίζουμε με τον χώρο Ε (βλέπε σελ. 12). Το σύστημα αναφοράς του $\mathcal{E}$, συνήθως αποτελείται από το σημείο Ο και την κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Όταν n = 3, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό: $\vec i=(1,0,0)$, $\vec j=(0,1,0)$ και $\vec k=(0,0,1)$. Το τυχόν σημείο R∈$\mathcal{E}$, έχει τότε την έκφραση, $\vec r=x\vec i+y\vec j+z\vec k$ = (x,y,z).

Το σύστημα (1), στην περίπτωση αυτή, έχει την μορφή,

$$\begin{aligned}x&=\alpha_1+\lambda_1\xi_{11}+\lambda_2\xi_{21}=\alpha_1+\lambda_1(\beta_1-\alpha_1)+\lambda_2(\gamma_1-\alpha_1)\\ y&=\alpha_2+\lambda_1\xi_{12}+\lambda_2\xi_{22}=\alpha_2+\lambda_1(\beta_2-\alpha_2)+\lambda_2(\gamma_2-\alpha_2)\\ z&=\alpha_3+\lambda_1\xi_{13}+\lambda_2\xi_{23}=\alpha_3+\lambda_1(\beta_3-\alpha_3)+\lambda_2(\gamma_3-\alpha_3)\end{aligned}$$

όπου $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, $\Gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$, τρία σημεία του $\mathcal{E}$, που ορίζουν και την θέση του επιπέδου, και $(\xi_{11},\xi_{12},\xi_{13})=\overrightarrow{AB}$, $(\xi_{21},\xi_{22},\xi_{23})=\overrightarrow{A\Gamma}$ (όλες οι συντεταγμένες είναι εκφρασμένες στη βάση $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$. Η ***διανυσματική εξίσωση*** του επιπέδου, που διέρχεται από τα σημεία Α, Β, Γ του χώρου $\mathcal{E}$, είναι η $\overrightarrow{AR}=\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{A\Gamma}$ ή ισοδύναμα, η $\vec{r}=\vec{a}+\lambda_1\vec{b}+\lambda_2\vec{c}$ όπου $\vec{r}=\overrightarrow{OR}=(x,y,z)$ το τυχόν σημείο του επιπέδου και $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, οι ανυσματικές ακτίνες των σημείων Α, Β και Γ αντίστοιχα. Η Καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου, είναι η Αx+Βy+Γz+Δ = 0. Για την εξίσωση της ευθείας στον χώρο Ε, βλέπε σελ. 13.

2. Σχετικές θέσεις επιπέδων εν $\mathcal{E}$. Έστω dim$\mathcal{E}$ = n. Μέσα στον $\mathcal{E}$ θεωρούμε τα δύο επίπεδα P_κ και P_λ για τα οποία, υποθέτουμε ότι έχουν ένα κοινό σημείο Α. Επιλέγουμε το σημείο αυτό, ως αρχή του συστήματος συντεταγμένων του χώρου μας. Τώρα, όταν το τυχόν σημείο R του $\mathcal{E}$ διατρέχει το επίπεδο P_κ (αντ. P_λ), η διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{AR}$ διατρέχει τον υπόχωρο P_κ (αντ. P_λ). Συνεπώς, το θέμα των σχετικών θέσεων των επιπέδων P_κ, P_λ, ανάγεται στην μελέτη των “σχετικών θέσεων” των υποχώρων L_κ, L_λ μέσα στον **V**.
(Βλέπε ενότητα ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ).

1) Αν τα δύο επίπεδα P_κ και P_λ έχουν ένα κοινό σημείο, τότε η τομή τους είναι και αυτή επίπεδο, με διάσταση $0<\mu\le \min(\kappa,\lambda)$.

2) Η τομή συνεπώς δύο επιπέδων του χώρου $\mathcal{E}$ (με dim$\mathcal{E}$ = 3) είναι δυνατόν να είναι είτε επίπεδο είτε ευθεία του $\mathcal{E}$. Η σχέση $\dim(L_\kappa+L_\lambda) = \dim L_\kappa+\dim L_\lambda-\dim(L_\kappa\cap L_\lambda)$ μας επιτρέπει να υπολογίζουμε την διάσταση αυτής της τομής. Έτσι για την περίπτωση αυτή, είναι φανερά, $L_2+L_2 = \mathcal{E}$. Η $\dim(L_2\cap L_2)$ είναι συνεπώς είτε 0 είτε 1 είτε 2. Η δυνατότητα μ = 0 έχει αποκλεισθεί από την αρχή. Απομένουν λοιπόν οι δυνατότητες να είναι μ = 1 είτε μ = 2. Αν μ = 1, τότε έχουμε ότι, τα επίπεδα τέμνονται κατά μία ευθεία. Αν μ = 2, τότε τα επίπεδα τέμνονται κατά ένα επίπεδο. Το επίπεδο όμως αυτό, δεν είναι δυνατόν να είναι διαφορετικό και από τα δύο ήδη θεωρηθέντα επίπεδα, μιά και τότε θα μπορούσαμε να βρούμε το ολιγότερο τέσσερα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα μέσα στον $\mathcal{E}$, πράγμα αδύνατον.

3) Αν τα δύο επίπεδα P_κ και P_λ έχουν τομή το P_μ, υπάρχει τότε ένα μοναδικό επίπεδο P, με διάσταση ρ = κ+λ–μ, το οποίο περιέχει αμφότερα τα επίπεδα P_κ και P_λ. Το επίπεδο αυτό, έχει ως οδηγό χώρο τον $L_\rho = L_\kappa+L_\lambda$. Στην ειδική περίπτωση, που ρ = n, το P ταυτίζεται με τον $\mathcal{E}$.

4) Αν τα δύο επίπεδα P_κ και P_λ δεν έχουν ένα κοινό σημείο, τότε η τομή τους ταυτίζεται με τον μηδενικό υπόχωρο. Είναι τότε, $L_\rho = L_\kappa\oplus L_\lambda$. Στην περίπτωση αυτή, λέμε ότι, τα επίπεδα κείνται μέσα στον χώρο είτε σε παράλληλη θέση, είτε σε στρεβλή θέση. ***Παράλληλη θέση*** έχουν τα επίπεδα, ανν οι οδηγοί υπόχωροί τους συγκρίνονται ως προς την διάταξη “$\subseteq$”.

5) Στην περίπτωση του Ε, δύο επίπεδα είναι δυνατόν είτε να ταυτίζονται, είτε να είναι παράλληλα. Δύο ευθείες όμως, είναι δυνατόν να βρίσκονται σε στρεβλή θέση.

3. Εσωτερικό γινόμενο στο επίπεδο και τον χώρο. Μέσα στον $\mathbb{R}^3$ θεωρούμε το ***Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς*** Οxyz, που αποτελείται από το σημείο Ο (αρχή του χώρου), και την βάση $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$, όπου, όπως είδαμε, είναι

$$\vec{e}_1 = \vec{i} = (1,0,0),\ \vec{e}_2 = \vec{j} = (0,1,0) \text{ και } \vec{e}_3 = \vec{k} = (0,0,1).$$

Αν Α και Β δύο τυχόντα σημεία του Ε, με

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a}=\alpha_1\vec{i}+\alpha_2\vec{j}+\alpha_3\vec{k} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{OB}=\vec{b}=\beta_1\vec{i}+\beta_2\vec{j}+\beta_3\vec{k},$$

ορίζουμε την απεικόνιση φ: $\mathcal{E}\times\mathcal{E}\to\mathbb{R}$, από την σχέση,

$$(\vec{a},\vec{b}) \mapsto \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3. \text{ Είναι τότε, } \varphi(\vec{e}_i,\vec{e}_j) = \delta_{ij},\ i,j = 1,2,3\ .$$

Συμβολισμός. Αντί του $\varphi(\vec{a}, \vec{b})$, γράφουν $\vec{a} \cdot \vec{b}$, (dot product) ή ακόμα και $< \vec{a}, \vec{b} >$.

Για το διάνυσμα $\vec{x} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$ έχουμε, $\varphi(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) = \sum_{i=1}^{3} (\beta_i - \alpha_i)^2$. Για κάθε $\vec{x} \in \mathcal{E}$, έχουμε λοιπόν ότι, $\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Ορίζουμε το ***μέτρο*** ή την ***απόλυτο τιμή*** του σημείου $\vec{x}$, από την σχέση $|\vec{x}| = +\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$. Η απεικόνιση

$Q(\overrightarrow{AB}) = +\sqrt{\varphi(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB})}$ είναι μία ***τετραγωνική μορφή***. Είναι συμμετρική, [δηλαδή $Q(\overrightarrow{AB}) = Q(\overrightarrow{BA})$], θετικά ορισμένη, [δηλαδή $Q(\overrightarrow{AB}) \geq 0$ με $Q(\overrightarrow{AB}) = 0$ ανν Α = Β], και συνεπώς, μπορούμε να την χρησιμοποιήσουμε, για να ορίσουμε την ***απόσταση*** d(A,B) των σημείων Α και Β. Ισχύει επιπλέον η ***τριγωνική ανισότης***, d(A,B)+d(B,Γ) > d(A,Γ) όταν το Γ δεν κείται επί της ευθείας που ορίζουν τα σημεία Α και Β. [**Απόδειξη**. Αποδεικνύουμε πρώτα, την ***ανισότητα του Cauchy***:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2\right).$$

Χρησιμοποιούμε προς τούτο, την ταυτότητα του Lagrange:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i\right)^2 = \sum_{i<j} (\alpha_i \beta_j - \alpha_j \beta_i)^2.$$

Για να αποδείξουμε την ισότητα αυτή σκεπτόμεθα ως εξής:

Το γινόμενο $\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2\right)$ παρέχει n×n όρους της μορφής $\alpha_i^2 \beta_j^2$. Οι όροι όμως της μορφής $\alpha_i^2 \beta_i^2$ μηδενίζονται από τους αντίστοιχους όρους του αναπτύγματος του $\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i\right)^2$.

Ότι απομένει συνεπώς, είναι η ταυτότητα του Lagrange.

Π.χ. για n = 2, είναι,

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2) - (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)^2 = \alpha_1^2\beta_2^2 + \alpha_2^2\beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2 = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2$$

Άμεση συνέπεια της ταυτότητας του Lagrange είναι η ανισότητα του Caushy. Συνέπεια αυτής, είναι η τριγωνική ανισότητα. Πράγματι, είναι,

$$\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \gamma_i)^2}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \gamma_i)^2 +$$

$$2\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i)^2}\right)\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \gamma_i)^2}\right) > \text{(λόγω Cauchy)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \gamma_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i)\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \gamma_i) = \sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \gamma_i)^2.$$

Εχουμε λοιπόν ότι, $Q(\overrightarrow{AB})$+$Q(\overrightarrow{A\Gamma}) > Q(\overrightarrow{B\Gamma})$, που είναι η τριγωνική ανισότητα].

Η ανισότητα του Cauchy είναι δυνατόν να προκύψει και ως εξής:

Θεωρούμε την $f(x) = (\vec{a}x + \vec{b})^2$. Είναι, φανερά, $f(x) \geq 0$. Άρα, και

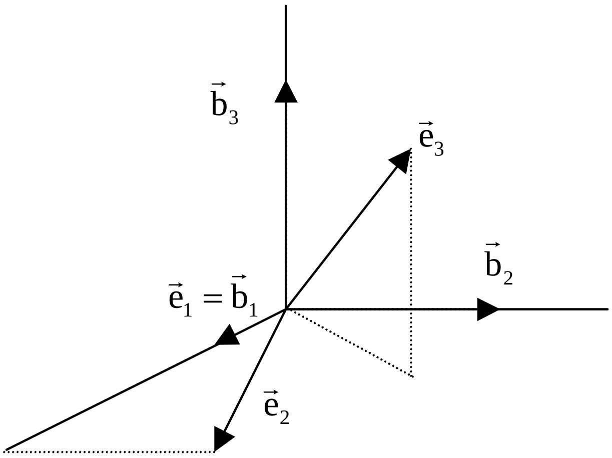
$(\vec{a}\cdot\vec{a})x^2 + 2(\vec{a}\cdot\vec{b})x + (\vec{b}\cdot\vec{b}) \geq 0$. Η διακρίνουσα συνεπώς του $f(x)$ είναι ≤ 0. Είναι, λοιπόν, $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 - (\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b}) \leq 0$, που είναι και η ανισότητα του Cauchy. Παρατηρούμε ότι, στην περίπτωση που $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = (\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b})$, είναι και Q($\overrightarrow{AB}$)+Q($\overrightarrow{A\Gamma}$) = Q($\overrightarrow{B\Gamma}$), δηλαδή, τα σημεία Α, Β, Γ, κείνται επ' ευθείας γραμμής.

Ο $\mathcal{E}$ μαζί με την d καλείται ***Ευκλείδειος χώρος*** E. Μέσα σε έναν Ευκλείδειο χώρο, ορίζεται το συνημίτονο της *γωνίας* θ δύο διανυσμάτων a, b από την ισότητα,

$$\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}\sqrt{\vec{b}\cdot\vec{b}}}.$$

Παρατηρούμε ότι, το κλάσμα είναι πάντοτε < 1, και = 1 ανν $\vec{b} = \lambda\vec{a}$. Το cos($\vec{a}$, $\vec{b}$) είναι συνεπώς καλά ορισμένο. Αποδεικνύεται, ότι, το έτσι ορισμένο cosθ, συμπίπτει με το συνηθισμένο cosθ (είναι, δηλαδή, περιοδική συνάρτηση, περιόδου 2π).

Μέσα σε έναν Ευκλείδειο χώρο, μπορούμε πάντοτε να αντικαταστήσουμε την τυχούσα βάση του χώρου, από μία βάση, τα ανύσματα της οποίας είναι αμοιβαίως κάθετα.
Ξεκινάμε από την βάση $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.



Θέτουμε $\vec{b}_1 = \vec{e}_1$

$\vec{b}_2 = \vec{e}_2 - \lambda_1\vec{e}_1$ (1)

$\vec{b}_3 = \vec{e}_3 - \lambda_2\vec{e}_2 - \lambda_1\vec{e}_1$ (2)

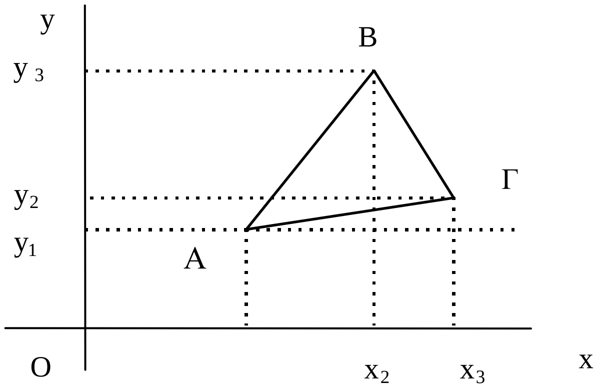
Θέλουμε να έχουμε $\vec{b}_2 \perp \vec{b}_1$ ή $\vec{b}_2 \perp \vec{e}_1$, και $\vec{b}_3 \perp \vec{b}_1$, $\vec{b}_3 \perp \vec{b}_2$, ή $\vec{b}_3 \perp \vec{e}_1$, $\vec{b}_3 \perp \vec{e}_2$. Πολλαπλασιάζουμε την (1) εσωτερικά με το $\vec{b}_1$ και θέτοντας $\vec{b}_2\cdot\vec{b}_1 = 0$, λαβαίνουμε $\lambda_1 = \dfrac{\vec{e}_2\cdot\vec{b}_1}{\vec{b}_1\cdot\vec{b}_1}$, οπότε και $\vec{b}_2 = \vec{e}_2 - \dfrac{\vec{e}_2\cdot\vec{b}_1}{\vec{b}_1\cdot\vec{b}_1}\vec{e}_1$. Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε την (2) εσωτερικά πρώτα με το $\vec{b}_1$ και μετά με το $\vec{b}_2$, και λαβαίνουμε τις σχέσεις, $\vec{b}_3\cdot\vec{b}_2 = \vec{e}_3\cdot\vec{b}_2 - \lambda_2\vec{e}_2\cdot\vec{b}_2 - \lambda_1\vec{e}_1\cdot\vec{b}_2$ και $\vec{b}_3\cdot\vec{b}_1 = \vec{e}_3\cdot\vec{b}_1 - \lambda_2\vec{e}_2\cdot\vec{b}_1 - \lambda_1\vec{e}_1\cdot\vec{b}_1$, ή και τις $0 = \vec{e}_3\cdot\vec{b}_2 - \lambda_2\vec{e}_2\cdot\vec{b}_2$, $0 = \vec{e}_3\cdot\vec{b}_1 - \lambda_1\vec{e}_1\cdot\vec{b}_1$, απ' όπου είναι, τελικά, $\vec{b}_3 = \vec{e}_3 - \dfrac{\vec{e}_3\cdot\vec{b}_2}{\vec{b}_2\cdot\vec{b}_2}\vec{e}_2 - \dfrac{\vec{e}_3\cdot\vec{b}_1}{\vec{b}_1\cdot\vec{b}_1}\vec{e}_1$. Ο επαγωγικός τύπος για την περίπτωση n-διαστάτου χώρου είναι, λοιπόν, ο (αλγόριθμος των Gram – Schmidt)

$$\vec{b}_n = \vec{e}_n - \frac{\vec{e}_n\cdot\vec{b}_{n-1}}{\vec{b}_{n-1}\cdot\vec{b}_{n-1}}\vec{e}_{n-1} - \cdots - \frac{\vec{e}_n\cdot\vec{b}_1}{\vec{b}_1\cdot\vec{b}_1}\vec{e}_1$$

4. Εμβαδόν Τριγώνου. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ δίδεται στην Ευκλείδειο γεωμετρία από τον τύπο: S = $\frac{1}{2}(\mathrm{AB})(\mathrm{A\Gamma})\sin\theta$, όπου θ η γωνία ΒΑΓ. Καλούμε φ_2 και φ_1 τις γωνίες ΒΑΧ και ΓΑΧ αντίστοιχα. Είναι τότε, θ = $\varphi_2-\varphi_1$. Άρα και

2S = (AB) (AΓ) ($\sin\varphi_2\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2\sin\varphi_1$) ή $2S = (x_3-x_1)(y_2-y_1)-(x_2-x_1)(y_3-y_1)$.

Η σχέση αυτή, γράφεται και σε μορφή ορίζουσας,



$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3-x_1 & x_2-x_1 \\ y_3-y_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix}$$

ή ακόμα και, $S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.

Λαβαίνουμε πάντα S = |S|.

5. Ευθείες στο επίπεδο. Στην περίπτωση, που S = 0, τα σημεία Α, Β, και Γ, βρίσκονται επ' ευθείας. Έχουμε λοιπόν, για την εξίσωση της ευθείας, που ορίζεται από τα σημεία Α και Β του επιπέδου, και την έκφραση,

$\begin{vmatrix} x-x_1 & x_2-x_1 \\ y-y_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix} = 0$, όπου εδώ το Γ = (x,y) είναι το τυχόν σημείο της ευθείας. Η προηγούμενη σχέση, γράφεται και $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m}$, όπου $l = x_2-x_1$ και $m = y_2-y_1$. Έχουμε, λοιπόν, και την μορφή Α(x– x_1)+B(y– y_1) = 0, με Α = –m, B = l. Επίσης και την Αx+By+Γ = 0, με Γ = –Α x_1–B y_1. Παρατηρούμε ότι, για την ευθεία αυτή, το ***διάνυσμα κατεύθυνσης*** αυτής είναι το $\vec{e}$ = (B, –A) ενώ το $\vec{n} = (A, B)$ είναι κάθετο στη ευθεία, μιά και $\vec{e}\cdot\vec{n} = 0$. Φανερά, κάθε εξίσωση της μορφής Αx+By+Γ = 0 (1), όπου είτε Α ≠ 0, είτε Β ≠ 0, παριστά κάποια ευθεία γραμμή στο Οxy επίπεδο. Η (1) είναι παράλληλος προς τον Οy άξονα, αν και μόνον αν Β = 0. Η (1) είναι παράλληλος προς τον Οx άξονα, ανν Α = 0. Η (1) διέρχεται από την αρχή Ο του συστήματος αναφοράς, ανν Γ = 0.

Οι ευθείες $A_1x+B_1y+\Gamma_1=0$ και $A_2x+B_2y+\Gamma_2=0$ είναι παράλληλες, ανν $\vec{e}_1 = k\vec{e}_2$, οπότε και $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, (ή $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$). Αν την ίδια τιμή είχε και ο λόγος $\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}$ τότε οι ευθείες ταυτίζονται. Θα λέμε ότι, δύο ευθείες είναι κάθετες ανν οι διευθύνσεις τους είναι ***κάθετα*** διανύσματα. Ισχύει δηλαδή ότι, $\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2$ = 0. Οι προηγούμενες ευθείες είναι λοιπόν κάθετες, ανν $(B_1-A_1)(B_2-A_2)=0$, ή $A_1A_2+B_1B_2=0$. Κάθετος λοιπόν της (1), είναι η ευθεία Bx–Ay+Γ = 0.

Την (1) όταν Β ≠ 0 την γράφουμε στη μορφή y = kx+λ (2) όπου $k = -\frac{A}{B}$ και $\lambda = -\frac{\Gamma}{B}$. Οι παράμετροι k και λ, παριστάνουν την *κλίση* της ευθείας ως προς τον Οx άξονα, και το μήκος που η ευθεία αποκόπτει απ' τον Οy άξονα. Το γεγονός ότι λ = (ΟY), όπου Υ το σημείο τομής της (2) με τον Οy άξονα, έπεται από το γεγονός ότι, το Υ = (0,λ) πληροί την (2). Η κλίση της (2) είναι εξ ορισμού, η εφαπτομένη της γωνίας, που η διεύθυνσή της σχηματίζει με τον Οx άξονα. Αν φ η γωνία αυτή, είναι τότε

$$\cos\varphi = \frac{\vec{e}\cdot\vec{i}}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \frac{\vec{e}\cdot\vec{i}}{\sqrt{A^2+B^2}} = -\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$$, οπότε και

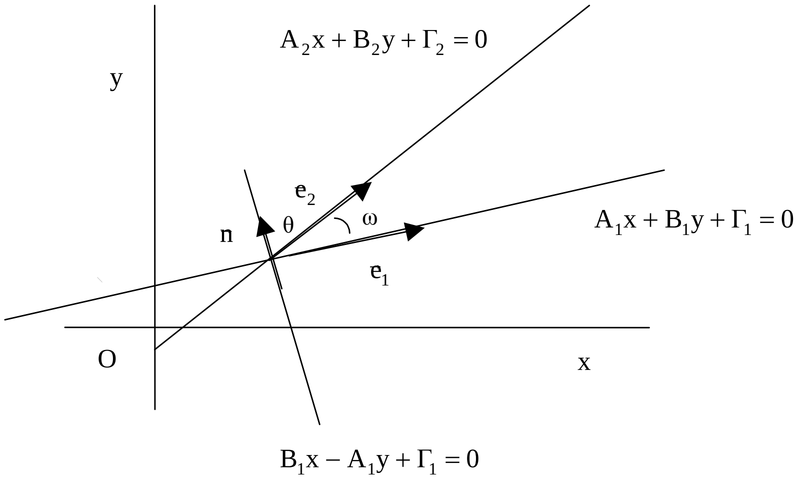
$$k = \tan\varphi = -\frac{A}{B}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1. ***Γωνία των ευθειών*** $A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ και $A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$. Οταν λέμε γωνία δύο ευθειών, νοούμε την γωνία ω των αντιστοίχων διευθύνσεών τους. Είναι: $\vec{e}_1 = (B_1, -A_1)$ και $\vec{e}_2 = (B_2, -A_2)$. Άρα και,

$$\cos\omega = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{(A_1^2+B_1^2)(A_2^2+B_2^2)}}$$

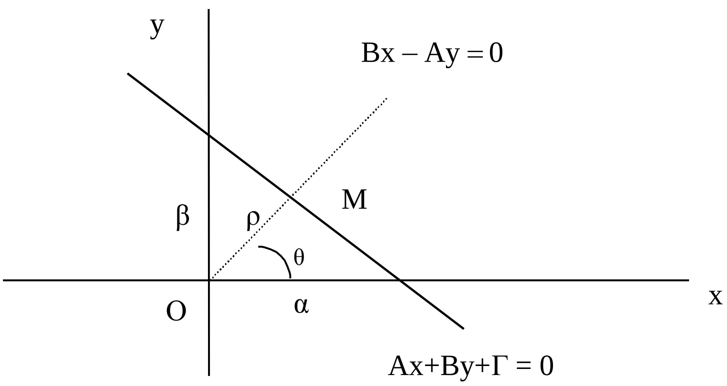
Αν θέλουμε να υπολογίσουμε την tanω, υπολογίζουμε και το $\sin\omega = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)$ που είναι το $\cos(\vec{n},\vec{e}_2) = \cos\theta$, $\vec{n} = (A_1, B_1)$ είναι το κάθετο διάνυσμα στην ευθεία $A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ Είναι

$$\cos(\vec{n},\vec{e}_2) = \frac{B_1A_2 - A_1B_2}{\sqrt{(A_1^2+B_1^2)(A_2^2+B_2^2)}}$$



οπότε και

$$\tan\omega = \frac{B_1A_2 - A_1B_2}{A_1A_2 + B_1B_2} = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}.$$



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2. ***Κανονική εξίσωση ευθείας***. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας Ax+By+Γ = 0 (1), σαν συνάρτηση των παραμέτρων ρ και θ, όπου ρ το μήκος της καθέτου που άγεται από το σημείο O, προς την ευθεία (απόσταση της αρχής από την ευθεία), και θ, η κλίση αυτής της καθέτου.

Όπως είδαμε παραπάνω, στην (1) κάθετος είναι η Bx−Ay+C = 0. Επειδή θέλουμε αυτή η κάθετος να διέρχεται και από την αρχή, η εξίσωσή της είναι η Bx−Ay = 0. Ένα σημείο M = (x,y), βρίσκεται και στις δύο αυτές ευθείες, ανν τις πληροί και τις δύο.

Έχουμε λοιπόν το σύστημα: Ax+By+C = 0,   Bx−Ay = 0.

Λύση του είναι η x = $A\Gamma\mu^2$ και y = $BC\mu^2$, όπου, μ = $\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, ο ***συντελεστής κανονικότητας*** της ευθείας. Είναι λοιπόν, ρ = (ΟΜ) = $\sqrt{x^2+y^2}=\Gamma\mu$. Τα τμήματα, που η ευθεία αποκόπτει από τους άξονες Οx, Οy, έχουν αντιστοίχως μήκη $\alpha=\dfrac{\Gamma}{A}$ και $\beta=\dfrac{\Gamma}{B}$. Είναι λοιπόν cosθ = $\dfrac{\rho}{\alpha}$, sinθ = $\dfrac{\rho}{\beta}$, ή cosθ = Αμ και sinθ = Βμ. Παρατηρούμε τώρα, ότι, αν πολλαπλασιάσουμε την (1) επί μ, λαβαίνουμε την (cosθ)x+(sinθ)y+ρ = 0 που είναι η κανονική εξίσωση της (1).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3. ***Απόσταση σημείου από ευθεία.*** Έστω Αx+Βy+Γ = 0 (1) η δοσμένη ευθεία, και Μ = (x_0,y_0) το δοσμένο σημείο. Θεωρούμε ότι, από το σημείο Μ διέρχεται μία ευθεία παράλληλη της (1). Οι κανονικές εξισώσεις των δύο αυτών παράλληλων ευθειών, θα είναι αντίστοιχα οι

$$(\cos\theta)x+(\sin\theta)y+\rho = 0, \quad \text{και} \quad (\cos\theta)x+(\sin\theta)y+\rho' = 0.$$

Απόσταση των δύο αυτών ευθειών είναι η δ = |ρ−ρ΄|. Αυτή είναι και η ζητουμένη απόσταση. Επειδή το σημείο Μ είναι πάνω στην δεύτερη ευθεία, οι συντεταγμένες του, πληρούν την εξίσωσή της. Είναι λοιπόν, ρ΄ = (cosθ)x_0+(sinθ)y_0 οπότε και

$$\frac{\delta}{\mu}=\frac{|\rho-\rho'|}{\mu}=\frac{|\Gamma\mu+(\cos\theta)x_0+(\sin\theta)y_0|}{\mu} = |Ax_0+By_0+\Gamma|. \text{ Άρα, } \delta=\frac{|Ax_0+By_0+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4. ***Παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας.*** Θεωρούμε μία ευθεία, που διέρχεται από το σημείο (x_0,y_0) και έχει κλίση θ. Αν t η απόσταση του τυχόντος σημείου (x,y) της ευθείας από το (x_0,y_0), μετρούμενη επ' αυτής, είναι τότε x = x_0+tcosθ, y = y_0+tsinθ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5. ***Εξίσωση δέσμης ευθειών.*** Έστω ότι, οι ευθείες a: $A_1x+A_2y+A_3=0$ και b: $B_1x+B_2y+B_3=0$, τέμνονται στο σημείο Μ. Τότε, οιαδήποτε άλλη ευθεία, που διέρχεται από το σημείο αυτό, θα έχει την μορφή a+λb = 0. Τρεις ευθείες διέρχονται δια του αυτού σημείου ανν Δ(a,b,c), όπου a = (A_1,A_2,A_3), b = (B_1,B_2,B_3) και c = $(\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3)$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6. Η παράσταση $\alpha_{11}x^2+2\alpha_{12}xy+\alpha_{22}y^2=0$, αν λυθεί ως προς y/x δίδει $\alpha_{22}(y/x)^2+2\alpha_{12}(y/x)+\alpha_{11}=0$, απ' όπου έχουμε ότι, $y/x=\{-\alpha_{12}\pm\sqrt{\delta}\}/\alpha_{22}$, με την διακρίνουσα $\delta=\alpha_{12}^2-\alpha_{11}\alpha_{22}$. Για $\delta\geq 0$, λαβαίνουμε το ***ζεύγος των ευθειών*** $y=m_1x$ και $y=m_2x$, με $m_1=\{-\alpha_{12}+\sqrt{\delta}\}/\alpha_{22}$, $m_2=\{-\alpha_{12}-\sqrt{\delta}\}/\alpha_{22}$. Παρατηρούμε ότι, $m_1+m_2=-2\alpha_{12}/\alpha_{22}$ και $m_1m_2=\alpha_{11}/\alpha_{22}$. Η γωνία συνεπώς θ του ζεύγους, δίδεται από την σχέση, $\tan\theta=\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\dfrac{2\alpha_{22}\sqrt{\delta}}{\alpha_{11}+\alpha_{22}}$

6. Ομογενείς συντεταγμένες στο επίπεδο. Σε κάθε (x,y)$\in\mathbb{R}^2$, αντιστοιχούμε την τριάδα $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ έτσι ώστε, $x=\dfrac{x_1}{x_3}$, $y=\dfrac{x_2}{x_3}$, $x_3\neq 0$. Κάθε τριάδα της μορφής $(x_1,x_2,0)$, δίδει εξ ορισμού το επ' άπειρο σημείο της ευθείας y = $\dfrac{x_2}{x_1}$x+λ, που έχει κλίση k = $\dfrac{x_2}{x_1}$. Το ότι ο ορισμός αυτός είναι καλός, φαίνεται από τον εξής συλλογισμό: Οι μη ομογενείς συντεταγμένες του τυχόντος σημείου P της ευθείας y = kx+λ, είναι, (x, kx+λ). Για x → +∞ το P μετακινείται προς το άπειρο, επί της ευθείας, κατά την μία κατεύθυνση ενώ για $x \to -\infty$ το x μετακινείται προς το άπειρο, επί της ευθείας, κατά την άλλη κατεύθυνση. Λαβαίνουμε τώρα, ομογενείς συντεταγμένες για το P, με $x_3 = \frac{1}{x}$. Τότε, είναι, $x_1 = 1$, $x_2 = k + \frac{\lambda}{x}$. Όταν λοιπόν το P γίνει το επ' άπειρο σημείο της ευθείας, οι ομογενείς συντεταγμένες του, θα γίνουν (1, k, 0).

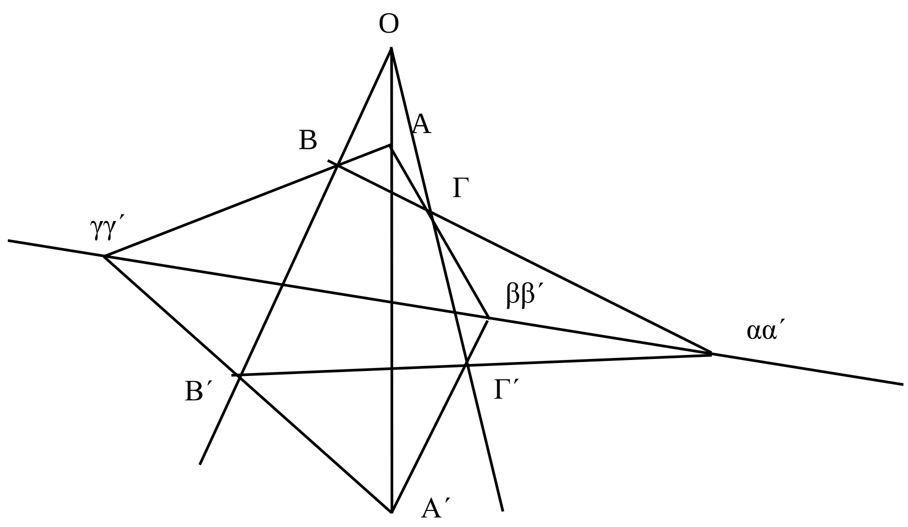
Όλες οι τριάδες συνεπώς είναι δεκτές ως ομογενείς συντεταγμένες σημείων, πλην της τριάδας (0,0,0).

Η εξίσωση της ευθείας a: $A_1x + A_2y + A_3 = 0$, γράφεται τώρα, $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = 0$. Θεωρούμε, τώρα, την μορφή φ(u,x) = $u^1x_1 + u^2x_2 + u^3x_3$. Παρατηρούμε τότε, ότι, όταν θεωρούμε σταθερό το u^* = (u^1, u^2, u^3) και το x = (x_1, x_2, x_3) μεταβαλλόμενο, η σχέση φ(u^*,x) = 0 δίδει το σύνολο των ***σημείων***, που ***κείνται επι της αυτής ευθείας*** u^*. Αν όμως, θεωρήσουμε το x σταθερό και το u^* μεταβαλλόμενο, τότε η σχέση φ(u^*,x) = 0 δίδει το σύνολο των ***ευθειών***, που ***διέρχονται από το αυτό σημείο*** x.

Τρία σημεία a, b, c βρίσκονται επί της αυτής ευθείας ανν |abc| = 0. Τούτο έπεται, από την συνθήκη της παραγράφου 5 σελ. 60, που πρέπει να πληρούν τα σημεία Α, Β και Γ, για να βρίσκονται επί της αυτής ευθείας. Μπορούμε συνεπώς, την εξίσωση της ευθείας, που ορίζεται από τα σημεία a και b να την γράφουμε, |xab| = 0.

Τρεις ευθείες a^*, b^*, c^* διέρχονται δια του αυτού σημείου, ανν $|a^*b^*c^*| = 0$. Τούτο έπεται από την συνθήκη, που δίδει την δέσμη των ευθειών, σελ. 62. Η εξίσωση λοιπόν της δέσμης, που ορίζεται από τις ευθείες a^* και b^*, γράφεται και $|x^*a^*b^*| = 0$.

Παρατηρούμε τώρα, ότι αν μέσα σε μία πρόταση, που αφορά ευθείες και σημεία του επιπέδου, αντικαταστήσουμε τις έννοιες “σημείο” και “κείται επί” από τις έννοιες “ευθεία” και “διέρχεται δια” θα προκύψει και πάλι πρότασις. Αυτό λέγεται *αρχή του* ***δυϊσμού***. Κλασική περίπτωση εφαρμογής αυτής της αρχής, αποτελεί το θεώρημα του Desargues.



Συμβολισμός. Με κεφαλαία γράμματα, τα σημεία. ΑΑ΄, ΒΒ΄, κλπ. Οι ευθείες που συνδέουν τα σημεία Α, Α΄, Β, Β΄ κλπ. Με μικρά γράμματα οι ευθείες. Η τομή των δύο ευθειών α, α΄, β, β΄ κλπ. Με αα΄, ββ΄, κλπ. Με κα+λβ θα συμβολίζουμε την ευθεία που διέρχεται από την τομή αβ των ευθειών α και β. Με κΑ+λΒ θα συμβολίζουμε το σημείο, που κείται επί της ευθείας ΑΒ.

ΘΕΩΡΗΜΑ του Desargues:

Υπόθεση: Τα σημεία αα΄, ββ΄, γγ΄ κείνται επ' ευθείας.

Συμπέρασμα. Οι ευθείες ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄, διέρχονται δια του αυτού σημείου.

Αντιστρόφως.

Υπόθεση: Οι ευθείες ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄, διέρχονται δια του αυτού σημείου.

Συμπέρασμα: Τα σημεία αα΄, ββ΄, γγ΄ κείνται επ’ ευθείας.
Απόδειξη. Εστω δ η ευθεία που περιέχει τα σημεία αα΄, ββ΄, και γγ΄. Οι ευθείες α, δ, α΄ σχηματίζουν δέσμη, και συνεπώς, είναι, δ = κα–κ΄α΄. Για τον ίδιο λόγο, έχουμε και ότι
δ = λβ–λ΄β΄, και δ = μγ–μ΄γ΄. Από τις σχέσεις αυτές, έπονται και οι:
λβ–μγ = λ΄β΄–μ΄γ΄, μγ–κα = μ΄γ΄– κ΄α΄ και κα–λβ = κ΄α΄–λ΄β΄. Αλλά λβ–μγ είναι μία ευθεία, που διέρχεται από το σημείο βγ = Α. Επίσης, λ΄β΄–μ΄γ΄ είναι μία ευθεία, που διέρχεται από το σημείο β΄γ΄ = Α΄. Η σχέση λοιπόν λβ–μγ = λ΄β΄–μ΄γ΄ ορίζει την ευθεία ΑΑ΄. Όμοια, οι άλλες δύο ισότητες, ορίζουν τις ευθείες ΒΒ΄ και ΓΓ΄. Είναι όμως, ΒΒ΄+ΑΑ΄+ΓΓ΄ = 0, και συνεπώς, οι τρεις αυτές ευθείες, διέρχονται δια του αυτού σημείου.

Ασκήσεις. 1) Από τις κορυφές Α = (3,0), Β = (4,2) και Γ = (–6,3) του τριγώνου ΑΒΓ, φέρουμε παράλληλους προς τις απέναντι πλευρές.

α) Ποιές είναι οι εξισώσεις των παράλληλων αυτών;
β) Ποιές είναι οι συντεταγμένες των σημείων τομής των;
γ) Ποιές είναι οι εξισώσεις των υψών του;
δ) Ποιές είναι οι εξισώσεις των διαμέσων του;

2) Ποια είναι η εξίσωση της καθέτου, που άγεται από το σημείο (x_0, y_0) προς την ευθεία y = κx+λ;

3) Ποια είναι η απόσταση των παράλληλων ευθειών 4x–3y = 7 και 8x–6y = 3.

4) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου, που έχει για πλευρές τις ευθείες: 4x–3y = 7, 2x–y = 1 και 6x+8y = 3.

5) Ποια είναι η εξίσωση της ευθείας, που διέρχεται από την τομή των ευθειών x–5y = 10 και 3x–7y = 8, και είναι κάθετη στην ευθεία y = $\frac{3}{5}x + 10$;

6) Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ, όπου Α = (α,0) και Β = (0,β). Θεωρούμε τα σημεία Δ = (α,–α) και Ε = (–β,β). Εστω Γ η προβολή του Ο πάνω στην ΑΒ. Να δείξετε ότι, η ευθείες ΟΓ, ΑΕ και ΒΔ, διέρχονται από το ίδιο σημείο.

7) Δίδεται το σημείο Μ = (α,β). Εκ του Μ φέρουμε ευθεία, η οποία τέμνει τον άξονα Οx στο σημείο Γ, και τον άξονα Οy στο σημείο Δ. Να προσδιορίσετε την ευθεία, έτσι ώστε, το Μ να είναι μέσον του τμήματος ΓΔ.

8) Εστω τα σημεία: (0,1,2,–1), (4,1,0,–1), (2,1,1,1), (2,–1,1,2)$\in \mathbb{R}^4$. Να προσδιορίσετε το υπερεπίπεδο, το οποίο διέρχεται από τα σημεία αυτά.

Λύση. Από τα τέσσερα αυτά σημεία, που ας τα καλέσουμε Α, Β, Γ και Δ αντίστοιχα, λαβαίνουμε τα τρία διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (4,0,-2,0)$, $\overrightarrow{A\Gamma} = (2,0,-1,2)$, και $\overrightarrow{A\Delta} = (2,-2,-1,3)$. Το σύνολο $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{A\Delta}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, και άρα, dimL$\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{A\Delta}\}$ = 3. Το ζητούμενο υπερεπίπεδο, έχει λοιπόν τον οδηγό χώρο $L_3 = L(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{A\Delta})$, και πάνω σ’ αυτό, το σύστημα αναφοράς {Ο, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{A\Delta}$}. Το τυχόν σημείο Χ του χώρου είναι σημείο του υπερεπιπέδου ανν,
$X = \lambda_1\overrightarrow{AB} + \lambda_2\overrightarrow{A\Gamma} + \lambda_3\overrightarrow{A\Delta}$, όπου $X = \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OX}$. Αν είναι Χ = $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, έχουμε τότε, και

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 + 4\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 \\ x_2 &= 1 \qquad\qquad\quad - 2\lambda_3 \\ x_3 &= 2 - 2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 \\ x_4 &= -1 \qquad + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \end{aligned}$$

που είναι και το παραμετρικό σύστημα του υπερεπιπέδου.

7. Ευθείες και επίπεδα στον χώρο. Οταν λέμε χώρο, εννοούμε τον χώρο Ε = $\mathbb{R}^3$ της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Σχετικά με τον ορισμό των ευθειών και των επιπέδων, βλέπε το εδάφιο 1. Για τις σχετικές θέσεις αυτών μέσα στον Ε, βλέπε το εδάφιο 2. Συνοψίζοντας τα όσα είπαμε προηγουμένως, σχετικά με ευθείες και επίπεδα στον Ε, έχουμε τα εξής. α) Δύο ευθείες του Ε είναι δυνατόν: i) Να έχουν ένα και μόνο κοινό σημείο. ii) Να είναι παράλληλες. iii) Να είναι στρεβλές. Στην περίπτωση i) οι δύο ευθείες ορίζουν την θέση ενός επιπέδου, που τις περιέχει. Στην περίπτωση ii) είναι δυνατόν είτε να ταυτίζονται, είτε να μην έχουν κανένα κοινό σημείο, οπότε και ορίζουν ένα επίπεδο, που τις περιέχει. Στην περίπτωση iii) δεν έχουν κοινό σημείο, ούτε υπάρχει επίπεδο, που να τις περιέχει. β) Δύο επίπεδα του Ε, είναι δυνατόν: i) Να έχουν μία και μόνο κοινή ευθεία, την τομή τους. ii) Να είναι παράλ-ληλα, οπότε και θα ταυτίζονται, ανν έχουν ένα κοινό σημείο.

Το μονοπαραμετρικό σύστημα

$$x = \alpha_1 + \lambda(\beta_1 - \alpha_1),\quad y = \alpha_2 + \lambda(\beta_2 - \alpha_2),\quad z = \alpha_3 + \lambda(\beta_3 - \alpha_3) \qquad (1)$$

παριστάνει την ευθεία που έχει διανυσματική εξίσωση, την $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\overrightarrow{AB}$, όπου $\vec{r}$ και $\vec{a}$ οι διανυσματικές ακτίνες του τυχόντος σημείου Χ και του δοσμένου σημείου Α αντ. της ευθείας, και $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ το διάνυσμα, που παράγει τον οδηγό υπόχωρο της ευθείας. Εδώ, έχουμε λάβει $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$.

Το παραπάνω σύστημα, γράφεται και στην μορφή

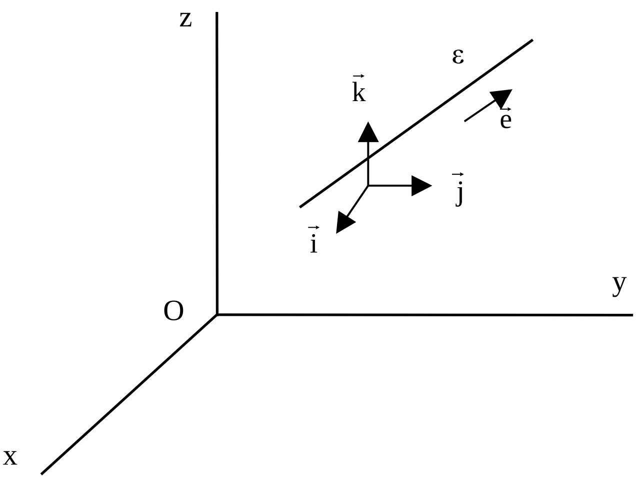
$$\begin{aligned} x &= (1-\lambda)\alpha_1 + \lambda\beta_1 \\ y &= (1-\lambda)\alpha_2 + \lambda\beta_2 \\ z &= (1-\lambda)\alpha_3 + \lambda\beta_3 \end{aligned} \qquad (1')$$

Η φυσική διάταξη που έχουν οι αριθμοί $\lambda \in \mathbb{R}$ μεταφέρεται από το σύστημα (1) σε μία διάταξη των σημείων της ευθείας, που το σύστημα αυτό παριστάνει. Από το (1΄) έχουμε επίσης ότι, για τιμές $0 \le \lambda \le 1$, λαβαίνουμε τα σημεία της ευθείας, που είναι ανάμεσα στα σημεία Α και Β, των σημείων αυτών, συμπεριλαμβανομένων.

Αν κάθε μία από τις εξισώσεις του συστήματος (1) λυθεί ως προς λ, λαβαίνουμε τότε, τις ισότητες των λόγων:

$$\frac{x - \alpha_1}{\beta_1 - \alpha_1} = \frac{y - \alpha_2}{\beta_2 - \alpha_2} = \frac{z - \alpha_3}{\beta_3 - \alpha_3}.$$

Οι λόγοι αυτοί έχουν νόημα, ακόμα και αν μερικοί (όχι όμως όλοι) παρονομαστές, μηδενίζονται. Έτσι, στην περίπτωση, που $\beta_1 - \alpha_1 = 0$, $\beta_2 - \alpha_2 \neq 0$, $\beta_3 - \alpha_3 \neq 0$, η ευθεία είναι παράλληλος του Oyz επιπέδου. Στην περίπτωση, που β$\beta_1 - \alpha_1 = 0$, $\beta_2 - \alpha_2 = 0$ και $\beta_3 - \alpha_3 \neq 0$, η ευθεία είναι παράλληλος προς τον άξονα Oz.



Η ***διεύθυνση*** μιάς ευθείας του χώρου, καθορίζεται από τα ***συνημίτονα κατευθύνσεως*** της ευθείας. Αν καλέσουμε ε την ευθεία μας, και α την γωνία που σχηματίζει η ε με τον άξονα Ox, β την γωνία που σχηματίζει η ε με τον άξονα Oy και γ την γωνία που σχηματίζει η ε με τον άξονα Oz, έχουμε τότε ότι, cosα = $\vec{e}\cdot\vec{i}$, cosβ = $\vec{e}\cdot\vec{j}$ και cosγ = $\vec{e}\cdot\vec{k}$, όπου $\vec{e}$ ένα μοναδιαίο διάνυσμα, οδηγός της ε. Για τα τρία αυτά συνημίτονα κατευθύνσεως, φανερά, έχουμε τη σχέση:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

(**Απόδειξη**. Εστω ότι, $\vec{e}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ με $|\vec{e}|=\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2}=1$. Είναι, λοιπόν, $\vec{e}\cdot\vec{i}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\cdot(1{,}0{,}0)=\varepsilon_1$. Όμοια, $\vec{e}\cdot\vec{j}=\varepsilon_2$ και $\vec{e}\cdot\vec{k}=\varepsilon_3$).

Όπως είδαμε στην σελ. 57, ένα επίπεδο στον χώρο Ε, εκφράζεται από το διπΆραμετρικό σύστημα

$$\begin{aligned} x&=\alpha_1+\lambda_1(\beta_1-\alpha_1)+\lambda_2(\gamma_1-\alpha_1)\\ y&=\alpha_2+\lambda_1(\beta_2-\alpha_2)+\lambda_2(\gamma_2-\alpha_2)\\ z&=\alpha_3+\lambda_1(\beta_3-\alpha_3)+\lambda_2(\gamma_3-\alpha_3)\ . \end{aligned}$$

Η απαλοιφή των παραμέτρων λ_1 και λ_2 δίδει την σχέση:

$$\begin{vmatrix} x-\alpha_1 & y-\alpha_2 & z-\alpha_3\\ \beta_1-\alpha_1 & \beta_2-\alpha_2 & \beta_3-\alpha_3\\ \gamma_1-\alpha_1 & \gamma_2-\alpha_2 & \gamma_3-\alpha_3 \end{vmatrix}=0$$

η οποία γράφεται και

$$Ax+By+\Gamma z+\Delta = 0$$

με

$$A=\begin{vmatrix}\beta_2-\beta_1 & \gamma_2-\gamma_1\\ \beta_3-\beta_1 & \gamma_3-\gamma_1\end{vmatrix},\quad B=\begin{vmatrix}\gamma_2-\gamma_1 & \alpha_2-\alpha_1\\ \gamma_3-\gamma_1 & \alpha_3-\alpha_1\end{vmatrix},\quad \Gamma=\begin{vmatrix}\alpha_2-\alpha_1 & \beta_2-\beta_1\\ \alpha_3-\alpha_1 & \beta_3-\beta_1\end{vmatrix}$$

και $\Delta=-(A\alpha_1+B\alpha_2+\Gamma\alpha_3)$.

Ασκήσεις. 1) Να ελέγξετε αν τα σημεία Α = (1,1,–1), Β = (2,1,1), Γ = (3,–1,2) και Δ = (0,3,–2) είναι ή όχι συνεπίπεδα.

Λύση. Αρκεί το $\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma},\overrightarrow{A\Delta}\}$ να είναι γραμμικά εξαρτημένο.
Πράγματι, είναι $\overrightarrow{AB}$ = (1,0,2), $\overrightarrow{A\Gamma}$ = (2,–2,3) και $\overrightarrow{A\Delta}$ = (–1,2,–1).
Η $\kappa_1\overrightarrow{AB}+\kappa_2\overrightarrow{A\Gamma}+\kappa_3\overrightarrow{A\Delta}$ = 0, αληθεύει για $\kappa_1=-\kappa_3$, $\kappa_1=\kappa_3$ και κ_3 οιοσδήποτε πραγματικός αριθμός. Τα δοσμένα σημεία, είναι λοιπόν συνεπίπεδα.

2) Να γράψετε την εξίσωση του επιπέδου, που ορίζεται από τα σημεία Α = (0,1,–1), Β = (1,–1,1) και Γ = (3,–2,4).

Λύση. Παρατηρούμε ότι, τα $\overrightarrow{AB}$ = (1,–2,2) και $\overrightarrow{A\Gamma}$ = (3,–3,5) δεν είναι συγγραμμικά. Άρα η διανυσματική εξίσωση του ζητουμένου επιπέδου είναι η

$$\overrightarrow{AR}=\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{A\Gamma},\quad \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$$

ή αν θέσουμε $\overrightarrow{AR}=\vec{r}-\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$, $\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{c}-\vec{a}$

$$\vec{r}=(1-\lambda_1-\lambda_2)\vec{a}+\lambda_1\vec{b}+\lambda_2\vec{c}\,.$$

ΠΆΡΑΤΗΡΗΣΗ 3. Αν την Καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου την γράψουμε στην μορφή $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1$, όπου $\alpha=-\frac{\Delta}{A}$, $\beta=-\frac{\Delta}{B}$, $\gamma=-\frac{\Delta}{\Gamma}$, τότε α, β, γ είναι τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων, που το επίπεδο αποκόπτει από τους άξονες Οx, Oy, Oz αντ. του συστήματος αναφοράς του χώρου.
Πράγματι, το σημείο Ρ = (α,0,0) πληροί την εξίσωση Ax+By+Γz+Δ = 0 του επιπέδου, κείται επί του άξονα Οx, και απέχει από την αρχή Ο, απόσταση ίση με α.

ΠΆΡΑΤΗΡΗΣΗ 4. Η Καρτεσιανή εξίσωση Ax+By+Γz+Δ = 0, γράφεται και στην μορφή $Ax+By+\Gamma z-(A\alpha_1+B\alpha_2+\alpha_3\Gamma)=0$ ή $A(x-\alpha_1)+B(y-\alpha_2)+\Gamma(z-\alpha_3)=0$ ή ακόμα και

$$(A,B,\Gamma)\cdot((x-\alpha_1),(y-\alpha_2),(z-\alpha_3)) = 0.$$

Αν λοιπόν, θέσουμε $\vec{n}$ = (Α,Β,Γ), η προηγούμενη σχέση δηλώνει ότι, το $\vec{n}$ είναι κάθετο στο επίπεδο, μιά και το εσωτερικό γινόμενο του $\vec{n}$ με το τυχόν διάνυσμα $\overrightarrow{AR}$ του επιπέδου είναι μηδέν (βλέπε εδάφιο 3).

ΠΆΡΑΤΗΡΗΣΗ 5. Τα επίπεδα $A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1=0$ και $A_2x+B_2y+\Gamma_2z+\Delta_2=0$ είναι παράλληλα, ανν τα κάθετα προς αυτά διανύσματα $\vec{n}_1$ και $\vec{n}_2$ είναι συγγραμμικά. Ανν δηλαδή, είναι (A_1,B_1,Γ_1) = $\lambda(A_2,B_2,\Gamma_2)$, ή ισοδύναμα, $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}$. Αν την ίδια τιμή έχει και ο λόγος $\frac{\Delta_1}{\Delta_2}$, τα επίπεδα ταυτίζονται.

ΠΆΡΑΤΗΡΗΣΗ 6. Η γωνία δύο επιπέδων, είναι η γωνία των καθέτων προς αυτά διανυσμάτων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6. Κανονική εξίσωση επιπέδου. Αν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση Αx+Βy+Γz+Δ = 0 επί τον ***συντελεστή κανονικότητας*** $\mu=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}$ παρατηρούμε ότι, οι συντελεστές Αμ, Βμ και Γμ, είναι οι συντεταγμένες του μοναδιαίου καθέτου προς το επίπεδο διανύσματος $\vec{n}$. Τα συνημίτονα κατευθύνσεως της μοναδιαίας καθέτου $\vec{n}$ είναι, cosα = $\vec{e}\cdot\vec{i}$ = Αμ, cosβ = $\vec{e}\cdot\vec{j}$ = Βμ, cosγ = $\vec{e}\cdot\vec{k}$ = Γμ. Ας υπολογίσουμε, τώρα, την απόσταση του σημείου Ο από το επίπεδο. Προς τούτο, προβάλουμε το Ο πάνω στο επίπεδο, και μετράμε το μήκος της προβαλλούσης καθέτου. Αν το μήκος αυτό είναι ρ, τότε

$\overrightarrow{OK}=\rho\vec{n}$ = ρμ(Α,Β,Γ), όπου Κ είναι ο πούς της καθέτου. Το σημείο Κ όμως, πληροί την εξίσωση του επιπέδου. Άρα

Α(ρμΑ)+Β(ρμΒ)+Γ(ρμΓ)+Δ = 0, ή $\rho=-\frac{\Delta}{\mu(A^2+B^2+\Gamma^2)}$ ή $\rho=-\Delta\mu$.

Η εξίσωση Αx+Βy+Γz+Δ = 0, γράφεται συνεπώς, και στην ***κανονική της μορφή***, που είναι η (casα)x+(cosβ)y+(cosγ)z–ρ = 0.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 7. Απόσταση δ σημείου $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ από επίπεδο. Εργαζόμενοι όπως και στο αντίστοιχο πρόβλημα της ευθείας (Βλέπε Πρόβλημα 3, σελ.62), έχουμε ότι,

$$\delta=\frac{|Ax_0+By_0+\Gamma z_0+\Delta|}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 8. Δίδονται οι ευθείες $\frac{x-x_1}{\alpha_1}=\frac{y-y_1}{\alpha_2}=\frac{z-z_1}{\alpha_3}$ και $\frac{x-x_2}{\beta_1}=\frac{y-y_2}{\beta_2}=\frac{z-z_2}{\beta_3}$.

Οι ευθείες αυτές είναι παράλληλες, ανν, $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\lambda(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$. Εστω, τώρα, ότι οι ευθείες δεν είναι παράλληλες, και θέλουμε να δούμε αν τέμνονται ή όχι. Θα πρέπει λοιπόν να ελέγξουμε, αν και κατά πόσον τα διανύσματα $\vec{a}$ = $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\vec{b}$ = $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ και $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$, είναι ή όχι συνεπίπεδα. Ο έλεγχος αυτός, γίνεται εύκολα, αν χρησιμοποιήσουμε την ορίζουσα των συντεταγμένων των $\vec{a}$, $\vec{b}$, και $\overrightarrow{M_1M_2}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 9. Αν θέλουμε να βρούμε τις συντεταγμένες του σημείου τομής μιάς ευθείας και ενός επιπέδου, εργαζόμαστε ως εξής: Καλούμε x, y, z τις συντεταγμένες του ζητουμένου σημείου τομής. Είναι, τότε, $x = x_0 + \lambda\alpha_1$, $y = y_0 + \lambda\alpha_2$, και $z = z_0 + \lambda\alpha_3$ μια και το ζητούμενο σημείο, ανήκει στην ευθεία $\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{a}$ καθώς επίσης και στην ευθεία $A(x_0 + \lambda\alpha_1) + B(y_0 + \lambda\alpha_2) + \Gamma(z_0 + \lambda\alpha_3) + \Delta = 0$ (1), μια και το ζητούμενο σημείο, ανήκει και στο επίπεδο Ax+By+Γz+Δ = 0. Από την (1), υπολογίζουμε την τιμή της παραμέτρου λ, και συνεπώς τις συντεταγμένες του ζητουμένου σημείου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 10. Από το σημείο $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, θέλουμε να φέρουμε επίπεδο κάθετο, (αντ. παράλληλο), προς την ευθεία $\vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{a}$. Αν Ax+By+Γz+Δ = 0 η εξίσωση του ζητουμένου επιπέδου, τότε το διάνυσμα $\vec{n}$ = (A,B,Γ) είναι παράλληλο, (αντ. κάθετο) προς την διεύθυνση $\vec{a}$ της ευθείας. Είναι, λοιπόν, $\vec{n} = \lambda\vec{a}$ (αντ. $\vec{n}\cdot\vec{a} = 0$) ή $A = \lambda\alpha_1$, $B = \lambda\alpha_2$, $\Gamma = \lambda\alpha_3$ (αντ. $A\alpha_1 + B\alpha_2 + \Gamma\alpha_3 = 0$). Εξ' άλλου, το ζητούμενο επίπεδο διέρχεται και από το σημείο M_0, και συνεπώς $Ax_0 + By_0 + \Gamma z_0 + \Delta = 0$. Από τις σχέσεις αυτές, προσδιορίζουμε την τιμή του λ. Παρατηρούμε ότι, το λ προσδιορίζεται μονοσήμαντα, μόνο στην περίπτωση του επιπέδου, που άγεται από σημείο, κάθετα προς ευθεία. Σε κάθε άλλη περίπτωση, έχουμε απειρία λύσεων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 11. Αν θέλουμε να βρούμε την απόσταση σημείου M_0 από ευθεία, βρίσκουμε πρώτα, την εξίσωση του καθέτου προς την ευθεία επιπέδου, που άγεται από το δοσμένο σημείο. Αν M το σημείο τομής του επιπέδου αυτού, με την δοσμένη ευθεία, τότε η ζητουμένη απόσταση, είναι ίση προς $|\overrightarrow{MM_0}|$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 12. Για να βρούμε την απόσταση δύο στρεβλών ευθειών $\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda\vec{a}_1$ και $\vec{r} = \vec{r}_2 + \mu\vec{a}_2$, εγαζόμαστε ως εξής: Θεωρούμε την κοινή κάθετο αυτών, και έστω M_0 M_1 το σημείο τομής της καθέτου αυτής με την $\vec{r}_1$, M_2 το σημείο τομής της κοινής καθέτου με την $\vec{r}_2$. Ζητάμε να βρούμε το μήκος του $\overrightarrow{M_1M_2}$. Για κάποιες συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων λ και μ, λαβαίνουμε τα σημεία M_1, M_2. Για τις τιμές αυτές, $\overrightarrow{OM_1} = \vec{r}_1 + \lambda\vec{a}_1$, $\overrightarrow{OM_2} = \vec{r}_2 + \lambda\vec{a}_2$. Το $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$ είναι κάθετο και στο $\vec{a}_1$ και στο $\vec{a}_2$. Άρα,

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1 + \lambda\vec{a}_2 - \mu\vec{a}_1)\cdot\vec{a}_1 = 0 \text{ ή } (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\cdot\vec{a}_1 = \lambda\vec{a}_2\cdot\vec{a}_1 - \mu\vec{a}_1\cdot\vec{a}_1$$

και

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1 + \lambda\vec{a}_2 - \mu\vec{a}_1)\cdot\vec{a}_2 = 0 \text{ ή } (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\cdot\vec{a}_2 = \lambda\vec{a}_2\cdot\vec{a}_2 - \mu\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2$$

Από τις παραπάνω δύο σχέσεις, προσδιορίζουμε τις τιμές των παραμέτρων λ και μ, άρα και την θέση των σημείων M_1 και M_2.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 14. Θέλουμε να βρούμε την προβολή της ευθείας $\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda\vec{a}_1$ πάνω στο επίπεδο Ax+By+Γ+Δ = 0. Την προβολή αυτή, την προσδιορίζουμε, ως τομή δύο επιπέδων: Του Ax+By+Γ+Δ = 0 και του καθέτου προς αυτό, που περιέχει την ευθεία $\vec{r}$. Το επίπεδο αυτό, περνά από το σημείο $\vec{r}_1$ και περιέχει τα διανύσματα $\vec{a}_1$ και $\vec{n}$ έχει εξίσωση την:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ A & B & \Gamma \end{vmatrix} = 0.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 15. Δέσμη επιπέδων. Εστω τα επίπεδα, A: $A_1x + A_2y + A_3z + A_4 = 0$ και B: $B_1x + B_2y + B_3z + B_4 = 0$. Για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, η σχέση A+λB = 0, όπου A+λB το επίπεδο $(A_1 + \lambda B_1)x + (A_2 + \lambda B_2)y + (A_3 + \lambda B_3)z + (A_4 + \lambda B_4) = 0$, προσδιορίζει την εξίσωση ενός επιπέδου, που διέρχεται από την τομή των επιπέδων A και B. Για να βρούμε την τομή των A, B, αρκεί να λύσουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων των επιπέδων αυτών, θεωρώντας την μία των μεταβλητών x, y, z, έστω την z, ως παράμετρο. Τότε, $\forall z\in \mathbb{R}$, το $\{(x,y,z)\}$ αποτελεί την ζητουμένη τομή, όπου

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -A_3z-A_4 & A_2 \\ B_1 & -B_3z-B_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} -B_3z-B_4 & B_2 \\ A_1 & -A_3z-A_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Ασκήσεις. 1) Να γράψετε την εξίσωση ενός επιπέδου το οποίον

α) Είναι παράλληλο στο xy-επίπεδο, και κείται 3 μονάδες κάτω απ' αυτό.

Λύση. Το ζητούμενο επίπεδο είναι κάθετο στον άξονα Oz, κάθετο δηλαδή στο διάνυσμα $\vec{n}=(0,0,1)$. Άρα η καρτεσιανή του εξίσωση είναι η $0(x-x_o)+0(y-y_o)+1(z-z_o)=0$, όπου $(x_o, y_o, z_o)=(0, 0, -3)$. Η εξίσωση του ζητουμένου επιπέδου είναι, λοιπόν, η $z=-3$

β) Είναι παράλληλο στο xy-επίπεδο, και περιέχει το σημείο (3,-2,-4).

Λύση. Σύμφωνα με το (α) έχουμε την $0(x-3)+0(y-2)+1(z-4)=0$. Η εξίσωση του ζητουμένου επιπέδου είναι, λοιπόν, η $z=4$

γ) Είναι παράλληλο στον Oz άξονα, τέμνει τον Ox άξονα στο σημείο 2 και τον Oy άξονα στο σημείο -3.

Λύση. Το ζητούμενο επίπεδο είναι παράλληλο (περιέχει) κάθε διάνυσμα της μορφής $\overrightarrow{OX}=z\vec{k}$. Εξ άλλου, περιέχει τα σημεία $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}$ και $\overrightarrow{OB}=-3\vec{j}$. Μπορούμε να πούμε λοιπόν, ότι το επίπεδο ορίζεται από τα σημεία $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ και, $\overrightarrow{O\Gamma}=z\vec{k}$ z, οτιδήποτε.. Ένα τυχόν σημείο του επιπέδου, είναι το $\overrightarrow{AX}=\kappa\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{A\Gamma}$

ή $\overrightarrow{OX}=(1-\kappa-\lambda)\overrightarrow{OA}+\kappa\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{O\Gamma}=2(1-\kappa-\lambda)\vec{i}-3\kappa\vec{j}$. Έχουμε, συνεπώς, το διπαραμετρικό σύστημα $x=2-2\kappa-2\lambda,\ y=-3\kappa,\ 0z=0$. Η απαλοιφή των παραμέτρων κ, λ, δίδει την καρτεσιανή εξίσωση του ζητουμένου επιπέδου, που είναι η $3x-2y+0z-6=0$.

δ) Είναι παράλληλο στο επίπεδο $2x-3y-5z+6=0$ και περιέχει το σημείο (-1,2,4).

Λύση. Το ζητούμενο επίπεδο θα είναι και αυτό κάθετο στο $\vec{n}=(2,-3,-5)$, που είναι το κάθετο διάνυσμα στο δοθέν επίπεδο. Άρα $2(x+1)+(-3)(y-2)+(-5)(z-4)=0$ και συνεπώς η ζητούμενη εξίσωση είναι η $2x-3y-5z+28=0$.

ε) Διέρχεται από το σημείο (3,-2,4), και είναι κάθετο στα επίπεδα $7x-3y+z-5=0$, και $4x-y-z+9=0$.

Λύση. Το ζητούμενο επίπεδο θα είναι κάθετο στην τομή των δύο επιπέδων που μας δίδουν. Η τομή τους, αποτελείται από το σύνολο των σημείων (x, y, z), που πληρούν το σύστημα των εξισώσεων $7x-3y=5-z$ και $4x-y=-9+z$. Η λύση του συστήματος αυτού είναι η $5x=-32+4z,\ \ 5y=-83+11z$. Για $z=0$ και $z=1$ λαβαίνουμε τα σημεία $(-32/5,\ -83/5,\ 0)$ και $(-28/5,\ -72/5,\ 1)$. Ένα ανυσματάκι, συνεπώς, πάνω στην τομή, είναι το $(4/5,\ 11/5,\ 1)$ ή το $\vec{n}=(4,\ 11,\ 5)$. Η εξίσωση του ζητουμένου επιπέδου είναι, λοιπόν, η $4(x-3)+11(y+2)+5(z-4)=0$ ή $4x+11y+5z-10=0$.

στ) Διέρχεται από την τομή των επιπέδων $2x-y+2z-6=0$, $3x-6y+2z-12=0$ και τέμνει τον Ox άξονα στο σημείο 6.

Λύση. Το ζητούμενο επίπεδο αποτελεί δέσμη με τα δοσμένα. Πληροί συνεπώς την σχέση $\kappa(2x-y+2z-6)+\lambda(3x-6y+2z-12)=0$ ή την

$(2\kappa+3\lambda)x-(\kappa+6\lambda)y-(6\kappa-2\lambda)z-6(\kappa+2\lambda)=0$. Το σημείο εξ' άλλου (6, 0, 0) κείται επί του επιπέδου. Ισχύει, συνεπώς ότι, $(2\kappa+3\lambda)6-6(\kappa+2\lambda)=0$ ή $\kappa+\lambda=0$. Για $\kappa=1$ και $\lambda=-1$ η εξίσωση του ζητουμένου επιπέδου είναι η $x-5y+0z-6=0$.

ζ) Περιέχει τις ευθείες $\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{3}$ και $\frac{x-1}{5}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-2}{3}$.

Λύση. Τα διανύσματα $\vec{e}_1=(4,2,3)$ και $\vec{e}_2=(5,4,3)$ ορίζουν το ζητούμενο επίπεδο. Η εξίσωσή του είναι, λοιπόν, η $\overrightarrow{AX}=\kappa\vec{e}_1+\lambda\vec{e}_2$ ή $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\kappa\vec{e}_1+\lambda\vec{e}_2$ όπου $\overrightarrow{OA}=(1,-1,2)$. Το σύστημα $x=1+4\kappa+5\lambda$, $y=-1+2\kappa+4\lambda$, $z=2+3\kappa+3\lambda$ έχει ως απαλοίφουσα την $2x-3y-2z-1=0$.

2) Να βρεθεί πόσο απέχουν μεταξύ τους τα παράλληλα επίπεδα $3x+6y+2z=27$ και $3x+6y+2z=22$. Το διάνυσμα $\vec{n}=(3,\ 6,\ 2)$ είναι κάθετο στα επίπεδα.. Η ευθεία $\frac{x}{3}=\frac{y}{6}=\frac{z}{2}=\lambda$ περιέχει το $\vec{n}$ (διέρχεται και από την αρχή των αξόνων). Η ευθεία αυτή τέμνει τα επίπεδα στα σημεία $9\lambda+36\lambda+4\lambda=27$ και $=22$ αντίστοιχα ή $\lambda_1=27/49$ και $\lambda_2=22/49$. Αρκεί, τώρα, να υπολογίσουμε την απόσταση των σημείων $A=(3\lambda_1,6\lambda_1,2\lambda_1)$ και $B=(3\lambda_2,6\lambda_2,2\lambda_2)$.

Είναι $(AB)^2=9(\lambda_2-\lambda_1)^2+36(\lambda_2-\lambda_1)^2+4(\lambda_2-\lambda_1)^2=\left(\frac{5}{49}\right)^2 49=\frac{25}{49}$. Άρα $(AB)=\frac{5}{7}$.

3) Να βρεθεί το σημείο τομής της ευθείας $x-2y+z=0$, $3x+y+2z=7$ με τα επίπεδα. Oxy, Oyz, Ozx.

Λύση. Η ευθεία δίδεται ως τομή δύο επιπέδων. Λύουμε συνεπώς το σύστημα $x-2y=-z$ και $3x+y=7-2z$, απ' όπου έχουμε ότι το σύνολο των σημείων της τομής είναι το $\left(2-\frac{5z}{7},\ 1+\frac{z}{7},\ z\right)$. Τα σημεία του επιπέδου Oxy έχουν $z=0$. Άρα η ευθεία μου τέμνει το Ox επίπεδο στο σημείο (2, 1, 0). Το Ozx στο σημείο που έχει $1+\frac{z}{7}=0$, που είναι το (7, 0, -7) και, τέλος το Oyz στο σημείο που έχει $2-\frac{5z}{7}=0$ και είναι το $\left(0\frac{7}{5},\frac{14}{5}\right)$.

4) Να δείξετε ότι η ευθεία $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{4}$ είναι παράλληλη με το επίπεδο $6x+7y-5z-8=0$.

Λύση. Τα διανύσματα $\vec{n}=(6,7,-5)$ είναι κάθετο στο επίπεδο. Το διάνυσμα $\vec{e}=(1,2,4)$ κείται επί της ευθείας. Παρατηρούμε ότι, $\vec{n}\cdot\vec{e}=0$.

5) α) Να ευρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Α = (1, -3, 4), και είναι κάθετος στο επίπεδο $x-3y+2z=4$. Λύση Η εξίσωση της ζητουμένης ευθείας έχει την μορφή $\frac{x-1}{\ell}=\frac{y+3}{m}=\frac{z-4}{n}$ όπου το $\vec{e}=(\ell,m,n)$ είναι κάθετο στο επίπεδο που μας δίδουν. Αρκεί συνεπώς να λάβουμε $\vec{e}=(1,-3,2)$. β) Το σημείο τομής της ευθείας αυτής και του επιπέδου μας, είναι το $(\lambda\ell+1,\ \lambda m-3,\ \lambda n+4)=(\lambda+1,\ -3\lambda-3,\ 2\lambda+4)$. Η τιμή της παραμέτρου λ προσδιορίζεται από την σχέση $\lambda+1-3(-3\lambda-3)+2(2\lambda+4)=4$ ή $\lambda=-1$.

Το ζητούμενο σημείο τομής είναι, το (0, 0, 2) που δεν είναι άλλο, από την προβολή του Α στο επίπεδο.

6) Να βρεθεί η προβολή του διανύσματος $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ επί της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία (2, 3, -1) και (-2, -4, 3).

Λύση. Η ζητούμενη προβολή είναι το ευθύγραμμο τμήμα της δοθείσης ευθείας, το οποίο προσδιορίζεται από τις τομές των καθέτων επιπέδων στα άκρα του δοθέντος διανύσματος.

Τα δοθέντα σημεία, προσδιορίζουν το $4\vec{i} + 7\vec{j} + 4\vec{k}$. Το $\vec{u} = \frac{1}{9}\left(4\vec{i} + 7\vec{j} + 4\vec{k}\right)$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος της ευθείας μου. Το μήκος της προβολής του $\overrightarrow{AB}$ είναι συνεπώς, $(AB) = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = \frac{16 - 21 + 4}{9} = 1$.

7) Έστω $\overrightarrow{OP} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ και $\overrightarrow{OQ} = \vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$.

α) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο Q και είναι κάθετο στην ευθεία PQ.

β) Ποία είναι η απόσταση του σημείου Α = (-1, 1, 1) από το επίπεδο αυτό;

Λύση. α) Είναι $\overrightarrow{PQ} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$. Το διάνυσμα αυτό είναι κάθετο στο επίπεδο που διέρχεται από το σημείο Q. Άρα, $2(1 - x) + 3(-2 - y) + 6(-4 - z) = 0$ ή $2x + 3y + 6z = 28$.

β) Μία ευθεία που περνά από το σημείο (-1, 1, 1) και είναι κάθετος στο επίπεδο αυτό, είναι η $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{6} = \lambda$. Η ευθεία αυτή τέμνει το επίπεδο στο σημείο εκείνο, που προσδιορίζει η παράμετρος λ, την οποία υπολογίζουμε από την ισότητα:

$2(2\lambda - 1) + 3(3\lambda + 1) + 6(6\lambda + 1) = 28$, ή $49\lambda = 21$, ή $\lambda = 21/49$. Επί του επιπέδου έχουμε, λοιπόν, το σημείο $x = -1 + 42/49$, $y = 1 + 63/49$, $z = 1 + 126/49$. Η απόσταση του σημείου Α από το Χ = (x, y, z) είναι, $(AX)^2 = 9$ ή $(AX) = 3$.

8. Στροφή στερεού στο χώρο. Στερεό σχήμα του χώρου, είναι, (για τις εδώ ανάγκες μας), ένα σύνολο σημείων του χώρου, των οποίων οι αμοιβαίες αποστάσεις παραμένουν αναλλοίωτες.

Η θέσις ενός στερεού σχήματος στο χώρο, προσδιορίζεται από τις συντεταγμένες των σημείων του, ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς Oxyz. Μία άλλη θέσις του ιδίου στερεού στο χώρο, προσδιορίζεται από την θέση ενός νέου συστήματος αναφοράς O΄x΄y΄z΄, ως προς το οποίο, το στερεό έχει την ίδια σχετική θέση, την οποία είχε και ως προς το παλαιό σύστημα. Το πρόβλημα, λοιπόν, της ευρέσεως της νέας θέσεως του στερεού, ανάγεται στον προσδιορισμό του O΄x΄y΄z΄ σε σχέση με το Oxyz. Προς τούτο, προσδιορίζουμε πρώτα την θέση του O΄, προσδιορίζουμε, δηλαδή, το $\overrightarrow{OO'}$, και στη συνέχεια, προσδιορίζουμε τις διευθύνσεις των αξόνων O΄x΄, O΄y΄, O΄z΄ ως προς τους άξονες Ox, Oy και Oz. Οι διευθύνσεις αυτές, δίδονται από τα συνημίτονα των γωνιών που σχηματίζουν οι άξονες αυτοί:

	Ox	Oy	Oz
Ox'	α_1	β_1	γ_1
Oy'	α_2	β_2	γ_2
Oz'	α_3	β_3	γ_3

όπου, $\alpha_1 = \cos(\vec{i}', \vec{i}) = \vec{i}' \cdot \vec{i}$, $\beta_1 = \cos(\vec{i}', \vec{j}) = \vec{i}' \cdot \vec{j}$, $\gamma_1 = \cos(\vec{i}', \vec{k}) = \vec{i}' \cdot \vec{k}$,

$\alpha_2 = \cos(\vec{j}', \vec{i}) = \vec{j}' \cdot \vec{i}$, $\beta_2 = \cos(\vec{j}', \vec{j}) = \vec{j}' \cdot \vec{j}$, $\gamma_2 = \cos(\vec{j}', \vec{k}) = \vec{j}' \cdot \vec{k}$

$$\alpha_3 = \cos(\vec{k}', \vec{i}) = \vec{k}' \cdot \vec{i}\,, \quad \beta_3 = \cos(\vec{k}', \vec{j}) = \vec{k}' \cdot \vec{j}\,, \quad \gamma_3 = \cos(\vec{k}', \vec{k}) = \vec{k}' \cdot \vec{k}\,.$$

Θεωρούμε τους πίνακες .

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \text{ και } C^T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι, $CC^T = I$ ***(συνθήκη ορθογωνιώτητος)***.

Πράγματι, είναι, $\alpha_i\alpha_j + \beta_i\beta_j + \gamma_i\gamma_j = \delta_{ij}$. Για παράδειγμα, αν $i = 2$, $j = 3$, έχουμε την $\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = \delta_{23} = 0$, που ισχύει, μιά και από τις $\vec{j}' = (\vec{j}' \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{j}' \cdot \vec{j})\vec{j} + (\vec{j}' \cdot \vec{k})\vec{k}$, $\vec{k}' = (\vec{k}' \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{k}' \cdot \vec{j})\vec{j} + (\vec{k}' \cdot \vec{k})\vec{k}$ έχουμε, αφού τα $\vec{j}'$ και $\vec{k}'$ είναι μεταξύ τους κάθετα, ότι, $\vec{j}' \cdot \vec{k}' = 0$, δηλαδή,

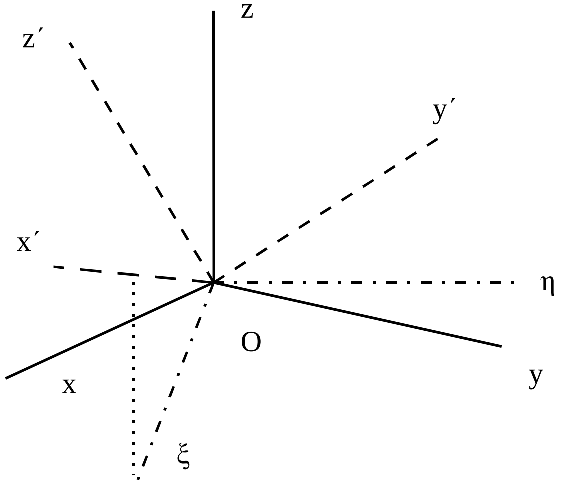
$$\left\{(\vec{j}' \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{j}' \cdot \vec{j})\vec{j} + (\vec{j}' \cdot \vec{k})\vec{k}\right\} \cdot \left\{(\vec{k}' \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{k}' \cdot \vec{j})\vec{j} + (\vec{k}' \cdot \vec{k})\vec{k}\right\} =$$
$$(\vec{j}' \cdot \vec{i})(\vec{k}' \cdot \vec{i}) + (\vec{j}' \cdot \vec{j})(\vec{k}' \cdot \vec{j}) + (\vec{j}' \cdot \vec{k})(\vec{k}' \cdot \vec{k}) = 0$$

που είναι η προς απόδειξη σχέση.

Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι ισχύει και η $C^TC = I$. Άρα είναι και $C^{-1} = C^T$.

Οι εννέα λοιπόν παράμετροι $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k$ δεν είναι ανεξάρτητοι. Συνδέονται με έξη σχέσεις. Απομένουν συνεπώς τρεις ανεξάρτητες παράμετροι, οι οποίες μπορούν να προσδιορίσουν τον προσανατολισμό ενός στερεού στον χώρο. Η θέσις του στερεού απαιτεί βέβαια έξη παραμέτρους για να προσδιοριστεί πλήρως, μια και θέλουμε τρεις παραμέτρους για την θέση του O΄, και τρεις ακόμα παραμέτρους για τον προσανατολισμό του στερεού. Τον ρόλο των τριών αυτών παραμέτρων, τον αναλαμβάνουν συνήθως, οι ***γωνίες του Euler***.

Το σύστημα Oxyz είναι δυνατόν να λάβει οιονδήποτε προσανατολισμό Ox΄y΄z΄, αν εκτελέσουμε τις παρακάτω τρεις περιστροφές: 1) Περιστροφή περί τον άξονα Oz κατά γωνία φ πάνω στο Oxy επίπεδο, οπότε, η νέα θέσις του συστήματος θα είναι η Oξηz. 2) Στη συνέχεια, περιστροφή περί τον άξονα ξ κατά γωνία θ πάνω στο επίπεδο Oxη, και τέλος, 3) Κατά γωνία ψ περί τον άξονα Oz΄ πάνω στο Oξη επίπεδο. Η τελική θέσις Ox΄y΄z΄ του συστήματος, προκύπτει από την σύνθεση των τριών προηγούμενων περιστροφών.



Όπως είδαμε, ο πίνακας της περιστροφής των σημείων του επιπέδου κατά γωνία φ είναι (βλέπε σελ. 39) ο:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Κατά την πρώτη αυτή περιστροφή είναι, λοιπόν, ξ = xcosφ–ysinφ

η = xsinφ+ycosφ

z = z. Άρα ο πίνακας της στροφής αυτής, είναι ο

$\Phi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Κατά την δεύτερη περιστροφή, έχουμε ότι,

$\xi = \xi$
$\eta' = \eta\cos\theta - z\sin\theta$
$z' = \eta\sin\theta + z\cos\theta$

με πίνακα του μετασχηματισμού τον $\Theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Για την τρίτη περιστροφή είναι,

$x' = \eta'\cos\psi - \xi'\sin\psi$
$y' = \eta'\sin\psi + \xi'\cos\psi$
$z' = z'$
με πίνακα του μετασχηματισμού τον $\Psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Η τελική θέση του στερεού, λαβαίνεται, αν εκτελέσουμε τον μετασχηματισμό ΦΘΨ πάνω σε όλα τα σημεία του.

9. Εξωτερικό γινόμενο. Εστω ένας διανυσματικός χώρος **V**(F), με dim**V** = n. Θεωρούμε το $\{(a, b)\in \mathbf{V}\times\mathbf{V} \mid a \neq \lambda b\}$. Το σύνολο αυτό αποτελείται από τα μη συγγραμμικά διανύσματα του **V**, λαμβανόμενα σε διατεταγμένα ζεύγη.

Ορισμός. Θα λέμε ότι το ζεύγος (a, b) είναι ισοδύναμο του (a_1, b_1) ανν (1)

$$a_1 = \kappa a + \lambda b \quad \text{και}$$
$$b_1 = \mu a + \nu b$$

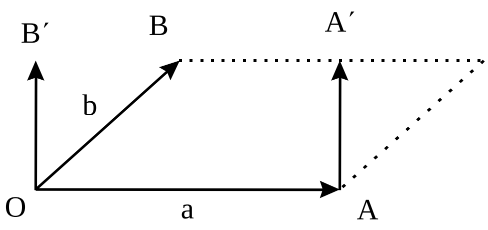
με ορίζουσα δ του πίνακα $\Delta = \begin{pmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix}$, $\delta = \kappa\nu - \lambda\mu = 1$.

Η σχέσις $(a, b) \approx (a_1, b_1)$ είναι μία σχέση ισοδυναμίας.
Πράγματι, αρκεί το προηγούμενο σύστημα να το γράψουμε στην μορφή:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Υπάρχει, τότε, από υπόθεση ο πίνακας Δ^{-1} και συνεπώς, το σύστημα λύεται ως προς a_1, b_1 a_1, b_1. Ισχύει συνεπώς ότι, αν $(a, b) \approx (a_1, b_1)$ τότε και $(a_1, b_1) \approx (a, b)$. Αν Δ = ο μοναδιαίος πίνακας, τότε είναι $(a, b) \approx (a, b)$. Τέλος, για την μεταβατική ιδιότητα έχουμε ότι, αν ισχύει και η $(a_2, b_2) \approx (a_1, b_1)$, τότε σίγουρα είναι και $(a_2, b_2) \approx (a, b)$, όπως προκύπτει αν εκτελέσουμε τον πολλαπλασιασμό των αντίστοιχων πινάκων Δ, και λάβουμε την ορίζουσα του γινομένου των, η οποία θα είναι το γινόμενο των αντ. οριζουσών, που είναι = 1.

ΠΆΡΑΤΗΡΗΣΗ 7. Αν θεωρήσουμε ότι, τα μη συγγραμμικά διανύσματα $a, b\in E$ ορίζουν τις πλευρές ενός παραλληλόγραμμου επι του επιπέδου που αυτά ορίζουν, τότε η κλάση των ισοδυνάμων προς το (a, b) ζευγών, αποτελείται από όλα τα παραλληλόγραμμα, που έχουν το ίδιο εμβαδόν.



Πράγματι, το τυχόν παραλληλόγραμμο που γράφεται με πλευρές τα διανύσματα a και b, έχει φανερά, το ίδιο εμβαδόν με εκείνο το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, που έχει την μία πλευρά του, έστω την a′ = a, και την άλλη, την

$$b' = \overrightarrow{AA'} = b + \lambda a \qquad (2).$$

Η ορίζουσα δ του συστήματος $a' = 1a + 0b$, $b' = \lambda a + 1b$ είναι η $\delta = 1$. Μία άλλη περίπτωση δύο παραλληλόγραμμων με το ίδιο εμβαδόν, είναι η $a' = \lambda a$ και $b' = \frac{1}{\lambda}b$. Και στην περίπτωση αυτή, $\delta = 1$.

Στην περίπτωση, που $(a, b) \in \mathbf{V}\times\mathbf{V}$, η συνθήκη (2) για να έχουμε την ισοδυναμία $(a', b') \approx (a, b)$ έπεται από το γεγονός ότι, το (1) είναι ισοδύναμο του

$$\nu a = \nu\kappa a_1 + \nu\lambda b_1$$
$$\lambda b = \lambda\mu a_1 + \lambda\nu b_1 \quad \text{απ' όπου και } \nu a - \lambda b = \delta a_1.$$

Λαβαίνουμε ως $a' = \nu a - \lambda b = \delta a_1 = a_1$. Ως b′ λαβαίνουμε το $\lambda a_1 + b_1$. Το b′ δεν πρέπει να είναι συγγραμμικό με το a′. Πράγματι, αν $\lambda a_1 + b_1 = \xi a'$ τότε και

$\lambda a_1 + b_1 = \xi(\nu a - \lambda b) = \xi(\nu\kappa a_1 + \nu\lambda b_1 - \lambda\mu a_1 - \lambda\nu b_1) = \xi(\nu\kappa - \lambda\mu)\, a_1 = \xi\delta a_1 = \xi a_1$, άτοπον.

Θεωρούμε, τώρα, το σύνολο πηλίκον $\Phi = \mathbf{V}\times\mathbf{V}/\approx$. Ένα στοιχείο του Φ, είναι εκείνη η τάξη ισοδυναμίας $\boldsymbol{a} \in \Phi$, που περιέχει τα ζεύγη $(a, b) \in \mathbf{V}\times\mathbf{V}$, που ορίζουν παραλληλόγραμμα, με το ίδιο εμβαδόν. Καλούν την $\boldsymbol{a}$ ***δυάνυσμα*** (bivector).

Γράφουμε και $\boldsymbol{a} = a \wedge b$ όπου $(a, b) \in \boldsymbol{a}$ και $\Phi = \mathbf{V}\wedge\mathbf{V}$.

Στο σύνολο Φ, επισυνάπτουμε και το μηδενικό bivector $\boldsymbol{o}$, που είναι η τάξη όλων των ζευγών της μορφής $(a, \lambda a)$. Είναι δηλαδή $(a, b) \in \boldsymbol{o}$, ανν $b = \lambda a$.

Ορισμός. Ορίζουμε το μονόμετρο γινόμενο λa από την ισότητα,

$$\lambda\boldsymbol{a} = \lambda a \wedge b = a \wedge \lambda b = \lambda(a \wedge b).$$

Θα λέμε ότι οι τάξεις $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{a}'$ είναι ανάλογες, ανν $\boldsymbol{a}' = \lambda\boldsymbol{a}$.

Το μονόμετρο γινόμενο, είναι καλά ορισμένο. Πράγματι, αν $(a', b') \in \boldsymbol{a}$, τότε είναι,

$$a' = \kappa a + \lambda b$$
$$b' = \mu a + \nu b, \text{ με } \delta = 1.$$

Άρα και $(\lambda a', b') = \lambda(a, b) = (a', \lambda b')$.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ισχύει ότι, $a \wedge b = -b \wedge a$.

Απόδειξη. Εχουμε να δείξουμε ότι, οι τάξεις που ορίζονται από τα ζεύγη (a,b) και (–b,a) ταυτίζονται. Προς τούτο, αρκεί να δείξουμε ότι έχουν ένα κοινό στοιχείο. Εστω, λοιπόν, το $(a_1, b_1) \in \boldsymbol{a}$. Τότε, η σχέση $(a,b) \in \boldsymbol{a}$, είναι ισοδύναμη με το σύστημα,

$a = \kappa a_1 + \lambda b_1$ και $b = \mu a_1 + \nu b_1$ με $\delta = \kappa\nu - \lambda\mu = 1$.

Άρα και, $(-b, a) \in \boldsymbol{a}$ μια και είναι, $-b = -\mu a_1 - \nu b_1$ και $a = \kappa a_1 + \lambda b_1$ με $\delta = -\mu\lambda + \nu\kappa = 1$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4. Αν $a' = \kappa a + \lambda b$, $b' = \mu a + \nu b$, με $\delta = \kappa\nu - \lambda\mu$, τότε είναι και $a' \wedge b' = \delta(a \wedge b)$.

Απόδειξη. Η τάξη ισοδυναμίας a′ που ορίζουν τα a′, b′, περιέχει όλα τα a_1, $b_1 \in \mathbf{V}$, για τα οποία ισχύει ότι, $a_1 = \kappa_1 a' + \lambda_1 b'$

$b_1 = \mu_1 a' + \nu_1 b'$, με $\delta_1 = 1$. Άρα και

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & \lambda_1 \\ \mu_1 & \nu_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & \lambda_1 \\ \mu_1 & \nu_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \delta_1 \delta(a \wedge b) = \delta(a \wedge b).$$

ΠΆΡΑΤΗΡΗΣΗ 8. Η προηγούμενη πρόταση, ουσιαστικά μας λεει ότι, το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΒΟΑ (βλέπε προηγούμενο σχήμα) είναι συγκρίσιμο με το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου Β΄ΟΑ΄. Τα παραλληλόγραμμα αυτά, πρέπει βέβαια, να βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

Ορισμός. Θα λέμε ότι, το διάνυσμα e είναι ***παράλληλο*** προς το bivector $\mathcal{a}$ = a $\wedge$b, και θα γράφουμε e | | $\mathcal{a}$, ανν e = κa+λb.

Αν $\mathcal{a}$ = $\mathcal{o}$, τότε εξ ορισμού, e | | $\mathcal{o}$ για κάθε e∈**V**.

ΠΆΡΑΤΗΡΗΣΗ 9. α) Αν e | | a $\wedge$b, τότε και e | | a΄ $\wedge$b΄, όπου (a΄, b΄)∈a = a $\wedge$b.
β) Το μηδενικό διάνυσμα, είναι παράλληλο προς κάθε bivector.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5. Αν e | | $\mathcal{a}$, e ≠ 0, τότε ∃ a΄∈**V**, τέτοιο ώστε, (e, a΄)∈$\mathcal{a}$.

Απόδειξη. Εστω ότι, $\mathcal{a}$ = a $\wedge$b. Θα πρέπει να βρούμε ένα a΄ έτσι ώστε,

e = κa+λb και

a΄ = κ΄a+λ΄b με δ = 1.

Όμως, το e από υπόθεση ισούται με κa+λb. Αρκεί να διαλέξουμε, λοιπόν, τους κ΄, λ΄∈ℝ, έτσι ώστε κλ΄−κ΄λ = 1. Αν a = 0 αρκεί να λάβουμε a΄ = λe.

Υποθέτουμε, τώρα, ότι dim**V** ≤ 3.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6. Για κάθε δύο bivectors $\mathcal{a}$, $\mathcal{b}$∈Φ, ∃e∈**V**, τέτοιο ώστε, e | | $\mathcal{a}$ και e | | $\mathcal{b}$.

Απόδειξη. Εστω $\mathcal{a}$ = a $\wedge$b, $\mathcal{b}$ = $a_1 \wedge b_1$. Το e θα πρέπει να είναι ένα διάνυσμα γραμμικά εξαρτημένο από τα a, b και από τα a_1, b_1. Ο **V** έχει dim**V** = 3. Άρα το {a, b, a_1, b_1} είναι γραμμικά εξαρτημένο. α) Ένα από τα bivectors είναι το μηδενικό bivector. Τότε εξ ορισμού, κάθε e∈**V** είναι παράλληλο προς αυτό. Αρκεί λοιπόν να λάβουμε ως e μια γραμμική έκφραση των δύο άλλων. β) Αν δεν έχουμε μηδενικό bivector. Το {a, b, a_1, b_1} είναι ένα γραμμικά εξαρτημένο σύνολο. Άρα ισχύει ότι, κa+λb+$\kappa_1 a_1+\lambda_1 b_1$ = 0, ή κa+λb = −($\kappa_1 a_1+\lambda_1 b_1$).
Αρκεί συνεπώς να λάβουμε, e = κa+λb = −($\kappa_1 a_1 + \lambda_1 b_1$). Στην περίπτωση αυτή, είναι και e ≠ 0, μια και τα {a, b}, {a_1, b_1} είναι γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα.

ΠΆΡΑΤΗΡΗΣΗ 10. Για κάθε δύο bivectors $\mathcal{a}$, $\mathcal{b}$ ∈Φ, ∃e∈**V**, με e | | $\mathcal{a}$ και e | | $\mathcal{b}$, τέτοιο ώστε, $\mathcal{a}$ = e $\wedge$a΄ και $\mathcal{b}$ = e $\wedge$b΄. Αρκεί να λάβουμε το e | | $\mathcal{a}$ και e | | $\mathcal{b}$ οπότε, σύμφωνα με την πρόταση 5, υπάρχουν τα a΄ και b΄∈**V**, έτσι ώστε να ισχύει η παρατήρηση μας.

Ορισμός. Για να ορίσουμε το άθροισμα δύο bivectors $\mathcal{a}$ και $\mathcal{b}$ τα θέτουμε αυτά υπό την μορφή $\mathcal{a}$ = e $\wedge$a΄ και $\mathcal{b}$ = e $\wedge$b΄, οπότε $\mathcal{a} + \mathcal{b}$ = e $\wedge$($\mathcal{a}$ ΄+ $\mathcal{b}$ ΄).

Η πρόσθεση αυτή, αποδεικνύεται ότι είναι καλά ορισμένη.
Την απεικόνιση που ορίζεται από την σχέση **V**×**V**∋ (a, b) → a $\wedge$b∈Φ, καλούμε ***εξωτερικό γινόμενο*** των διανυσμάτων a και b. Καταχρηστικά, ***εξωτερικό γινόμενο***, καλούμε και την εικόνα a $\wedge$b του ζεύγους (a, b).

Το εξωτερικό γινόμενο, (για dim**V** = 3), έχει όπως δείξαμε τις ιδιότητες:
1) e $\wedge$(a+b) = e $\wedge$a + e $\wedge$b. (Επιμερισμός ως προς την πρόσθεση).

2) $\lambda(a \wedge b) = \lambda a \wedge b = a \wedge \lambda b$. (Ομογένεια).
3) $a \wedge b = -b \wedge a$. (Αντισυμμετρία).
4) $a \wedge b = 0$ ανν τα a, b γραμμικώς εξαρτημένα.

ΘΕΩΡΗΜΑ. Η δομή (Φ, +, ·) είναι δομή διανυσματικού χώρου.
Απόδειξη. Η μοναδική ιδιότης που δεν είναι προφανής και θέλει απόδειξη είναι ο προσεταιρισμός για την πρόσθεση, $\mathcal{a} + (\mathcal{b} + \mathcal{c}) = (\mathcal{a} + \mathcal{b}) + \mathcal{c}$, όταν δεν έχουμε μηδενικά bivectors.

Γράφουμε, $a = e \wedge a$ και $b = e \wedge b$, $e \neq 0$. α) Το $e \,||\, \mathcal{c}$. Στην περίπτωση αυτή είναι $(a + b) = e \wedge (a+b)$ και, από την πρόταση 5, $(e, c) \in \mathcal{c}$.

Άρα, $(a + b) + c = e \wedge (a+b) + e \wedge c = e \wedge (a+b+c) = e \wedge a + e \wedge (b+c) = a + (b + c)$.

β) Το e δεν είναι παράλληλο του $\mathcal{c}$. Εστω $\mathcal{c} = c \wedge c_1$. Το $\{e, c, c_1\}$ είναι τότε σύνολο γραμμικά ανεξάρτητο. Μπορούμε συνεπώς, να το χρησιμοποιήσουμε ως βάση για τον **V**.

Εχουμε, λοιπόν, $a = \kappa e + \lambda c + \mu c_1$, και $b = \nu e + \rho c + \xi c_1$.

$$
\begin{aligned}
\text{Άρα, } (a + b) + c &= \{e \wedge (\kappa e+\lambda c+\mu c_1) + e \wedge (\nu e+\rho c+\xi c_1)\} + c \wedge c_1 \\
&= e \wedge (\kappa e+\lambda c+\mu c_1+\nu e+\rho c+\xi c_1) + c \wedge c_1 \\
&= e \wedge \{(\kappa+\nu)e+(\lambda+\rho)c+(\mu+\xi)c_1\} + c \wedge c_1 \\
&= e \wedge (\lambda+\rho)c + e \wedge (\mu+\xi)c_1 + c \wedge c_1 .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Επίσης, } a + (b + c) &= e \wedge (\kappa e+\lambda c+\mu c_1) + \{e \wedge (\nu e+\rho c+\xi c_1) + c \wedge c_1\} \\
&= e \wedge \lambda c + e \wedge \mu c_1 + e \wedge \rho c + e \wedge \xi c_1 + c \wedge c_1 \\
&= e \wedge \lambda c + e \wedge \rho c + e \wedge \mu c_1 + e \wedge \xi c_1 + c \wedge c_1 \\
&= e \wedge (\lambda+\rho)c + e \wedge (\mu+\xi)c_1 + c \wedge c_1 .
\end{aligned}
$$

Ας υπολογίσουμε, τώρα, την διάσταση του γραμμικού χώρου **V**∧**V**.
1) Περίπτωση, που dim**V** = 1. Στην περίπτωση αυτή, ο **V**∧**V** περιέχει τα ζεύγη (a, b), για τα οποία ισχύει πάντα η $b = \kappa a$. Ο **V**∧**V** περιέχει λοιπόν, μόνον, το μηδενικό bivector. Είναι συνεπώς, dim(**V**∧**V**) = 0.
2) Περίπτωση, που dim**V** = 2. Στην περίπτωση αυτή, ο **V**∧**V** περιέχει τα ζεύγη (a, b), για τα οποία ισχύει είτε ότι $b = \kappa a$, είτε ότι το {a, b} είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Αν e_1, e_2 μία βάση του **V**, τότε, για το τυχόν (a, b)∈ **V**∧**V** ισχύει ότι,

$$a \wedge b = \delta(e_1 \wedge e_2) \text{ με } \delta = \kappa\nu - \lambda\mu. \text{ (Βλέπε, πρόταση 4).}$$

Είναι, λοιπόν, dim(**V**∧**V**) = 1. Το γεγονός αυτό, στην γεωμετρική γλώσσα σημαίνει ότι, όλα τα παραλληλόγραμμα του επιπέδου, είναι συγκρίσιμα. Αν συνεπώς λάβουμε το $e_1 \wedge e_2$ ως μονάδα σύγκρισης, το δ είναι το μέτρον συγκρίσεώς των. Το |δ| το καλούμε εμβαδόν του παραλληλόγραμμου, που σχηματίζεται με πλευρές τα μη παράλληλα διανύσματα a και b. Ισοδύναμα είναι εκείνα τα παραλληλόγραμμα του επιπέδου, που έχουν το ίδιο εμβαδόν. Στην περίπτωση του $\mathbb{R}^2$ με βάση την κανονική, $\vec{e}_1 = (1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1)$, έχουμε ότι,

$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ και, όμοια, $\vec{b} = \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_3, y_2 - y_3)$

Είναι λοιπόν, $\kappa = (x_2 - x_1)$, $\lambda = (y_2 - y_1)$, $\mu = (x_3 - x_1)$, $\nu = (y_3 - y_1)$ και

$$\delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}. \text{ (Βλέπε και σελ. 60).}$$

3) Περίπτωση, που dim**V** = 3. Εστω $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ μία βάση του **V**. Είναι τότε,
$\vec{a} = \kappa_1\vec{e}_1 + \kappa_2\vec{e}_2 + \kappa_3\vec{e}_3$ και $\vec{b} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3$. Άρα και,

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (\kappa_2\lambda_3 - \kappa_3\lambda_2)(\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3) + (\kappa_3\lambda_1 - \kappa_1\lambda_3)(\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1) + (\kappa_1\lambda_2 - \kappa_2\lambda_1)(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2).$$

Γράφουμε και: $\boldsymbol{i} = \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3$, $\boldsymbol{j} = \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1$, $\boldsymbol{k} = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$ οπότε και

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix} \qquad (3).$$

Θα δείξουμε, τώρα, ότι τα $\boldsymbol{i} = \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3$, $\boldsymbol{j} = \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1$, $\boldsymbol{k} = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$ αποτελούν βάση του γραμμικού χώρου $\mathbf{V}\wedge\mathbf{V}$, δηλαδή ότι, $\dim(\mathbf{V}\wedge\mathbf{V}) = 3$.

α) Το ότι τα $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ παράγουν τον χώρο, έπεται από την προηγούμενη ισότητα (3). β) Για την γραμμική ανεξαρτησία του συνόλου $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ θεωρούμε την σχέση, $\kappa\boldsymbol{i}+\lambda\boldsymbol{j}+\mu\boldsymbol{k} = \boldsymbol{o}$ (4), και θα δείξουμε ότι αυτή ισχύει μόνον για $\kappa = \lambda = \mu = 0$. Πράγματι, αν είχαμε έστω τον $\kappa \neq 0$, τότε θα είχαμε ότι τα διανύσματα

$$\vec{a} = -\lambda\vec{e}_1+\kappa\vec{e}_2, \text{ και } \vec{b} = -\mu\vec{e}_1+\kappa\vec{e}_3$$

θα ήταν γραμμικά ανεξάρτητα, μια και αν για $\nu \neq 0$, $\xi \neq 0$,

$$\nu\vec{a}+\xi\vec{b} = -\nu\vec{e}_1+\nu\kappa\vec{e}_2-\xi\mu\vec{e}_1+\xi\kappa\vec{e}_3 = -(\lambda\nu+\xi\mu)\vec{e}_1+\kappa\nu\vec{e}_2+\kappa\xi\vec{e}_3 = 0,$$

οπότε και $\kappa = 0$, αντίθετα με την υπόθεσή μας. Το γεγονός ότι, τα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, σημαίνει ότι, $\vec{a}\wedge\vec{b} \neq \boldsymbol{o}$. Είναι όμως,

$$\vec{a}\wedge\vec{b} = (-\lambda\vec{e}_1+\kappa\vec{e}_2)\wedge(-\mu\vec{e}_1+\kappa\vec{e}_3) = -\lambda\kappa\vec{e}_1\wedge\vec{e}_3-\kappa\mu\vec{e}_2\wedge\vec{e}_1+\kappa^2\,\vec{e}_2\wedge\vec{e}_3$$

$$= \kappa\{\mu(\vec{e}_1\wedge\vec{e}_2)+\kappa(\vec{e}_2\wedge\vec{e}_3)+\lambda(\vec{e}_3\wedge\vec{e}_1)\} = \boldsymbol{o} \text{ (λόγω της (4))}.$$

Η ισότης αυτή όμως, έρχεται σε αντίφαση με την $\vec{a}\wedge\vec{b} \neq \boldsymbol{o}$. Άρα κακώς υποθέσαμε ότι $\kappa \neq 0$. Άρα $\kappa = 0$, οπότε και $\mu(\vec{e}_1\wedge\vec{e}_2)+\lambda(\vec{e}_3\wedge\vec{e}_1) = \boldsymbol{o}$, ή $\vec{e}_1\wedge(\mu\vec{e}_2-\lambda\vec{e}_3) = \boldsymbol{o}$, δηλαδή $(\mu\vec{e}_2-\lambda\vec{e}_3) = \rho\vec{e}_1$, σχέση που ισχύει μόνο για $\mu = \lambda = \rho = 0$.

Δείξαμε λοιπόν ότι $\dim(\mathbf{V}\wedge\mathbf{V}) = 3$, όταν $\dim\mathbf{V} = 3$. Οι χώροι συνεπώς αυτοί, είναι ισόμορφοι. Λόγω του ισομορφισμού αυτού, ταυτίζουμε τα $\vec{i}$, $\vec{j}$ και $\vec{k}$, αντιστοίχως, με τα $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Γράφουμε επίσης $\times$ αντι του $\wedge$.

Θεωρούμε τώρα, το τυχόν $\overrightarrow{AX} \in \mathbb{R}^3$, και το $\vec{a}\times\vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Το $\overrightarrow{AX}$ είναι παράλληλο προς το $\vec{a}\times\vec{b}$ ανν $\overrightarrow{AX} = \alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$. Η σχέση αυτή, ορίζει βέβαια, το σύνολο των σημείων X του χώρου, που βρίσκονται πάνω στο επίπεδο, που ορίζουν τα $\vec{a}$ και $\vec{b}$. (Βλέπε σελ. 66).

Ο προηγούμενος ισομορφισμός, επιβάλει τις ισότητες:

1) $\vec{i}\times\vec{j} = -\vec{j}\times\vec{i} = \vec{k}$ $\qquad \vec{i}\times\vec{i} = 0$

2) $\vec{j}\times\vec{k} = -\vec{k}\times\vec{j} = \vec{i}$ $\qquad \vec{j}\times\vec{j} = 0$

3) $\vec{k}\times\vec{i} = -\vec{i}\times\vec{k} = \vec{j}$ $\qquad \vec{k}\times\vec{k} = 0$

Αν εκφράσουμε τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ στο σύστημα $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$,

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{i}+\alpha_2\vec{j}+\alpha_3\vec{k} \quad \text{και} \quad \vec{b} = \beta_1\vec{i}+\beta_2\vec{j}+\beta_3\vec{k}$$

τότε και

$$\vec{a}\times\vec{b} = (\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)\vec{i}+(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)\vec{j}+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\vec{k}\ .$$

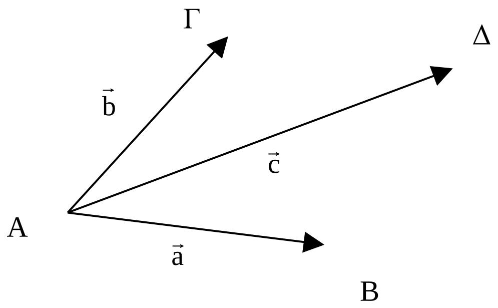
Γράφουμε και

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \text{ . (Βλέπε και (3)).}$$

Παρατηρούμε ότι, ο συντελεστής $\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2$ του $\vec{i}$, εκφράζει το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές ΟΑ΄ και ΟΒ΄, που κείται στο ($\vec{j}$, $\vec{k}$) επίπεδο, και έχει Α = $(0, \alpha_2, \alpha_3)$, Β = $(0, \beta_2, \beta_3)$. Ανάλογα και για τους άλλους δύο συντελεστές. Το μέτρο του $\vec{a}\times\vec{b}$ ισούται με το εμβαδόν του πΆραλληλογράμμου, που σχηματίζεται πάνω στις μη παράλληλες πλευρές $\vec{a}$ και $\vec{b}$ και η φορά του λαβαίνεται έτσι ώστε το σύστημα $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ να είναι δεξιόστροφο. Εχουμε λοιπόν, και ότι $\vec{a}\times\vec{b}$ = $|\vec{a}\times\vec{b}|\vec{e}$ = $\alpha\beta\sin(\vec{a},\vec{b})\vec{e}$, όπου α = $|\vec{a}|$, β = $|\vec{b}|$ και $\vec{e}$ μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο των $\vec{a}$ και $\vec{b}$.

10. Εφαρμογές εσωτερικού και εξωτερικού γινομένου. Περιοριζόμαστε στον χώρο Ε με το Οxyz σύστημα αναφοράς, που αποτελείται από το σημείο Ο και την βάση { $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ }.

1. Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Είναι $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$. Εχουμε, τώρα, ότι:



$$\vec{c}^{\,2} = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$$
$$= \alpha^2+2\alpha\beta\cos(\vec{a},\vec{b})+\beta^2.$$

Όμοια,

$$d^2 = (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$$
$$= \alpha^2-2\alpha\beta\cos(\vec{a},\vec{b})+\beta^2.$$

Οι σχέσεις αυτές, δίδουν το μήκος της τρίτης πλευράς τριγώνου, όταν οι δύο άλλες πλευρές περικλείουν οξεία, ή αμβλεία γωνία αντίστοιχα.

2. Η προβολή S΄ του εμβαδού S = $|\vec{a}\times\vec{b}|$ πάνω σε ένα επίπεδο, ισούται με S΄ = $\pm(\vec{n}\cdot\vec{n}')$S όπου $\vec{n}$ και $\vec{n}'$ αντίστοιχα, μοναδιαία κάθετα διανύσματα επί των επιπέδων των S και S΄.

3. Ισχύει ότι, $\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}$ = $\vec{b}\cdot\vec{c}\times\vec{a}$ = $\vec{c}\cdot\vec{a}\times\vec{a}$. Γράφουμε και $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$ = $\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}$ (τριπλό γινόμενο).

Αν $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, i = 1, 2, 3, οι συντεταγμένες των $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ σε οιαδήποτε βάση { $\vec{l}$, $\vec{m}$, $\vec{n}$ }, ισχύει τότε ότι,

$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = \begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}[\vec{l}\ \vec{m}\ \vec{n}]$$

4. Εν γένει είναι $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \neq (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$. Το $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ είναι ένα διάνυσμα κάθετο προς αμφότερα τα $\vec{a}$ και $\vec{b}\times\vec{c}$. Είναι συνεπώς παράλληλο προς το επίπεδο των $\vec{b}$ και $\vec{c}$.

Ισχύει συνεπώς ότι, $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$.

Αν στο Οxyz σύστημα έχουμε $\vec{a} = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\vec{b} = (\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ και $\vec{c} = (\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$, τότε,

$$\begin{aligned}\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) =& [\alpha_2(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)-\alpha_3(\beta_3\gamma_1-\beta_1\gamma_3)]\vec{i}\\ &+[\alpha_3(\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2)-\alpha_1(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)]\vec{j}\\ &+[\alpha_1(\beta_3\gamma_1-\beta_1\gamma_3)-\alpha_2(\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2)]\vec{k} = (\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{a})\vec{c}\end{aligned}$$

5. Εστω a_i τρία μη συνεπίπεδα διανύσματα. Ορίζουμε τα a^i ως εξής:

$$a^1 = \frac{a_2\times a_3}{[a_1a_2a_3]},\quad a^2 = \frac{a_3\times a_1}{[a_1a_2a_3]},\quad a^3 = \frac{a_1\times a_2}{[a_1a_2a_3]}.$$

Τα a^i είναι και αυτά μη συνεπίπεδα, και συνεπώς, αποτελούν βάση για τον Ε. Το σύστημα αναφοράς (O, a^1, a^2, a^3) καλείται ***αντίστροφο σύστημα*** του συστήματος (O, a_1, a_2, a_3).

Ισχύουν οι σχέσεις: $\quad a_i \cdot a^k = \delta_i^k \quad (1)$

όπου δ_i^k το δ του Kronecker: $\delta_i^k = 0$ για $i \neq j$, $\delta_i^k = 1$ για $i = j$.

Τα a_i εκφράζονται συναρτήσει των a^i από τις σχέσεις:

$$a_1 = \frac{a^2 \times a^3}{[a^1 a^2 a^3]}, \quad a_2 = \frac{a^3 \times a^1}{[a^1 a^2 a^3]} \quad a_3 = \frac{a^1 \times a^2}{[a^1 a^2 a^3]}\ .$$

Το $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, έχει ως αντίστροφο σύστημα και πάλι το $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Το τριπλό γινόμενο των διανυσμάτων a_i συνδέεται με το τριπλό γινόμενο των διανυσμάτων a^i με την σχέση: $[a_1 a_2 a_3][a^1 a^2 a^3] = 1$

Αν μέσα στον Ε έχουμε και τα δύο αυτά αντίστροφα συστήματα, το τυχόν $v \in E$ θα έχει τις εκφράσεις, $v = v^1 a_1 + v^2 a_2 + v^3 a_3$ και $v = v_1 a^1 + v_2 a^2 + v_3 a^3$. Οι συντελεστές ν υπολογίζονται ως εξής: $v \cdot a^i = v^i$ και $v \cdot a_i = v_i$. Μπορούμε συνεπώς, να γράφουμε,

$$v = \sum_{i=1}^{3} (a^i \cdot v) a_i \quad \text{και} \quad v = \sum_{i=1}^{3} (a_i \cdot v) a^i\ .$$

Συνήθως γράφουμε, $v = (a^i \cdot v) a_i$ ή $v = (a_i \cdot v) a^i$, όπου, ο επαναλαμβανόμενος δείκτης i νοείται ότι αθροίζεται.

Ασκήσεις. 1) Αν $\vec{r}$ και $\vec{q}$ οι διανυσματικές ακτίνες των σημείων R και Q αντίστοιχα, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Q, για τα οποία ισχύει ότι

$$\vec{r} \cdot \vec{q} = \kappa^2 \quad (\kappa \text{ και } \vec{r} \text{ σταθερά}).$$

2) Να δείξετε ότι, $[\vec{a} \times \vec{b}\ \ \vec{b} \times \vec{c}\ \ \vec{c} \times \vec{a}] = [\vec{a}\ \ \vec{b}\ \ \vec{c}]^2$

3) Αν Α, Β, Γ, Δ οι κορυφές τετραέδρου, και

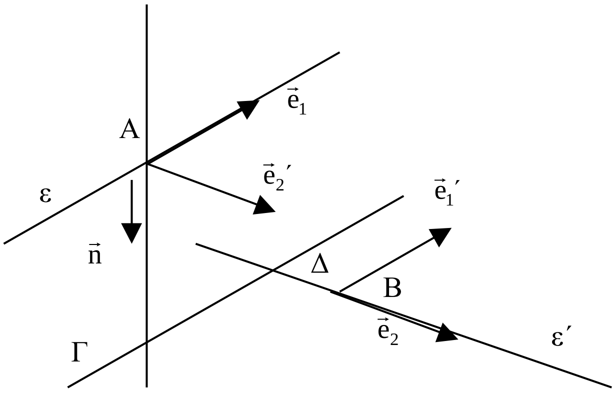
$$\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$$
$$\vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$$
$$\vec{c} = x_3 \vec{i} + y_3 \vec{j} + z_3 \vec{k}$$
$$\vec{d} = x_4 \vec{i} + y_4 \vec{j} + z_4 \vec{k}$$

οι διανυσματικές ακτίνες των Α, Β, Γ, Δ αντίστοιχα, να δείξετε ότι, ο όγκος V του τετραέδρου ισούται με

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}.$$

4) Να δείξετε ότι, $a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0$.

5) Εστω ότι δίδονται οι στρεβλές ευθείες ε και ε΄ του χώρου $\mathbb{R}^3$, όπως στο παραπλεύρως σχήμα.



Για να βρούμε την ευθεία ΑΔ, πάνω στην οποία μετράμε την απόσταση d των δύο αυτών ευθειών, σκεπτόμεθα ως εξής: Θεωρούμε τις διευθύνσεις $\vec{e}_1$ και $\vec{e}_2$ αυτών. Τα $\vec{e}_1$ και $\vec{e}_2$ ορίζουν την θέση δύο παράλληλων επιπέδων, π_1,π_2, του ενός διερχομένου εκ του σημείου Α και περιέχον την ευθεία ε, του άλλου διερχομένου εκ του σημείου Β και περιέχον την ευθεία ε΄. Η εκ του Α κοινή κάθετος των επιπέδων αυτών, έχει διεύθυνση $\vec{n}=\vec{e}_1\times\vec{e}_2$, και τέμνει το π_2 στο σημείο Γ. Από το Γ φέρουμε ευθεία με διεύθυνση $\vec{e}_1$. Αυτή τέμνει την ε΄ στο σημείο Δ. Τα σημεία Α και Δ ορίζουν την θέση της ζητουμένης ευθείας.

Να δείξετε ότι, αν $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ και $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, $\vec{e}_1=(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3)$ και $\vec{e}_2=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$, τότε είναι και,

$$d=\frac{1}{|\vec{n}|}\begin{vmatrix}\beta_1-\alpha_1 & \beta_2-\alpha_2 & \beta_3-\alpha_3\\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\end{vmatrix}=\text{προβολή του } \overrightarrow{AB} \text{ στο επίπεδο Α,Γ,Δ.}$$

11. Καμπύλες στο επίπεδο. Όταν αναφερόμεθα σε μία καμπύλη του Καρτεσιανού Οxy επιπέδου, νοούμε ένα σύνολο σημείων (x,y) του επιπέδου, που πληρούν μιά καθορισμένη ιδιότητα, η οποία εκφράζεται είτε μέσω των παραμετρικών εξισώσεων $x=x(t),\ \ y=y(t)$, είτε (μετά από απαλοιφή της παραμέτρου t) από την "καρτεσιανή" εξίσωση $F(x,y)=0$ ή στην "λυμένη" της μορφή, $y=f(x)$. Η καμπύλη $y=f(x)$ καλείται ***λεία,*** ανν υπάρχει η παράγωγος $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=dy/dx$. Στην περίπτωση αυτή, $f'(x_0)$, είναι η κλίση της ευθείας που ορίζεται από τα σημεία (x,y) και (x_0,y_0) της καμπύλης, στο όριο, όταν το $(x,y)\to(x_0,y_0)$. Η εξίσωση της ευθείας, που περνά από το σημείο (x_0,y_0) και έχει κλίση $f'(x_0)$, είναι η $\dfrac{Y-y_0}{X-x_0}=f'(x_0)$, όπου (X,Y) το τυχόν σημείο της ευθείας, που είναι και η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο (x_0,y_0).

Η αναπαράσταση ενός σημείου Χ του επιπέδου, μπορεί να γίνει και μέσω των ***πολικών συντεταγμένων*** ρ και θ, όπου ρ η απόσταση του σημείου από την αρχή του συστήματος αναφοράς, και θ η κλίση της ευθείας ΟΧ. Οι σχέσεις που συνδέουν της καρτεσιανές συντεταγμένες με τις πολικές είναι οι, $x=\rho\cos\theta$ και $y=\rho\sin\theta$ (1). **Προσοχή,** λόγω της περιοδηκότητος των συναρτήσεων cos και sin, το σύστημα (1), δεν ορίζει μετασχηματισμό $(\rho,2k\pi\theta)\to(x,y)$ ένα προς ένα. Για τον λόγο αυτό, αν θέλουμε να λάβουμε τον μετασχηματισμό $(x,y)\to(\rho,\theta)$, θα πρέπει πάντα να προσέχουμε τις τιμές της γωνίας θ. Είναι βέβαια, $\rho=+\sqrt{x^2+y^2}$ και $\theta=\arctan\dfrac{y}{x}$. Πολικές συντεταγμένες χρησιμοποιούμε, όταν θέλουμε να εκμεταλλευτούμε την κεντρική συμμετρία του σχήματος.

12. Η απλούστερη έκφραση, που μπορεί να λάβει η F, είναι η πολυωνυμική και απ' αυτήν, αυτή του πρωτοβαθμίου πολυωνύμου ως προς x και y. Με την περίπτωση αυτή ασχοληθήκαμε στις προηγούμενες παραγράφους. Θα εξετάσουμε, τώρα, την περίπτωση που

η F είναι ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς x και y. **Συμβολισμός.** Το τυχόν σημείο (x, y) του καρτεσιανού επιπέδου, θα το συμβολίζουμε (x_1, x_2).
Θεωρούμε, λοιπόν, την "τετραγωνική" μορφή:

$$\alpha(x_1, x_2) = \alpha_{11}x_1^2 + 2\alpha_{12}x_1x_2 + \alpha_{22}x_2^2 + 2\alpha_{13}x_1 + 2\alpha_{23}x_2 + \alpha_{33} = 0. \quad (1)$$

Σ' αυτήν διακρίνουμε ένα ομογενές και συμμετρικό δευτεροβάθμιο τμήμα, που είναι το $\alpha_{11}x_1^2 + 2\alpha_{12}x_1x_2 + \alpha_{22}x_2^2$, και ένα πρωτοβάθμιο τμήμα, το $2\alpha_{13}x_1 + 2\alpha_{23}x_2$. Με μία παράλληλη μεταφορά των αξόνων Ox_1, Ox_2 στην θέση (k_1, k_2) είναι δυνατόν, αφού προσδιορίσουμε κατάλληλα το ***κέντρο*** $K = (k_1, k_2)$, να μηδενίσουμε το πρωτοβάθμιο τμήμα της $\alpha(x_1, x_2)$. Πράγματι, αν εκτελέσουμε την παράλληλη μεταφορά

$$x_1 = y_1 + k_1$$
$$x_2 = y_2 + k_2$$

η (1), μετά από μερικές πράξεις, μετασχηματίζεται στην

$$\alpha(y_1, y_2) = \alpha_{11}y_1^2 + 2\alpha_{12}y_1y_2 + \alpha_{22}y_2^2 + (\alpha_{11}k_1 + \alpha_{12}k_2 + \alpha_{13})y_1 + (\alpha_{21}k_1 + \alpha_{22}k_2 + \alpha_{23})y_2 + \Delta/\delta = 0$$

με $\delta = \det\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$, $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ και $\Delta = \det\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$, $\alpha_{13} = \alpha_{31}$, $\alpha_{23} = \alpha_{32}$.

Παρατήρηση. Οι πίνακες δ και Δ είναι συμμετρικοί. Αν $\Delta = 0$, η $\alpha(y_1, y_2) = 0$ παριστάνει, όπως είδαμε, ζεύγος ευθειών.
Η λύση του συστήματος, όταν είναι $\delta \neq 0$,

$$\alpha_{11}k_1 + \alpha_{12}k_2 + \alpha_{13} = 0$$
$$\alpha_{21}k_1 + \alpha_{22}k_2 + \alpha_{23} = 0$$

που είναι η $k_1 = \dfrac{\alpha_{13}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{23}}{\delta}$, $k_2 = \dfrac{\alpha_{13}\alpha_{21} - \alpha_{11}\alpha_{23}}{\delta}$.
Την περίπτωση $\delta = 0$, θα την αναλύσουμε παρακάτω.
Μετά τον προσδιορισμό του κέντρου K, η $\alpha(x_1, x_2)$ έχει λάβει την μορφή

$$\alpha(y_1, y_2) = \alpha_{11}y_1^2 + 2\alpha_{12}y_1y_2 + \alpha_{22}y_2^2 + \Delta/\delta = 0.$$

Θα την μετατρέψουμε, αφού στρέψουμε τους άξονες Oy_1, Oy_2 κατά γωνία θ και λάβουν αυτοί την θέση Oz_1, Oz_2, στην ***κανονική της έκφραση,*** $\lambda_1z_1^2 + \lambda_2z_2^2 + \Delta/\delta = 0$.
Η στροφή που θα εκτελέσουμε δίδεται, όπως είδαμε παραπάνω στην ενότητα "Πίνακες", Παράδειγμα 1, δίδεται από το σύστημα

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1\cos\theta + y_2\sin\theta \\ z_2 &= -y_2\sin\theta + y_2\cos\theta \end{aligned}$$ το οποίο το γράφουμε και ως εξής: $$\begin{aligned} z_1 &= l_1y_1 + m_1y_2 \\ z_2 &= l_2y_2 + m_2y_2 \end{aligned} \quad (2)$$

με αντίστροφο το σύστημα $\begin{aligned} y_1 &= l_1z_1 + l_2z_2 \\ y_2 &= m_1z_2 + m_2z_2 \end{aligned}$, όπου, $m_1/l_1 = \tan\theta = -m_2/l_2$ η κλίση του άξονα Oz_1 (αντ. Oz_2) ως προς τον άξονα Oy_1 (αντ. Oy_2).
Η (2) γράφεται, $\alpha_{11}y_1y_1 + \alpha_{12}y_1y_2 + \alpha_{21}y_2y_1 + \alpha_{22}y_2y_2 + \Delta/\delta$ και θέλουμε να λάβει αυτή την μορφή $\lambda_1z_1^2 + \lambda_2z_2^2 = \lambda_1z_1z_1 + \lambda_2z_2z_2$ Θέλουμε, λοιπόν, να έχουμε εκ ταυτότητος, την ισότητα:

$$\alpha_{11}y_1(l_1z_1 + l_2z_2) + \alpha_{12}y_1(m_1z_1 + m_2z_2) + \alpha_{21}y_2(l_1z_1 + l_2z_2) + \alpha_{22}y_2(m_1z_1 + m_2z_2) + \Delta/\delta$$
$$= \lambda_1z_1(l_1y_1 + m_1y_2) + \lambda_2z_2(l_2y_1 + m_2y_2),$$

η οποία γράφεται και,

$$(\alpha_{11}l_1 + \alpha_{12}m_1)y_1z_1 + (\alpha_{11}l_2 + \alpha_{12}m_2)y_1z_2 + (\alpha_{21}l_1 + \alpha_{22}m_1)y_2z_1 + (\alpha_{21}l_2 + \alpha_{22}m_2)y_2z_2 + \Delta/\delta$$
$$= \lambda_1l_1z_1y_1 + \lambda_1m_1z_1y_2 + \lambda_2l_2z_2y_1 + \lambda_2m_2z_2y_2$$

Η προηγούμενη ισότητα γίνεται ταυτότητα, όταν τα παρακάτω συστήματα έχουν λύση.

$$\begin{matrix} \alpha_{11}l_1+\alpha_{12}m_1=\lambda_1 l_1 \\ \alpha_{21}l_1+\alpha_{22}m_1=\lambda_1 m_1 \end{matrix} \quad \text{και} \quad \begin{matrix} \alpha_{11}l_2+\alpha_{12}m_2=\lambda_2 l_2 \\ \alpha_{21}l_2+\alpha_{22}m_2=\lambda_2 m_m \end{matrix} \qquad (3)$$

Οι τιμές των λ_1, λ_2 προσδιορίζονται από την συνθήκη που επιβάλει στα παραπάνω συστήματα να έχουν λύση διαφορετική της μηδενικής. Η συνθήκη αυτή είναι η

$$\det\begin{pmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda \end{pmatrix}=0$$

Οι ζητούμενες τιμές των λ προσδιορίζονται, συνεπώς, ως λύσεις της εξισώσεως

$$\lambda^2-(\alpha_{11}+\alpha_{22})\lambda+(\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}^2)=0 \qquad (4)$$

Η εξίσωση αυτή, καλείται ***χαρακτηριστική εξίσωση*** και οι ρίζες της, ***χαρακτηριστικές ρίζες*** ή ***ιδιοτιμές*** (eigenvalues) της (1). Από τα συστήματα (3), για τις τιμές του λ τις ιδιοτιμές του, προσδιορίζουμε τα ***χαρακτηριστικά ανύσματα*** ή ιδιοανύσματα (eigenvectors) (l_1, m_1) και (l_2, m_2). Έχουμε,

$$\lambda_{1,2}=\frac{(\alpha_{11}+\alpha_{22})\pm\sqrt{(\alpha_{11}+\alpha_{22})^2-4(\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}^2)}}{2}.$$

Παρατηρούμε ότι, η διακρίνουσα $=(\alpha_{11}-\alpha_{22})^2+4\alpha_{12}^2\geq 0$, και άρα, οι ιδιοτιμές είναι πραγματικοί αριθμοί. Επίσης, ότι $\lambda_1\lambda_2=\delta$.

Διερεύνηση, για $\Delta\neq 0,\ \lambda_1\neq\lambda_2$. α) $\delta\neq 0,\ \lambda_1\lambda_2>0$. Η (1) μετασχηματίζεται, τελικά, στην

$$\lambda_1 z_1^2+\lambda_2 z_2^2+\Delta/\delta=0$$

και για $\Delta/\delta<0$, λαβαίνουμε την ***κανονική εξίσωση*** έλλειψης κέντρου Κ. Για $\Delta/\delta<0$ δεν έχουμε στο πραγματικό επίπεδο καμπύλη. Οι άξονες της έλλειψης έχουν τις διευθύνσεις των ανυσμάτων (l_1, m_1) και (l_2, m_2), και τα μήκη των ημιαξόνων της είναι, $\delta\lambda_1/\Delta$ και $\delta\lambda_2/\Delta$. β) $\delta\neq 0,\ \lambda_1\lambda_2<0$. Η (1) μετασχηματίζεται, τελικά, στην

$$\lambda_1 z_1^2-\lambda_2 z_2^2+\Delta/\delta=0$$

που είναι η ***κανονική εξίσωση*** της υπερβολής κέντρου Κ. Οι άξονες της υπερβολής έχουν τις διευθύνσεις των ανυσμάτων (l_1, m_1) και (l_2, m_2). γ) $\delta\neq 0,\ \lambda_1=\lambda_2\neq 0$. Κάθε διεύθυνση από το Κ είναι χαρακτηριστική. Η (1) είναι κύκλος κέντρου Κ, αν $\Delta/\delta<0$.

Ερχόμαστε, τώρα, στην περίπτωση που έχουμε για ιδιοτιμή την τιμή μηδέν.

Στην περίπτωση αυτή, δεν προσδιορίζεται κέντρο της καμπύλης, μιά και, τότε, $\delta=\lambda_1\lambda_2=0$

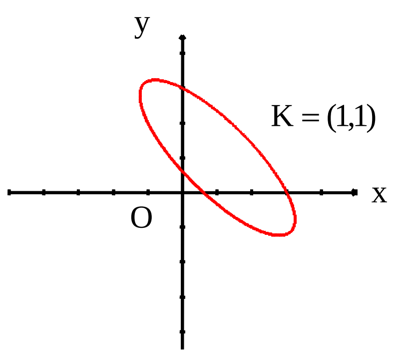
Εκτελούμε συνεπώς στην (1) την στροφή (2) για να μηδενίσουμε τον όρο $\alpha_{12}x_1x_2$, οπότε η (1) γράφεται

$$\lambda_1 y_1^2+2\mu_1 y_1+2\mu_2 y_2+\alpha_{33}=0, \qquad (5)$$

υποθέτοντας βέβαια ότι είναι $\lambda_1\neq 0,\ \lambda_2=0$. Την (5) την θέτουμε στην μορφή

$\lambda_1\left(y_1+\dfrac{\mu_1}{\lambda_1}\right)^2+2\mu_2 y_2+\nu=0$, όπου $\nu=\alpha_{33}-\dfrac{\mu_1^2}{\lambda_1}$. Τέλος, εκτελούμε τον μετασχηματισμό

$z_1=y_1+\dfrac{\mu_1}{\lambda_1},\quad z_2=y_2+\dfrac{\nu}{2\mu_2}$, και λαβαίνουμε την (1) στην μορφή $\lambda_1 z_1^2+2\mu_2 z_2=0$, που είναι η ***κανονική εξίσωση*** της παραβολής

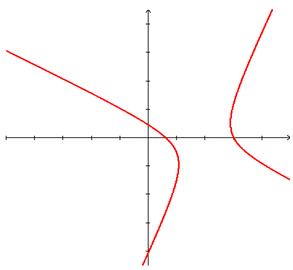


ΠΆΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. Η εξίσωση $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$, παριστάνει την έλλειψη, που εμφανίζεται στο διπλανό σχήμα. Εδώ, έχουμε, $\delta=9$, $\Delta=-81$, $\lambda_1=9$, $\lambda_2=1$. Αν μεταφέρουμε τους άξονες στο κέντρο της Κ, αυτή θα λάβει την μορφή

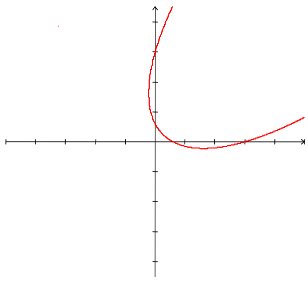
$$\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{9}=1$$

.

Η $5x^2+8xy-5y^2-18x-18y+9=0$, παριστάνει υπερβολή, ενώ η $4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=0$, παριστάνει παραβολή. Οι γραφικές παραστάσεις αυτών, δίδονται στα παρακάτω σχήματα.



Υπερβολή



Παραβολή

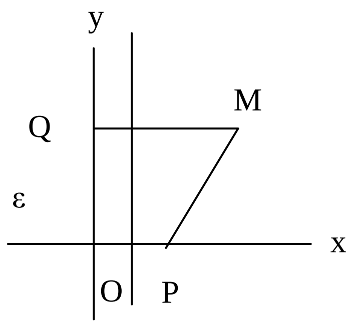
Η κανονική μορφή της παραβολής, βρίσκεται ως εξής:

Υπολογίζουμε πρώτα την $\delta=\det\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}=0$ η οποία δείχνει ότι δεν έχει κέντρο συμμετρίας η καμπύλη. Στην συνέχεια υπολογίζουμε την γωνία περιστροφής των αξόνων. Είναι $\det\begin{pmatrix}4-\lambda & -2\\ -2 & 1-\lambda\end{pmatrix}=0$, απ' όπου $\lambda^2-5\lambda=0$, έχουμε, δηλαδή, ιδιοτιμές $\lambda=0$ και $\lambda=\frac{1}{5}$. Τα χαρακτηριστικά διαν που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές αυτές, είναι, τα $\vec{x}_1=(1,2)$ και $\vec{x}_2=(1,2/5)$. Άρα, έχουμε στροφή του Ox άξονα κατά γωνία φ όπου $\mathrm{tg}\varphi=2$, $\varphi=63{,}43^\circ$ και του Oy άξονα κατά γωνία $\varphi=153{,}43^\circ$. Η στροφή δίδεται από την σχέση $\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ οπότε και $\begin{matrix}x=\frac{1}{\sqrt{5}}x'-\frac{2}{\sqrt{5}}y'\\ y=\frac{2}{\sqrt{5}}x'+\frac{1}{\sqrt{5}}y'\end{matrix}$. Μετά την αντικατάσταση $(x,y)\mapsto(x',y')$, η εξίσωσή μας $4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=0$ μετατρέπεται στην $5y'^2-6\sqrt{5}x'-2\sqrt{5}y'+7=0$. Την σχέση αυτή την γράφουμε ως εξής: $(\sqrt{5}y'-1)^2-6(\sqrt{5}x'-1)=0$. Τέλος, εκτελούμε την μεταφορά $\sqrt{5}y''=\sqrt{5}y'-1$ και $\sqrt{5}x''=\sqrt{5}x'-1$ και η εξίσωσή μας γίνεται $5y''^2=6\sqrt{5}x''$, ή και, $y''^2=\frac{6\sqrt{5}}{5}x''$.

13. Κατοπτρικές και άλλες ιδιότητες των κωνικών τομών. Ο κύκλος, η έλλειψη, η υπερβολή και η παραβολή προκύπτουν, όπως θα δούμε, και ως τομές επιπέδου με κώνο. Αυτό δικαιολογεί την ονομασία τους "κωνικές τομές".

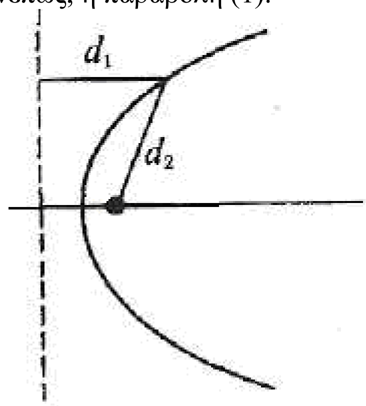
Ένας άλλος τρόπος να λάβουμε τις καμπύλες αυτές, είναι να τις θεωρήσουμε γεωμετρικούς τόπους των σημείων του επιπέδου, με τις ιδιότητες, που αναφέρονται στα παρακάτω προβλήματα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, των οποίων η απόσταση από ευθεία και σημείο να είναι ίση. Θέλουμε, δηλαδή, να έχουμε (MQ) = (MP). Εισάγουμε ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο, έτσι ώστε το σημείο P να είναι πάνω στον άξονα Ox, και ο άξονας Oy να είναι παράλληλος προς την ευθεία (ε), και να τέμνει τον άξονα Ox στο σημείο O, μέσον του ευθυγράμμου τμήματος PK, μήκους p.

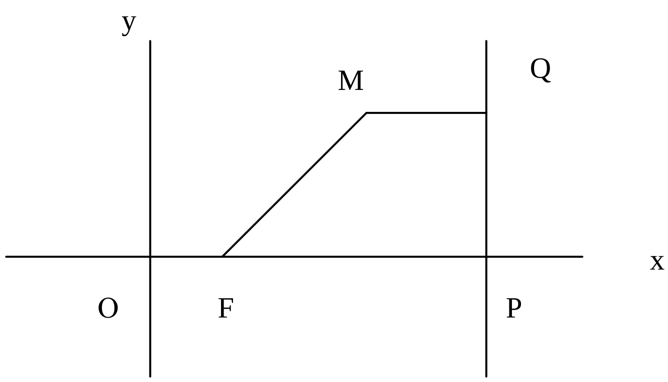


Έχουμε, λοιπόν, $P=\left(\frac{p}{2},0\right)$, $M=(x,y)$. Η εξίσωση της (ε) είναι, τότε, η $x=-\frac{p}{2}$. Είναι $(MQ)=\left|x+\frac{p}{2}\right|$ και $(MP)=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$, άρα, η εξίσωση του τόπου είναι η $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2$, ή $y^2=2px$ (1). Η εξίσωση αυτή, είναι η κανονική εξίσωση της παραβολής. Ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος, είναι συνεπώς, η παραβολή (1).

Και αντίστροφα, κάθε πΆραβολή (1) έχει την ιδιότητα τα σημεία της να ισαπέχουν από σταθερό σημείο που ονομάζεται ***εστία*** της παραβολής και έχει συντεταγμένες $\left(\frac{p}{2},0\right)$, και σταθερής ευθείας, με εξίσωση την $x=-\frac{p}{2}$, και η οποία ονομάζεται ***διευθετούσα*** της πΆραβολής. Η παράμετρος, τέλος, p, καλείται ***εστιακή παράμετρος*** και ο αριθμός p/2 ***εστιακή απόστασις.***

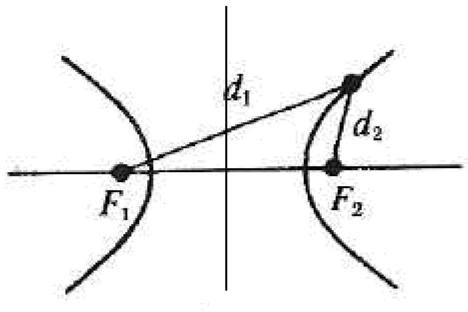


ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από ευθεία και σημείο να είναι σταθερός (= e). Παραβολή: $d_1=d_2$

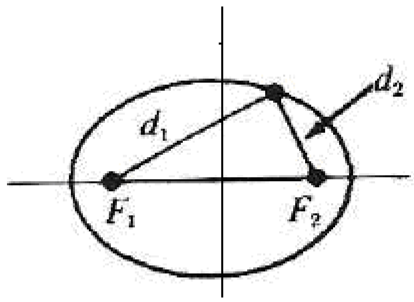


Εισάγουμε στο επίπεδο σύστημα συντεταγμένων, έτσι ώστε, η ευθεία και το σημείο να βρίσκονται στις θέσεις $P=\left(\pm\frac{a}{e},0\right)$ $F=(\pm c,0)$ με $c=ea$ (Τα σημεία F και P είναι από την ίδια πλευρά του άξονα Oy. Στο σχήμα εμφανίζουμε μόνον την "+" εκλογή). Η συνθήκη του τόπου είναι η $\frac{(MF)}{(MQ)}=e$. Έχουμε, λοιπόν, $(MF)=\sqrt{(x\pm c)^2+y^2}$ και $(MQ)=\left|x\pm\frac{a}{e}\right|$. Άρα, και $(x\pm c)^2+y^2=(ex\pm a)^2$, ή $(1-e)^2x^2+y^2=a^2-c^2$ ή ακόμα και $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y}{b^2}=1$ (2). Για $e<1$ δίδει την κανονική εξίσωση μιάς έλλειψης, ενώ, για $e>1$ την κανονική εξίσωση μιάς υπερβολής. Για $e=1$ έχουμε, βέβαια, παραβολή. Ο λόγος $e=\frac{c}{a}$ καλείται ***εκκεντρότης*** της καμπύλης. Τα σημεία $F_1=(c,0)$ και $F_2=(-c,0)$ είναι οι ***εστίες*** της έλλειψης (αντ. υπερβολής). c η ***εστιακή*** της απόσταση. Για το σημείο A που τέμνει η έλλειψη τον άξονα Ox θα έχουμε ότι, $\frac{(AF)}{(AP)}=e$, απ' όπου είναι, $x=\frac{c-a}{1-e}$. Άρα, $A=(\pm a,0)$ και a το μήκος του ημιάξονα αυτής.. Το σημείο $B=(0,b)$, που τέμνει η έλλειψη τον άξονα Oy , έχει $b=\pm\sqrt{a^2-c^2}$, το μήκος του ημιάξονα αυτής. Είναι, λοιπόν, και $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$.

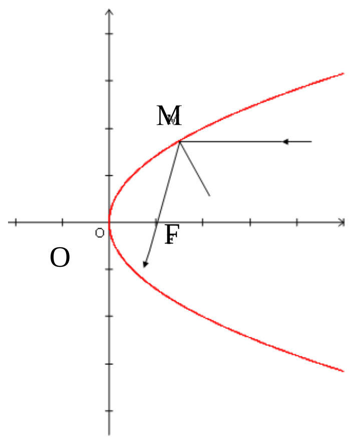
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, των οποίων το άθροισμα (αντ. η διαφορά) των αποστάσεων από δύο σημεία να είναι σταθερό (= 2a).
Έστω F_1, F_2 τα δοσμένα σημεία του επιπέδου. Αυτά ορίζουν και τον άξονα Ox των συντεταγμένων. Τον άξονα Oy τον φέρουμε να περνά από το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος F_1F_2. Η εξίσωση του τόπου είναι η $d_1\pm d_2=2a$ (3), όπου $d_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ και $d_2=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$. Η (3), μετά από μερικούς μετασχηματισμούς δίδει την κανονική εξίσωση της έλλειψης (αντ. υπερβολής).



Υπερβολή: $d_1-d_2=2a$



Έλλειψη: $d_1+d_2=2a$



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4. Ακτίς φωτός παράλληλος του άξονα Ox ανακλωμένη από την παραβολή, διέρχεται από την εστία της.
Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2=2px$ στο $M=(x_0,y_0)$, είναι η $Y-y_0=(X-x_0)y'$ και επειδή $yy'=p$, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι,

$$Yy_0-y_0^2=Xp-x_0p \quad \text{ή}$$

$$pX-y_0Y+(y_0^2-px_0)=0.$$

Ένα κάθετο διάνυσμα της εφαπτομένης είναι το $\vec{n}=(p,-y_0)$. Ένα διάνυσμα που έχει την διεύθυνση του άξονα Ox είναι το $\vec{i}=(1,0)$. Η προσπίπτουσα γωνία είναι λοι-πόν η φ με $\cos\varphi = \dfrac{\vec{i}\cdot\vec{n}}{|\vec{i}||\vec{n}|} = \dfrac{p}{\sqrt{y_0^2+p^2}}$. Ίση με αυτήν είναι και η γωνία ανακλάσεως. Άρα η διεύθυνση της ανακλωμένης ακτίνας δίδεται από το $\vec{e}$, το οποίο σχηματίζει με το $\vec{i}$ γωνία 2φ. Αν $\vec{e} = (e_1, e_2)$, με $|\vec{e}| = 1$, τότε είναι και $\vec{e}\cdot\vec{i} = \cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1 = \dfrac{2p^2}{y_0^2+p^2} - 1 = \dfrac{p^2-y_0^2}{p^2+y_0^2} = e_1$.

Εξ' άλλου το $\vec{e}$ σχηματίζει με το $\vec{n}$ γωνία φ. Άρα $\cos\varphi = \dfrac{\vec{e}\cdot\vec{n}}{|\vec{e}||\vec{n}|} = \dfrac{e_1 p - e_2 y_0}{\sqrt{p^2+y_0^2}} = \dfrac{p}{\sqrt{p^2+y_0^2}}$, ή

και $e_2 y_0 = e_1 p - p$, ή $e_2 = \dfrac{(p^2-y_0^2)p - (p^2+y_0^2)p}{p^2+y_0^2} = \dfrac{-2py_0^2}{p^2+y_0^2}$

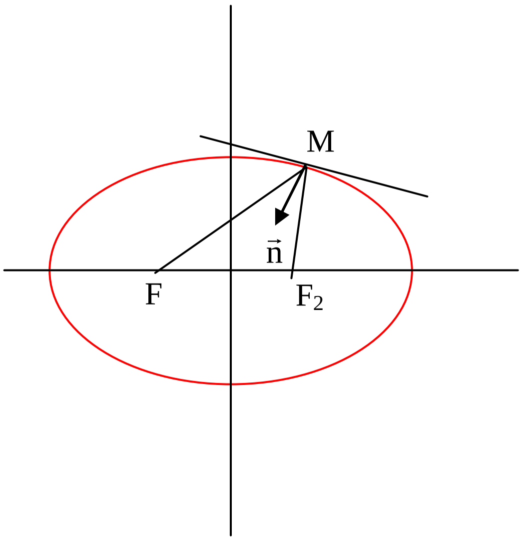
Η εξίσωση της ευθείας που περνά από το Μ και έχει διεύθυνση $\vec{e}$ είναι η $\dfrac{X-x_0}{e_1} = \dfrac{Y-y_0}{e_2}$

ή $\dfrac{(X-x_0)(p^2+y_0^2)}{p^2-y_0^2} = \dfrac{(Y-y_0)(p^2+y_0^2)}{-2py_0^2}$ ή $\dfrac{X-x_0}{p^2-y_0^2} = \dfrac{Y-y_0}{-2py_0^2}$. Η ευθεία αυτή, τέμνει τον άξονα Ox στο σημείο $(X,0)$. Είναι, λοιπόν, $\dfrac{X-x_0}{p^2-y_0^2} = \dfrac{y_0}{2py_0^2} = \dfrac{1}{2p}$, ή και

$X = x_0 + \dfrac{p^2-y_0^2}{2p} = x_0 + \dfrac{p^2-2px_0}{2p} = \dfrac{2px_0+p^2-2px_0}{2p} = \dfrac{p}{2}$, που είναι η εστιακή από-σταση της παραβολής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5 Μία φωτεινή ακτίς που ξεκινά από την μία εστία της έλλειψης, ανακλωμένη επ' αυτής, θα διέλθει από την άλλη εστία.

Έστω η έλλειψη $\dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{b} = 1$ και $M = (x_0, y_0)$ το σημείο προσπτώσεως της ακτίνος F_1M. Η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο Μ, είναι η



$$\frac{Y-y_0}{X-x_0} = f'(x_0) \text{ με } f'(x_0) = -\frac{bx_0}{ay_0}.$$

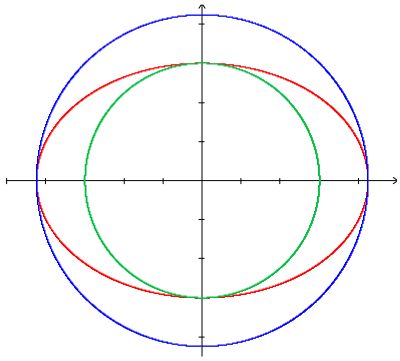
Έχουμε, λοιπόν, εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο Μ την

$$bx_0X + ay_0Y - (ay_0^2 + bx_0^2) = 0$$

και συνεπώς, το κάθετο σ' αυτήν διάνυσμα $\vec{n} = (bx_0, ay_0)$.

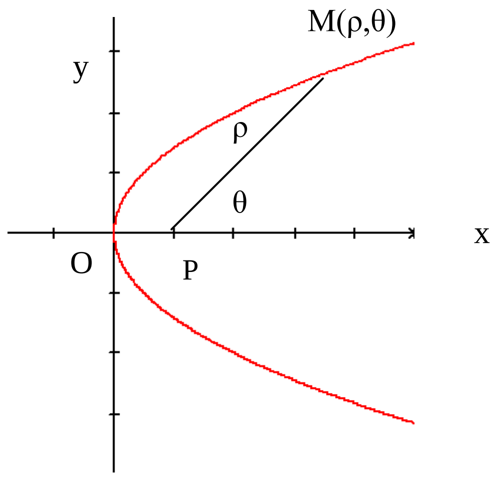
Αρκεί να δείξουμε ότι το $\vec{n}$ διχοτομεί την γωνία F_1MF_2. Πράγματι, η ευθεία F_1M έχει εξίσωση $\dfrac{Y-y_0}{X-x_0} = \dfrac{y_0}{x_0-c}$ και η MF_2 έχει εξίσωση την $\dfrac{Y-y_0}{X-x_0} = \dfrac{y_0}{x_0+c}$. Κατά μήκος αυτών βρίσκονται τα διανύσματα $\vec{e}_1 = (x_0 - c, y_0)$ και $\vec{e}_2 = (x_0 + c, y_0)$. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{\vec{n}\cdot\vec{e}_1}{|\vec{n}||\vec{e}_1|} = \frac{bx_0(x_0-c)+ay_0^2}{|\vec{n}|\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}} = \frac{bx_0(x_0+c)+ay_0^2}{|\vec{n}|\sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2}} = \frac{\vec{n}\cdot\vec{e}_2}{|\vec{n}||\vec{e}_2|}$$



Σαν παραμετρικές εξισώσεις της έλλειψης, μπορούμε να λάβουμε τις $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$ όπου θ η γωνία MOx. Αν υποθέσουμε ότι $a > b$, τότε, η έλλειψή μας εγκλωβίζεται ανάμεσα σε δύο κύκλους με ακτίνες b και a. Αν το σημείο $K_1 = (x, y)$ είναι σημείο του εξωτερικού κύκλου $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$ το σημείο $M = (x, ky)$ όπου $k = \frac{b}{a} < 1$ είναι σημείο της έλλειψης.

Ο γραμμικός μετασχηματισμός $(x, y) \mapsto (x, ky)$ ή $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ έχει ορίζουσα $k \neq 0$, είναι δηλαδή, ένα προς ένα, και απεικονίζει τον εξωτερικό κύκλο πάνω στην έλλειψη. Η παρατήρηση αυτή, μας επιτρέπει να υπολογίσουμε το εμβαδόν της έλλειψης, μια και αυτό είναι το εμβαδόν του κύκλου πολλαπλασιασμένο με την ορίζουσα του μετασχηματισμού. Συνεπώς, το εμβαδόν της έλλειψης είναι, $\pi a^2 \mapsto \pi a^2 k = \pi ab$.



Ας δούμε, τέλος, τι μορφή λαβαίνουν οι κανονικές εξισώσεις των παραπάνω κωνικών τομών, αν χρησιμοποιήσουμε, όπως γίνεται στην αστρονομία επί παραδείγματι, πολικές συντε-ταγμένες.

Γιά την πΆραβολή $y^2 = 2px$, γνωρίζουμε ότι η απόσταση του τυχόντος σημείου M αυτής από την εστία της είναι, (βλέπε Πρόβλημα 1)

$$\rho = (MP) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left(x + \frac{p}{2}\right).$$

Εξ' άλλου είναι και

$$x - \frac{p}{2} = \rho\cos\theta$$

Άρα και $\rho = \dfrac{p}{1-\cos\theta}$ (1).

Αντίστροφα, αν ισχύει η (1), τα σημεία του επιπέδου που την πληρούν, ισαπέχουν από σημείο και ευθεία. Άρα ο γεωμετρικός τους τόπος είναι παραβολή. Η (1) είναι, λοιπόν, η εξίσωση της παραβολής σε πολικές συντεταγμένες

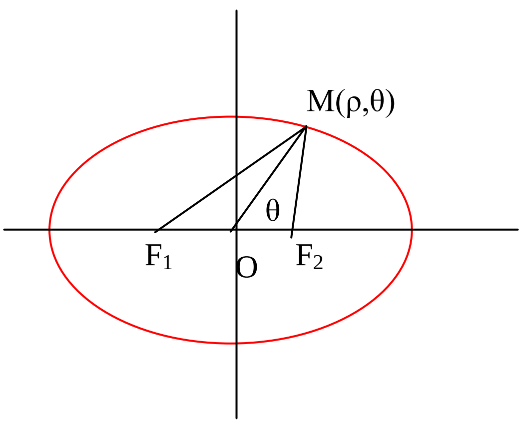
Για την έλλειψη

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0$$ έχουμε ότι,

(βλέπε Πρόβλημα 2), $x + c = \rho\cos\theta$.

Εξ' άλλου είναι, $(MF) = e(MQ)$ ή και,

$$\rho = a + ex$$



Άρα και $\rho = \dfrac{p}{1 - e\cos\theta}$ (2), όπου έχουμε θέσει $p = a - ac$.

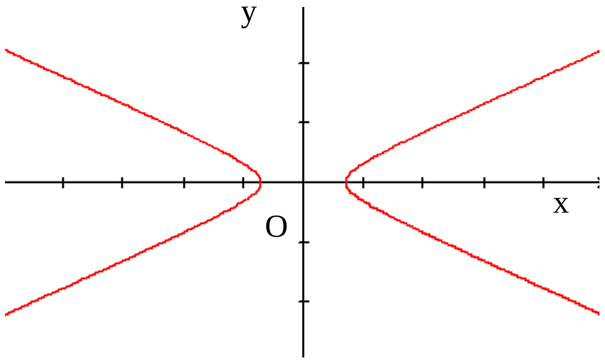
Ερχόμαστε, τέλος, στην υπερβολή $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0$.

Έχουμε ότι, (βλέπε Πρόβλημα 3),

$$x - c = \rho\cos\theta$$

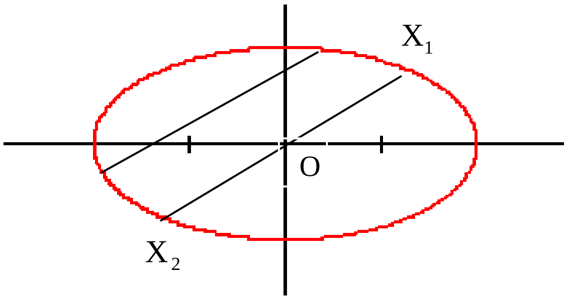
και $\rho = ex - a$.

Άρα και $\rho = \dfrac{p}{1 - e\cos\theta}$ (3).



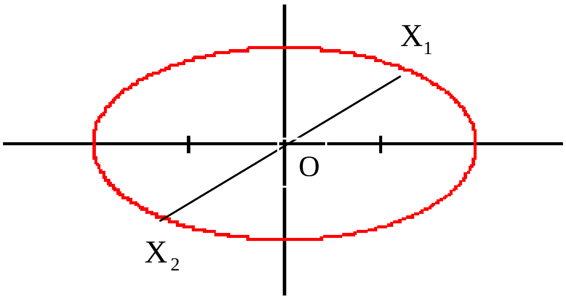
Παρατηρούμε ότι οι εξίσωση (3) παριστά υπερβολή, έλλειψη ή παραβολή, αντίστοιχα, αν είναι $e > 1, \quad 0 \leq e < 1, \quad e = 1$.

Ορισμός. Ο γεωμετρικός τόπος των μέσων των παραλλήλων χορδών οιασδήποτε κωνικής, καλείται διάμετρος της κωνικής.



Για την έλλειψη $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, αν καλέσουμε κ την κλίση της χορδής της X_2OX_1 όπου O το κέντρο της έλλειψης και $X_1 = (x_1, y_1)$, $X_2 = (x_2, y_2)$ τα άκρα της χορδής, η δέσμη των παραλλήλων προς αυτήν χορδών δίδεται από την εξίσωση ε: $y = \kappa x + \lambda$

Τα σημεία τομής της ε: και της έλλειψης πληρούν την σχέση $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{(\kappa x + \lambda)^2}{b^2} = 1$, ή και $b^2x^2 + a^2(\kappa x + \lambda)^2 = a^2b^2$ ή $(b^2 + a^2\kappa^2)x^2 + 2a^2\kappa\lambda x + a^2(\lambda^2 - b^2) = 0$. Οι ρίζες της



εξισώσεως αυτής, δίδουν τα σημεία X_1 και X_2.

Το μέσον της χορδής X_1X_2 είναι το $M = (x_\mu, y_\mu) = \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

Το άθροισμα των ριζών

$x_1 + x_2 = \dfrac{-2a^2\kappa\lambda}{b^2 + a^2\kappa^2}$ και άρα, $x_\mu = \dfrac{-a^2\kappa\lambda}{b^2 + a^2\kappa^2}$ και $y_\mu = \kappa x_\mu + \lambda = \dfrac{\lambda b^2}{b^2 + a^2\kappa^2}$.

Παρατηρούμε ότι ο λόγος $\dfrac{y_\mu}{x_\mu} = -\dfrac{b^2}{a^2\kappa}$ εξαρτάται μόνο από την κλήση κ της χορδής

X_2OX_1. Όλα συνεπώς τα σημεία Μ κείνται επί της ευθείας $y = -\dfrac{b^2}{a^2\kappa}x$.

Για την παραβολή $y^2 = 2px$, η διάμετρος έχει εξίσωση $y = \frac{p}{\kappa}$, κ η κλήση των παραλλήλων χορδών.

Για την υπερβολή $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, η διάμετρος έχει εξίσωση $y = \frac{b^2}{a^2\kappa}$, κ η κλήση των παραλλήλων χορδών.

Η εξίσωση της υπερβολής δίδεται συνήθως από την έκφραση $xy = a^2$. Για να την μετατρέψουμε στην κανονική της έκφραση, εκτελούμε την στροφή $x = x' + y'$, $y = x' - y'$, οπότε και $x'^2 - y'^2 = a^2$.

Ονοματολογία καμπύλων δευτέρου βαθμού. Η καμπύλη δευτέρου βαθμού $F(x, y) = 0$ στην κανονική της έκφραση, λαβαίνει την μορφή:

1. Πραγματική έλλειψη: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a \geq b > 0$.
2. Φανταστική έλλειψη: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$, $a \geq b > 0$.
3. Ζεύγος τεμνομένων φανταστικών ευθειών: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$, $a \geq b > 0$ και $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$.
4. Υπερβολή: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b > 0$.
5. Ζεύγος τεμνομένων ευθειών: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, $a > b > 0$ και $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$.
6. Παραβολή: $y^2 = 2px$, $p > 0$.
7. Ζεύγος πραγματικών παραλλήλων ευθειών: $y^2 - b^2 = 0$, $b > 0$.
8. Ζεύγος φανταστικών παραλλήλων ευθειών: $y^2 + b^2 = 0$, $b > 0$.
9. Δύο ταυτιζόμενες ευθείες $y^2 = 0$.

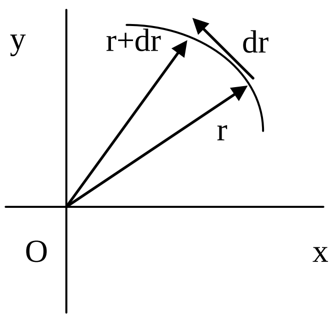
14. Οι Νόμοι του Kepler. Χρησιμοποιόντας τις μεθόδους του διαφορικού και του ολοκληρωτικού λογισμού, θα πάρουμε τους νόμους του Kepler, που αναφέρονται στην κίνηση των πλανητών, ως συνέπεια των νόμων του Newton, στην κίνηση των σωμάτων μέσα σε ένα βαρυτικό πεδίο δυναμικού $U = -\frac{1}{r}$.

Θεωρούμε σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων με αρχή το σημείο O, πάνω στον Ήλιο, για τον οποίο δεχόμεθα ότι είναι ένα σταθερό υλικό σημείο με μάζα M. Εστω P η θέση την οποία κατέχει κάποιος πλανήτης με μάζα m, την χρονική στιγμή t. Από την έκφραση του νόμου της “Παγκοσμίου Ελξεως” του Newton, γνωρίζουμε ότι το η δύναμη $\vec{F}$, με την οποία ο πλανήτης έλκεται από τον ήλιο είναι $\vec{F} = \frac{kmM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$, όπου $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$, και $r = (OP)$, η απόσταση του P από το O. Η $\vec{F}$ εφαρμόζεται στο P, έχει φορέα την ευθεία OP, μέτρο $F = \frac{kMm}{r^2} = \frac{G}{r^2}$, $G =$ σταθ.,και διεύθυνση πάντοτε προς το O (κεντρική δύναμις). Από το γεγονός αυτό, έπεται ότι η κίνηση γίνεται πάνω σε ένα επίπεδο. Πράγματι, ο δεύτερος νόμος του Newton για την κίνηση των σωμάτων είναι ο $\vec{F}=m\vec{a}$, όπου $\vec{F}$ η δύναμις που εφαρμόζεται επί του σώματος μάζης m και $\vec{a}$ η επιτάχυνση του υλικού σημείου m. Είναι, λοιπόν, $\vec{a}=\frac{G}{r^2}\vec{e}_r$ όπου $\vec{e}_r$ μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος της ανυσματικής ακτίνας, Παρατηρούμε ότι,

$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right)=\vec{r}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}+\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{r}\times\vec{a}+\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{0}$, δηλαδή, $\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}=\sigma\tau\alpha\theta.=\vec{c}$ και, συνεπώς, η κίνηση του υλικού σημείου γίνεται επί επιπέδου καθέτου προς το σταθερό διάνυσμα $\vec{c}$.

Μπορούμε συνεπώς να υποθέσουμε ότι οι άξονες Ox, και Oy του συστήματός μας, βρίσκονται πάνω στο επίπεδο αυτό.

Περνάμε σε πολικές συντεταγμένες οπότε οι προβολές $x=x(t), y=y(t)$ του P είναι, $x(t)=r(t)\cos\theta(t)$, $y(t)=r(t)\sin\theta(t)$ και οι προβολές της $\vec{F}$ είναι $F_x(t)=-F\cos\theta(t)$ και $F_y(t)=-F\sin\theta(t)$. Από τον δεύτερο νόμο του Newton προκύπτουν οι εξισώσεις $F_x=m\frac{d^2x}{dt^2}=F\cos\theta$ και $F_y=m\frac{d^2y}{dt^2}=F\sin\theta$, πολλαπλασιάζουμε την πρώτη επί y, την δεύτερη επί x, και σχηματίζουμε την διαφορά τους, οπότε και,



$$yF_x-xF_y=m\left\{y\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2y}{dt^2}\right\}=$$

$$m\frac{d}{dt}\left\{y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}\right\}=yF\cos\theta-xF\sin\theta=0$$

Είναι, λοιπόν, $y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}=\sigma\tau\alpha\theta$. Η έκφραση που εμφανίζεται στο αριστερό σκέλος της εξισώσεως αυτής, είναι η έκφρασις του στοιχειώδους εμβαδού dA. Πράγματι, έχουμε,

$$|dA|=\frac{1}{2}|\vec{r}\times d\vec{r}|=\left|(xdy-ydx)\vec{k}+(ydz-zdy)\vec{i}+(zdx-xdz)\vec{j}\right|.$$

Ο μόνος όρος που διασώζεται είναι ο πρώτος, μια και $z=0$.

Άρα, $\left|\frac{dA}{dt}\right|=\left|y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}\right|=\sigma\tau\alpha\theta=h.$ (1),

Από καρτεσιανές συντεταγμένες (x,y), περνάμε σε πολικές (r,θ):

$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $\frac{dx}{dt}=-r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}+\cos\theta\frac{dr}{dt}$, $\frac{dy}{dt}=r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}+\sin\theta\frac{dr}{dt}$ και η (1) γίνεται, $\frac{dA}{dt}=r\sin\theta\left\{-r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}+\cos\theta\frac{dr}{dt}\right\}-r\cos\left\{r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}+\sin\theta\frac{dr}{dt}\right\}$ ή

$\left|\frac{dA}{dt}\right|=r^2\frac{d\theta}{dt}$ ή $|\vec{r}\times\vec{v}|=r^2\frac{d\theta}{dt}=h$ (2).

Άρα, το εμβαδόν που διαγράφει η επιβατική ακτίνα, είναι ανάλογος του χρόνου. Η πρόταση αυτή, αποτελεί τον πρώτο νόμο του Kepler "Τα εμβαδά, που διαγράφονται από την επιβατική ακτίνα σε ίσους χρόνους, είναι ίσα".

Η έκφραση της ταχύτητας $\vec{v}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}$ και της επιτάχυνσης $\vec{a}=\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}$ σε πολικές συντεταγμένες προκύπτει ως εξής:

Είναι $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = r(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})$.

Άρα και $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = (\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j})\dfrac{dr}{dt} + r(-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\vec{j})\dfrac{d\theta}{dt}$. Παρατηρούμε ότι τα διανύσματα $\vec{e}_r = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$ και $\vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$ είναι μοναδιαία κάθετα. Έχουμε, λοιπόν $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\dfrac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta$. Το μέτρο της ταχύτητας $\vec{v}$ σε πολικές συντεταγμένες είναι $v^2 = \left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2$. Για την επιτάχυνση έχουμε

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\vec{e}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{e}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}.$$

Είναι $\dfrac{d\vec{e}_r}{dt} = -\sin\theta\dfrac{d\theta}{dt}\vec{i} + \cos\theta\dfrac{d\theta}{dt}\vec{j}$ και $\dfrac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt}\vec{i} - \sin\theta\dfrac{d\theta}{dt}\vec{j}$.

Παρατηρούμε ότι, $\dfrac{d\vec{e}_r}{dt} = \vec{e}_\theta\dfrac{d\theta}{dt}$ και $\dfrac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\vec{e}_r\dfrac{d\theta}{dt}$

Άρα $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dfrac{d^2r}{dt^2}\vec{e}_r + \dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\vec{e}_r}{dt} + \dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\vec{e}_r}{dt} + r\dfrac{d^2\theta}{dt^2}\vec{e}_\theta - r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{e}_r$

ή

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left\{\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}\vec{e}_r + \left\{r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right\}\vec{e}_\theta \quad (3)$$

Για να βρούμε την τροχιά που διαγράφει το υλικό σημείο m υπό την επίδραση της κεντρικής δύναμης F, από την (2) έχουμε την $\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dfrac{d\theta}{dt}\right) = r\left(2\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\theta}{dt} + r\dfrac{d^2\theta}{dt^2}\right) = 0$ (4)

οπότε η (3) γίνεται, $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left\{\dfrac{d^2r}{dt^2} - r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}\vec{e}_r$, ή και

$\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}\cdot\vec{e}_\theta = \left\{\dfrac{d^2r}{dt^2} - r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}\vec{e}_r\cdot\vec{e}_\theta = 0$, μια και τα διανύσματα $\vec{e}_r$ και $\vec{e}_\theta$ είναι κάθετα..

Η (4) εξ' άλλου δίδει την $r^2\dfrac{d\theta}{dt} = \sigma\tau\alpha\theta = h$ ή $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{h}{r^2}$. Οι συντεταγμένες συνεπώς της δύναμης $\vec{F} = m\vec{a}$, $\vec{a} = \dfrac{G}{r^2}\vec{e}_r$, γράφονται,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x(t) = -F\cos\theta(t) = \frac{-G\cos\theta}{r^2} = -G'\cos\theta\frac{d\theta}{dt} \quad \text{και}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y(t) = -F\sin\theta(t) = \frac{-G\sin\theta}{r^2} = -G'\sin\theta\frac{d\theta}{dt}.$$

Ολοκληρώνουμε μία φορά και έχουμε, $\dfrac{dx}{dt} = -G'\sin\theta - A$, και $\dfrac{dy}{dt} = G'\cos\theta + B$

Αντικαθηστούμε στην $y\dfrac{dx}{dt} - x\dfrac{dy}{dt} = \sigma\tau\alpha\theta.$, $x(G'\cos\theta + B) + y(G'\sin\theta + A) = \mu$

ή $x\cos\theta + y\sin\theta = \mu' - xB' - yA'$ ή $r = \mu' - B'r\cos\theta - A'r\sin\theta$

ή $\frac{\mu'}{r}=1+B'\cos\theta+A'\sin\theta$ ή $r=\frac{\mu'}{1+A'\cos\theta+B'\sin\theta}$. (4).
Η (4) είναι εξίσωση κωνικής τομής. Η εκκεντρότης e υπολογίζεται από το σύστημα $e\cos\omega=A,\ e\sin\omega=B$. Η (4) τότε γράφεται $r=\frac{\mu'}{1-e(\cos(\omega+\theta))}$ (5),

με $e^2=A^2+B^2$. Από την (5) για $e<1$, προκύπτει ο δεύτερος νόμος του Kepler: "Οι τροχιές των πλανητών είναι ελλείψεις, την μία εστία των οποίων κατέχει ο Ήλιος".
Ο μεγάλος ημιάξονας a της έλλειψης προκύπτει από την (5) αν θέσουμε $\omega+\theta=0$ και $\omega+\theta=\pi$ και να λάβουμε το ημιάθροισμα των προκυπτουσών τιμών. Είναι

$$2a=\frac{\mu'}{1-e}+\frac{\mu'}{1+e}=\frac{2\mu'}{1-e^2}$$

Ο τρίτος νόμος του Kepler: : "Το τετράγωνο του χρόνου περιφοράς είναι ανάλογο με τον κύβο του μεγάλου άξονα της τροχιάς", έπεται ως εξής: Αν A το εμβαδόν της έλλειψης, $A=2\pi ab$ και από τον πρώτο νόμο του Kepler είναι, $A=\lambda T$ όπου T ο χρόνος περιφοράς. Άρα, $T=\frac{2\pi ab}{\lambda}$ και επειδή $b^2=a^2(1-e^2)=\frac{a^2\mu'}{\lambda}$, έχουμε, τελικά, $T^2=\lambda' a^3$, με την σταθερά $\lambda'=\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\mu'$.

15. Τετραγωνικές επιφάνειες στον χώρο. Ένα σύνολο σημείων του ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^3$, λέμε ότι σχηματίζει μίαν επιφάνεια, αν τα σημεία του συνόλου πληρούν την εξίσωση $F(x,y,z)=0$ (Καρτεσιανή μορφή) ή την $z=\varphi(x,y)$ (μορφή του Monge) ή το διπαραμετρικό σύστημα $x_i=f_i(p,q),\ \ 1\le i\le 3$ (μορφή Gauss).
Για παράδειγμα η επιφάνεια μιάς σφαίρας κέντρου O και ακτίνας R, είναι δυνατόν να μελετηθεί στην μορφή $x^2+y^2+z^2-R^2=0$ (καρτεσιανή) ή $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}$ (Monge), ή $x=R\cos\theta\cos\varphi,\ \ y=R\cos\theta\sin\varphi$ και $z=R\sin\theta$ (Gauss). Παρατηρούμε ότι, η απαλείφουσα του συστήματος (μορφή Gauss) είναι η καρτεσιανή έκφραση της επιφάνειας.

Η απλούστερη έκφραση, που μπορεί να λάβει η F, είναι η πολυωνυμική και απ' αυτήν, αυτή του πρωτοβαθμίου πολυωνύμου ως προς x, y και z. Με την περίπτωση αυτή ασχοληθήκαμε στις προηγούμενες παραγράφους. Θα εξετάσουμε, τώρα, την περίπτωση που η F είναι ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς x, y, z. **Συμβολισμός.** Το τυχόν σημείο (x,y,z) του χώρου, θα το συμβολίζουμε με (x_1,x_2,x_3).
Θεωρούμε, λοιπόν, την "τετραγωνική" μορφή:

$$\begin{aligned}\alpha(x_1,x_2,x_3)=\alpha_{11}x_1^2+\alpha_{22}x_2^2+\alpha_{33}x_3^2+&\\ 2\alpha_{12}x_1x_2+2\alpha_{23}x_2x_3+2\alpha_{13}x_1x_3+&\ . \quad (1)\\ 2\alpha_{14}x_1+2\alpha_{24}x_2+2\alpha_{34}x_3+\alpha_{44}=0&\end{aligned}$$

Σ' αυτήν διακρίνουμε ένα ομογενές και συμμετρικό δευτεροβάθμιο τμήμα, που είναι το $\alpha_{11}x_1^2+\alpha_{22}x_2^2+\alpha_{33}x_3^2+2\alpha_{12}x_1x_2+2\alpha_{23}x_2x_3+2\alpha_{13}x_1x_3$. Το τμήμα αυτό, μπορούμε να το γράφουμε και ως

$$(x_1,x_2,x_3)^T\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{13}&\alpha_{13}\\ \alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\ \alpha_{31}&\alpha_{31}&\alpha_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

όπου ο $A=(\alpha_{ij})$ είναι ένας συμμετρικός πίνακας.

Ένα πρωτοβάθμιο τμήμα, το $2\alpha_{14}x_1+2\alpha_{24}x_2+2\alpha_{34}x_3$, και τον σταθερό όρο α_{44} Με μία παράλληλη μεταφορά των αξόνων Ox_1, Ox_2, Ox_3 στην θέση (k_1,k_2,k_3) είναι δυνατόν, αφού προσδιορίσουμε κατάλληλα το ***κέντρο*** $K=(k_1,k_2,k_3)$ της επιφάνειας, να μηδενίσουμε το πρωτοβάθμιο τμήμα της (1). Πράγματι, αν εκτελέσουμε την παράλληλη μεταφορά

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1+k_1 \\ x_2 &= y_2+k_2 \\ x_3 &= y_3+k_3 \end{aligned}$$

η (1), μετά από μερικές πράξεις, μετασχηματίζεται στην

$$\begin{aligned} \alpha(y_1,y_2,y_3)=\alpha_{11}y_1^2+\alpha_{22}y_2^2+\alpha_{33}y_3^2+2\alpha_{12}y_1y_2+2\alpha_{23}y_2y_3+2\alpha_{31}y_3y_1+ \\ (\alpha_{11}k_1+\alpha_{12}k_2+\alpha_{13}k_3+\alpha_{14})y_1+ \\ (\alpha_{21}k_1+\alpha_{22}k_2+\alpha_{23}k_3+\alpha_{24})y_2+ \\ (\alpha_{31}k_1+\alpha_{32}k_2+\alpha_{33}k_3+\alpha_{34})y_3+\Delta/\delta=0 \end{aligned} \qquad (2)$$

όπου $\delta=\det\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\ \alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\ \alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{pmatrix}$, και $\Delta=\det\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}&\alpha_{14}\\ \alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}&\alpha_{24}\\ \alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}&\alpha_{34}\\ \alpha_{41}&\alpha_{42}&\alpha_{43}&\alpha_{44}\end{pmatrix}$, με $\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$, $i\neq j$.

Παρατήρηση. Οι πίνακες δ και Δ είναι συμμετρικοί. Αν $\Delta=0$, η $\alpha(y_1,y_2,y_3)=0$ παριστάνει κώνο με κορυφή το O.

Η λύση (k_1,k_2,k_3) του συστήματος,

$$\begin{aligned} \alpha_{11}k_1+\alpha_{12}k_2+\alpha_{13}k_3+\alpha_{14}=0 \\ \alpha_{21}k_1+\alpha_{22}k_2+\alpha_{23}k_3+\alpha_{24}=0 \\ \alpha_{31}k_1+\alpha_{32}k_2+\alpha_{33}k_3+\alpha_{34}=0 \end{aligned}$$

όταν $\delta\neq 0$, δίδει το κέντρο K της επιφάνειας.

Στη συνέχεια, εκτελούμε μίαν περιστροφή του συστήματος συντεταγμένων $Ky_1y_2y_3$, έτσι ώστε, όταν αυτό λάβει την νέα θέση $Kz_1z_2z_3$, η εξίσωση της επιφάνειας (2) να λάβει την κανονική της έκφραση $\alpha(z_1,z_2,z_3)=\lambda_1z_1^2+\lambda_2z_2^2+\lambda_3z_3^2+\Delta/\delta=0$. Τούτο επιτυγχάνεται ως εξής :

Κατ' αρχήν, αν καλέσουμε $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ τα μοναδιαία διανύσματα που δίδουν τις διευθύνσεις των αξόνων Ky_1,Ky_2,Ky_3 και $\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}'$ τα μοναδιαία διανύσματα που δίδουν τις διευθύνσεις των αξόνων Kz_1,Kz_2,Kz_3, αντιστοίχως, τότε, οι συντεταγμένες ενός σημείου M του χώρου στα συστήματα $Ky_1y_2y_3$ και $Kz_1z_2z_3$ που είναι οι (y_1,y_2,y_3) και (z_1,z_2,z_3) αντίστοιχα, θα πληρούν την ισότητα $y_1\vec{i}+y_2\vec{j}+y_3\vec{k}=z_1\vec{i}'+z_2\vec{j}'+z_3\vec{k}'$ (1), μιά και κάθε μέλος της ισότητας αυτής, εκφράζει το διάνυσμα $\overrightarrow{KM}$ αντιστοίχως στα συστήματα $Ky_1y_2y_3$ και $Kz_1z_2z_3$.

Είναι, όμως, $\vec{i}'=(\vec{i}'\cdot\vec{i})\vec{i}+(\vec{i}'\cdot\vec{j})\vec{j}+(\vec{i}'\cdot\vec{k})\vec{k}$,

$\vec{j}'=(\vec{j}'\cdot\vec{i})\vec{i}+(\vec{j}'\cdot\vec{j})\vec{j}+(\vec{j}'\cdot\vec{k})\vec{k}$,

$$\vec{k}' = (\vec{k}'\cdot\vec{i})\vec{i} + (\vec{k}'\cdot\vec{j})\vec{j} + (\vec{k}'\cdot\vec{k})\vec{k}$$

ή (βλέπε και παράγραφο 8, σελ. 17)

$$\vec{i}' = \alpha_1\vec{i} + \beta_1\vec{j} + \gamma_1\vec{k},$$
$$\vec{j}' = \alpha_2\vec{i} + \beta_2\vec{j} + \gamma_2\vec{k}, \quad (2)$$
$$\vec{k}' = \alpha_3\vec{i} + \beta_3\vec{j} + \gamma_3\vec{k}$$

Τις τιμές (2) των $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ τις αντικαθιστούμε στην ισότητα (1) και τελικά λαβαίνουμε ότι,

$$y_1 = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3$$
$$y_2 = \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \beta_3 z_3 \quad (3)$$
$$y_3 = \gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2 + \gamma_3 z_3$$

ή, συνοπτικά, $\vec{y} = C^T\vec{z}$. Επειδή ο πίνακας των συνημίτονων C είναι όπως είδαμε ορθογώνιος, ο αντίστροφος μετασχηματισμός του (3) είναι ο $\vec{z} = C\vec{y}$, ή αναλυτικά, αυτός που δίδεται από το σύστημα

$$z_1 = \alpha_1 y_1 + \beta_1 y_2 + \gamma_1 y_3$$
$$z_2 = \alpha_2 y_1 + \beta_2 y_2 + \gamma_2 y_3$$
$$z_3 = \alpha_3 y_1 + \beta_3 y_2 + \gamma_3 y_3$$

Παρατηρούμε ότι, η σχέση $CC^T = I$, δίδει την $\det C^2 = 1$, απ' όπου είναι και $\det C = \pm 1$. Το πρόσημο της ορίζουσας του πίνακα C, χαρακτηρίζει τον προσανατολισμό του χώρου. Θα πρέπει, λοιπόν, να προσέχουμε, ώστε μετά τον μετασχηματισμό μας, ο χώρος να μη έχει αλλάξει προσανατολισμό. Θα πρέπει δηλαδή, να έχουμε $\det C = 1$.

Επανερχόμεθα, τώρα, στην επιφάνειά μας, που έχει λάβει την μορφή

$\alpha(y_1, y_2, y_3) = \alpha_{11}y_1^2 + \alpha_{22}y_2^2 + \alpha_{33}y_3^2 + 2\alpha_{12}y_1y_2 + 2\alpha_{23}y_2y_3 + 2\alpha_{31}y_3y_1 + \Delta/\delta = 0$,

και την οποία θέλουμε να την μετασχηματίσουμε στην

$\alpha(z_1, z_2, z_3) = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \lambda_3 z_3^2 + \Delta/\delta = 0$. Θέλουμε, δηλαδή, να έχουμε εκ ταυτότητος,

$$\alpha_{11}y_1^2 + \alpha_{22}y_2^2 + \alpha_{33}y_3^2 + 2\alpha_{12}y_1y_2 + 2\alpha_{23}y_2y_3 + 2\alpha_{31}y_3y_1 = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \lambda_3 z_3^2$$

Εργαζόμαστε, τώρα, όπως ακριβώς στην περίπτωση των κωνικών τομών (βλέπε σελ. 27) και καταλήγουμε στα συστήματα

$$\alpha_{11}\alpha_i + \alpha_{12}\beta_i + \alpha_{13}\gamma_i = \lambda_i\alpha_i$$
$$\alpha_{21}\alpha_i + \alpha_{22}\beta_i + \alpha_{23}\gamma_i = \lambda_i\beta_i \qquad 1 \le i \le 3$$
$$\alpha_{31}\alpha_i + \alpha_{32}\beta_i + \alpha_{33}\gamma_i = \lambda_i\gamma_i$$

Για να έχουμε λύση $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \neq 0$, θα πρέπει να είναι $\det(C - \lambda I) = 0$. Οι τρεις ρίζες τις εξισώσεως αυτής, δίδουν τις τρεις τιμές λ_i, με την βοήθεια των οποίων στην συνέχεια προσδιορίζουμε, (όταν αυτό είναι δυνατόν), τα συνημίτονα κατευθύνσεως που αποτελούν τον πίνακα C, βρίσκουμε, δηλαδή, τις διευθύνσεις των αξόνων Kz_1, Kz_2, Kz_3 σε σχέση με τους άξονες Ky_1, Ky_2, Ky_3.

ΠΆΡΑΔΕΙΓΜΑ. Η εξίσωση $7x^2 + 6y^2 + 5x^2 - 4xy - 4yz - 18 = 0$ (1) στερείται πρωτοβαθμίου τμήματος. Μηδενίζουμε, συνεπώς, τους όρους $4xy$ και $4yz$. Προς τούτο, σχηματίζουμε την χαρακτηριστική εξίσωση

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

και βρίσκουμε τις ρίζες της, που είναι οι $\lambda_1 = 3,\ \ \lambda_2 = 6,\ \ \lambda_3 = 9$. Η (1) μετασχηματίζεται συνεπώς στην $3x'^2 + 6y'^2 + 9z'^2 - 18 = 0$, που γράφεται και

$$\frac{x'^2}{6} + \frac{y'^2}{3} + \frac{z'^2}{2} = 1$$

που είναι και η κανονική εξίσωση της (1). Πρόκειται, λοιπόν, για ένα ελλειψοειδές με ημιάξονες $a = \sqrt{6},\ \ b = \sqrt{3},\ \ c = \sqrt{2}$.

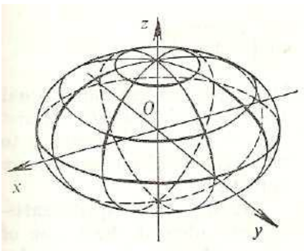
Αν θέλουμε να βρούμε τις διευθύνσεις των νέων (τονούμενων) αξόνων σε σχέση με τους αρχικούς, σχηματίζουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} (7-\lambda_i)\alpha_i \quad & -2\beta_i & &= 0 \\ -2\alpha_i \quad & +(6-\lambda)\beta_i & -2\gamma_i &= 0 \\ & -2\beta_i & +(5-\lambda)\gamma_i &= 0 \end{aligned}$$

Για $\lambda_i = 3{,}6{,}9$, όταν είναι $i = 1{,}2{,}3$ αντίστοιχα, το παραπάνω σύστημα δίδει τα εξής συνημίτονα των γωνιών, που σχηματίζουν οι νέοι τονούμενοι άξονες με τους αρχικούς:

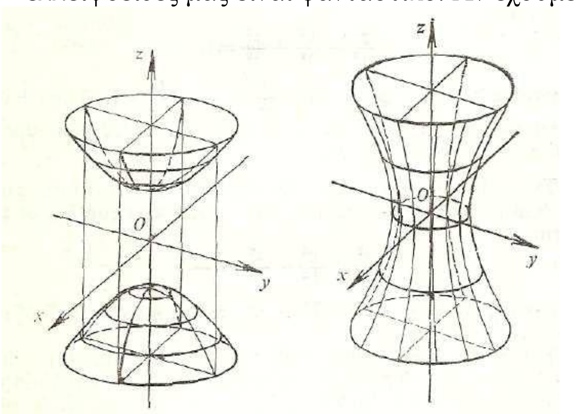
	Ox	Oy	Oz
Ox'	$1/3$	$2/3$	$2/3$
Oy'	$2/3$	$1/3$	$-2/3$
Oz'	$-2/3$	$2/3$	$-1/3$

Ονοματολογία επιφ. δευτέρου βαθμού. Μία επιφάνεια δευτέρου βαθμού $F(x, y, z) = 0$ αν έχει κέντρο, ονομάζεται ***ελλειψοειδές,*** αν όλοι οι συντελεστές είναι ομόσημοι (π.χ. θετικοί). Αν είναι και ίσοι, τότε καλείται ***σφαίρα.*** Η κανονική εξίσωση ενός ελλειψοειδούς είναι η



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \text{ όπου } a \ge b \ge c > 0.$$

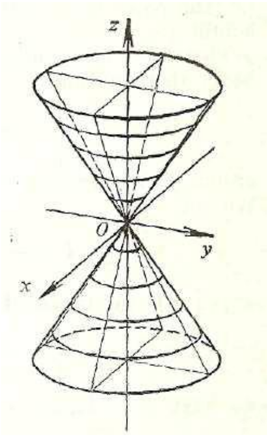
Στην περίπτωση, που έχουμε $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$, το ελλειψοειδές μας είναι φανταστικό. Αν έχουμε μία μεταβολή στο πρόσημο των συντελεστών, η επιφάνεια καλείται ***υπερβολοειδές απλό (μονόχωνο)***. Η κανονική του εξίσωση είναι π.χ. η $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Αν έχουμε δύο μεταβολές στο πρόσημο των συντελεστών, λαβαίνουμε ένα υπερβολοειδές ***διπλό (δίχωνο)***. Η κανονική του εξίσωση είναι π.χ. η $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$.



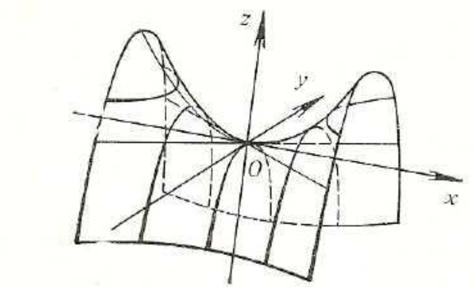
Κώνο έχουμε όπως είδαμε, αν όλοι οι συντελεστές είναι μη μηδενικοί και ο σταθερός όρος είναι μηδέν. Αν η κανονική του εξίσωση του κώνου έχει την μορφή

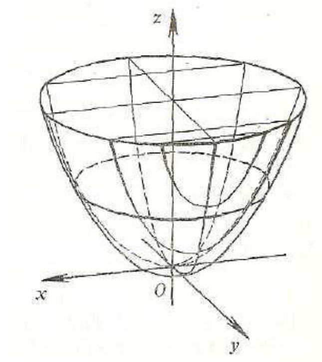
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0, \text{ με } a \ge b \ge c > 0 \text{ και}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1, \text{ ο κώνος εκφυλίζεται στην κορυφή του,}$$



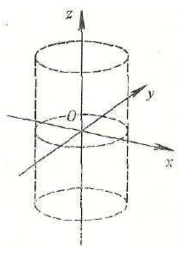
το σημείο $(0,0,0)$. ***Πραγματικό κώνο*** έχουμε μόνο στην περίπτωση που δεν είναι όλοι οι συντελεστές ομόσημοι, αν π.χ. είναι $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$. Στην περίπτωση που ένας από τους συντελεστές είναι μηδενικός και ο σταθερός όρος είναι μη μηδενικός, η επιφάνειά μας είναι ένας ***κύλινδρος,*** ελλειπτικός ή υπερβολικός, ανάλογα με το αν οι συντελεστές είναι ομόσημοι ή ετερόσημοι.
Αν, τέλος, δεν υπάρχει κέντρο, έχουμε ***παραβολοειδές.***



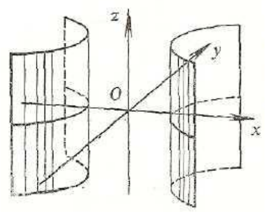


υπερβολικό παραβολοειδές ελλειπτικό παραβολοειδές

Τούτο είναι δυνατόν να είναι υπερβολικό παραβολοειδές, με κανονική εξίσωση $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$, ή ελλειπτικό παραβολοειδές με κανονική εξίσωση την $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$.
Αν, τέλος, η επιφάνειά μας σε κάποιο καρτεσιανό σύστημα αναφοράς έχει την μορφή $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y}{b^2}=1,\ \ a\geq b>0$ ή $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y}{b^2}=1,\ \ a\geq b>0$, καλείται ελλειπτικός, αντιστοίχος υπερβολικός κοίλυνδρος.



Ελλειπτικός κοίλυνδρος

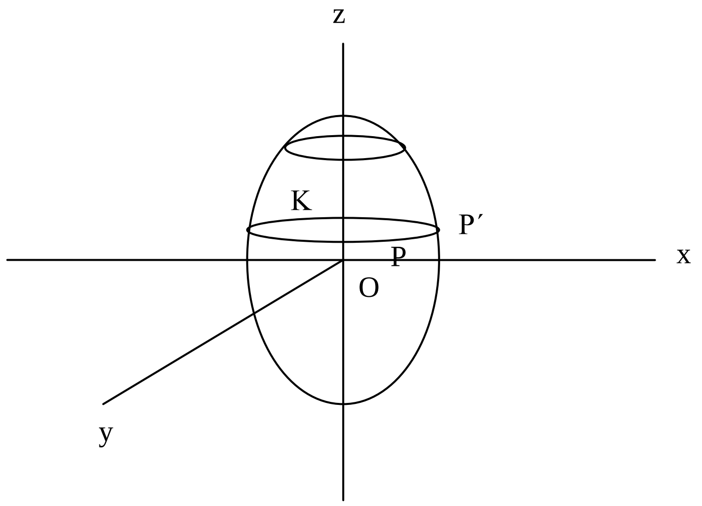


Υπερβολικός κοίλυνδρος

16. Επιφάνειες εκ περιστροφής. Σε κάθε ένα από τα παρακάτω προβλήματα, ζητάμε να βρούμε μία σχέση της μορφής $F(x,y,z)=0$ ή $z=\varphi(x,y)$ την οποίαν πρέπει να πληρούν τα σημεία $M(x,y,z)$ της ζητουμένης επιφάνειας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1. Να βρεθεί η επιφάνεια που παράγεται, όταν η έλλειψης $x^2+4z^2-16=0$ περιστραφεί περί τον Oz άξονα.
Λύση. Η έλλειψη κείται επί του Oxz επιπέδου, με κέντρο το σημείο O. Το τυχόν

σημείο $F=(x,y,z)$ τηςεπιφάνειας που παράγεται κείται σε περιφέρεια κύκλου ακτίνας ΚΡ, με επίπεδο παράλληλο στο Oxy.



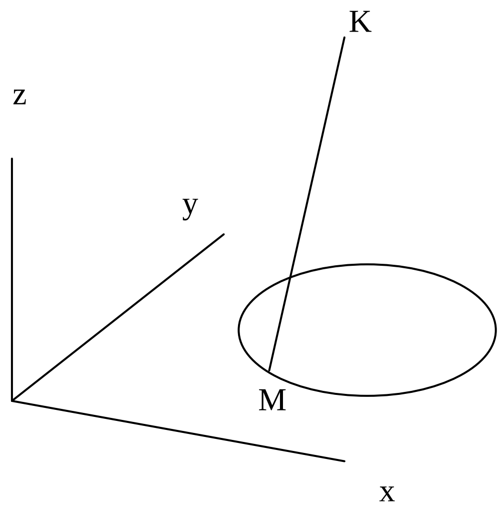
Είναι, λοιπόν,
$x^2+y^2=(KP)^2$.
Εξ’ άλλου,

$(KP)^2=(KP')^2=x^2=16-4z^2$

μια και το σημείο Ρ΄ είναι και σημείο της έλλειψης.
Άρα $x^2+y^2=16-4z^2$ ή
$x^2+y^2+4z^2-16=0$
είναι η εξίσωση της παραγόμενης επιφάνειας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2. Να βρεθεί η επιφάνεια που παράγεται, όταν η υπερβολή $x^2-2z^2=1$ περιστραφεί περί τον Ox άξονα.
Λύση. Το τυχόν σημείο Ρ της επιφάνειας, βρίσκεται και στην περιφέρεια κύκλου το κέντρο του οποίου είναι πάνω στον Ox άξονα, και το επίπεδό του είναι παράλληλο του Oyz επιπέδου. Για το σημείο αυτό ισχύει, λοιπόν, ότι $y^2+z^2=(KP)^2$. Όταν το Ρ βρεθεί και στο επίπεδο της υπερβολής, σαν σημείο της, $(KP)^2=z^2=1+2x^2$. Άρα η ζητουμένη εξίσωση είναι η $y^2+z^2=1+2x^2$, ή $2x^2-y^2-z^2+1=0$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3. Να βρεθεί η επιφάνεια που παράγεται όταν η ευθεία ΚΜ περιστραφεί περί το $K=(2,3,4)$, έτσι ώστε το σημείο της Μ να κείται πάντοτε επί της ελλείψεως $x^2+4y^2-16=0,\ z=0$.



Λύση. Το σημείο $M=(x_o,y_o,z_o)$ βρίσκεται και στην ευθεία ΚΜ και στην έλλειψη. Αν, λοιπόν $X=(x,y,z)$ το τυχόν σημείο της ευθείας ΚΜ (που είναι και σημείο της ζητουμένης επιφάνειας), ισχύουν γι αυτό οι σχέσεις,

$$\frac{x-x_o}{x_o-2}=\frac{y-y_o}{y_o-3}=\frac{z-z_o}{z_o-4}$$

και $x_o^{\,2}+4y_o^{\,2}-16=0,\ z_o=0$.

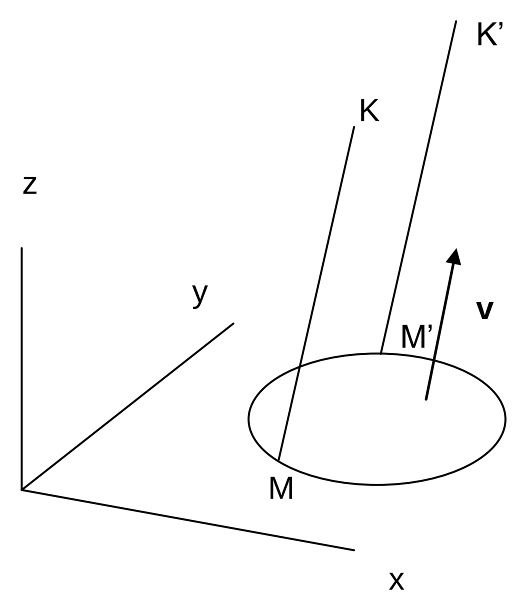
Άρα και $\dfrac{x-x_o}{x_o-2}=\dfrac{y-y_o}{y_o-3}=\dfrac{z}{-4}$, ή $z=-4\dfrac{x-x_o}{x_o-2}$, $z=-4\dfrac{y-y_o}{y_o-3}$ και $x_o^{\,2}+4y_o^{\,2}-16=0$.

Από τις τρείς αυτές σχέσεις, απαλοίφουμε τις δύο παραμέτρους x_o, y_o, έτσι ώστε να προκύψει η ζητουμένη σχέση $F=(x,y,z)$. Είναι, $x_o=\dfrac{2z-4x}{z-4}$, $y_o=\dfrac{3z-4y}{z-4}$ οπότε και

$\left(\dfrac{2z-4x}{z-4}\right)^2+4\left(\dfrac{3z-4y}{z-4}\right)^2=16$ ή $(z-2x)^2+(3z-4y)^2=4(z-4)^2$ ή τέλος, την

$F(x,y,z)=2x^2++8y^2+3z^2-2zx-12zy+16z-32=0$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4. Να βρεθεί η επιφάνεια που παράγεται όταν η ευθεία KM όταν αυτή κινείται παράλληλα προς τον εαυτό της, έτσι ώστε το σημείο της M να κείται πάντοτε επί της ελλείψεως $x^2+3y^2-9=0,\ z=0$. Η έκφραση κινείται παράλληλα προς τον εαυτό της, σημαίνει ότι η KM διατηρεί την διεύθυνσή της, η οποία ορίζεται από διάνυσμα $\vec{v}=(1,2,3)$. Έχουμε, λοιπόν, τις σχέσεις



$$\frac{x-x_o}{1}=\frac{y-y_o}{2}=\frac{z-z_o}{3}$$

και $x_o{}^2+4y_o{}^2-16=0,\ z_o=0$.

Άρα,

$z=3(x-x_o)$ ή $3x_o=3x-z$ και

$2z=3(y-y_o)$ ή $3y_o=3y-2z$. Τις τιμές αυές θέτουμε στην

$$x^2+3y^2-9=0$$

Και έχουμε $\left(\dfrac{3x-z}{3}\right)^2+3\left(\dfrac{3y-2z}{3}\right)^2-9=0$, ή

$F(x,y,z)=9x^2+27y^2+13z^2-6xz-36yz-81=0$.

17. Εφαπτόμενα επίπεδα. Όπως είδαμε στην §15, μία επιφάνεια παρίσταται είτε στην μορφή Gauss, είτε στην μορφή Monge, είτε στην Καρτεσιανή της έκφραση. Σε κάθε περίπτωση οι επιφάνειες υποτίθενται ***λείες***, δηλαδή, ότι οι συναρτήσεις που τις παριστούν, είναι συνεχείς μη μηδενικές, και σε κάθε σημείο τους έχουν παραγώγους.

Έστω η επιφάνεια S: $z=\varphi(x,y)$, και $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$ μία καμπύλη του χώρου. Αν η καμπύλη αυτή βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια, είναι $z(t)=\varphi(x(t),y(y))$. Η εφαπτομένη της καμπύλης αυτής στο σημείο $M(x,y,z)$ είναι και εφαπτομένη στην S, και δίδεται από τις σχέσεις $\dfrac{X-x}{x'(t)}=\dfrac{Y-y}{y'(t)}=\dfrac{Z-z}{z'(t)}$ (1), όπου $x'(t)=\dfrac{dx}{dt}$, $y'(t)=\dfrac{dy}{dt}$, $z'(t)=\dfrac{dz}{dt}$ και $P(X,Y,Z)$ το τυχόν σημείο πάνω στην εφαπτομένη..

Όμως, $z'(t)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}x'(t)+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}y'(t)$ (2).Ανάμεσα στις σχέσεις (1) και (2) κάνουμε απαλοιφή των $x'(t),\ y'(t),\ z'(t)$.

Είναι, $(Z-z)x'(t)=(X-x)z'(t)$ και $(Z-z)y'(t)=(Y-y)z'(t)$. Τις τιμές των $x'(t)$ και $y'(t)$ που λαβαίνουμε απ’ εδώ θέτουμε στην (2) και έχουμε,

$z'(t)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{X-x}{Z-z}z'(t)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{Y-y}{Z-z}z'(t)$, ή και $Z-z=\frac{\partial\varphi}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(Y-y)$ (3) Η (3) δεν εξαρτάται από την συγκεκριμένη καμπύλη $z(t)=\varphi(x(t),y(y))$. Άρα το επίπεδο (3) περιέχει την εφαπτομένη που άγεται προς κάθε καμπύλη της S, που διέρχεται από το P. Είναι, συνεπώς, το εφαπτομενικό επίπεδο της S στο σημείο P.

Στην περίπτωση, που η επιφάνεια S δίδεται στην Καρτεσιανή μορφή $F(x,y,z)=0$ και από το σημείο $M(x,y,z)$ της S διέρχεται η καμπύλη $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$, η οποία κείται επί της S, η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο P, $\frac{X-x}{x'(t)}=\frac{Y-y}{y'(t)}=\frac{Z-z}{z'(t)}=\lambda$ μαζί με την $\frac{\partial F}{\partial x}x'(t)+\frac{\partial F}{\partial y}y'(t)+\frac{\partial F}{\partial z}z'(t)=0$, δίδει την $\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0$
Η εξίσωση του εφαπτομενικού επιπέδου στην μορφή αυτή, δείχνει ότι το διάνυσμα $\vec{n}=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)$ είναι κάθετο στο εφαπτομενικό επίπεδο της S στο σημείο P. Λέμε ότι το $\vec{n}=\nabla F$ είναι κάθετο στην επιφάνεια S.

Στην περίπτωση, που η επιφάνεια S δίδεται στην μορφή του Gauss $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ $z=z(u,v)$. Πάνω στην επιφάνεια S, θεωρούμε της καμπύλες $c_1: u=\sigma\tau\alpha\theta, v=v(t_2)$ και $c_2: u=u(t_1), v=\sigma\tau\alpha\theta$. Έχουμε, τότε, $\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial x}{\partial t_1}u'$, $\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial t_1}u'$, $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial t_1}u'$ ως επίσης και $\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{\partial x}{\partial t_2}v'$, $\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial y}{\partial t_2}v'$, $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial t_2}v'$, όπου $u'=\frac{du}{dt_1}$ και $v'=\frac{dv}{dt_2}$. Η εξίσωση της εφαπτομένης στην καμπύλη c_1 είναι η $\frac{X-x}{x'(t_1)}=\frac{Y-y}{y'(t_1)}=\frac{Z-z}{z'(t_1)}$ και η εξίσωση της εφαπτομένης στην καμπύλη c_2 είναι η $\frac{X-x}{x'(t_2)}=\frac{Y-y}{y'(t_2)}=\frac{Z-z}{z'(t_2)}$. Όμως, $x'(t_1)=\frac{1}{u'}\frac{\partial x}{\partial u}$, $y'(t_1)=\frac{1}{u'}\frac{\partial y}{\partial u}$, $z'(t_1)=\frac{1}{u'}\frac{\partial z}{\partial u}$ και $x'(t_2)=\frac{1}{v'}\frac{\partial x}{\partial v}$, $y'(t_2)=\frac{1}{v'}\frac{\partial y}{\partial v}$, $z'(t_2)=\frac{1}{v'}\frac{\partial z}{\partial v}$. Τα διανύσματα $\vec{u}=(x'(t_1),y'(t_1),z'(t_1))$ και $\vec{v}=(x'(t_2),y'(t_2),z'(t_2))$ είναι δύο διανύσματα κατά των ιευθύνσεων των εφαπτομένων που άγονται από το σημείο $M(x,y,z)$ της S. Η εξίσωση, συνεπώς, του επιπέδου που τα δύο αυτά μη συγγραμμικά διανύσματα παράγουν, είναι η $\det\begin{pmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}=0$ (βλέπε §7).