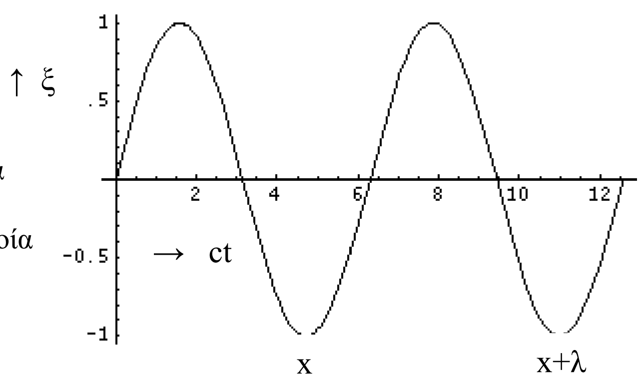
Συμβολισμοί. Με t την παράμετρο του χρόνου (σε sec). Με x, ξ, παράμετροι διαστήματος (σε cm). Με c η ταχύτης του φωτός. Λαμβάνετε ως σταθερά και εκφράζετε σε cm/sec. Με $\xi = f(x)$, παριστάνουμε μία διαταραχή που συμβαίνει στο σημείο x.

Ένα μήκος $x_1 - x_0$ ταυτίζετε συνεπώς, με τον χρόνο που χρειάζεται μιά φωτεινή ακτίνα να το διασχίσει. Είναι, συνεπώς, $x_1 - x_0 = c(t_1 - t_0)$. Η διαταραχή f στο σημείο x , στην περίπτωση που "ταξιδεύει" κατά μήκος του x-άξονα, περιγράφεται από τις σχέσεις $\xi = f(x-ct)$ ή $\xi = f(x+ct)$, ανάλογα με την κίνηση της διαταραχής προς τ' αριστερά ή τα δεξιά του x. Παρατηρούμε ότι, η συνάρτηση $\xi = f(x)$, με $x = ct$, δίδει, $\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} = c\frac{\partial f}{\partial x}$, οπότε και $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}$. Επίσης $c\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} = c\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right) = c^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = c^2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$. Άρα, τελικά, έχουμε την $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ (1) (εξίσωση κύματος).

Σημείωση. Την γενική λύση της εξισώσεως (1) την έδωσε ο d' Alembert (1747) στην μορφή $\xi = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)$. Στην περίπτωση, που η διαταραχή f είναι της μορφής $\xi = f(x_1, x_2, x_3, t)$, η (1) έχει την έκφραση $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 f$.

Ζητάμε να βρούμε συναρτήσεις f, που να πληρούν την εξίσωση κύματος (1).



μία

οποία

Το γράφημα της συναρτήσεως ημίτονο, $\xi = \sin x$, μας παρέχει μιά πρώτη αντίληψη της μορφής που έχει η συνάρτηση f, όταν εκφράζει διαταραχή, στο σημείο π.χ. $x = 2$, η επαναλαμβάνεται στο σημείο $x = 8$, κ.ο.κ. Θεωρούμε, λοιπόν μία συνάρτηση της μορφής

$\xi = \sin(x - ct)$, και δοκιμάζουμε να δούμε, αν αυτή πληροί την (1). Έχουμε,

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \cos(x-ct), \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\sin(x-ct), \text{ και,}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -c\cos(x-ct), \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -c^2 \sin(x-ct)$$

δηλαδή, $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ (εξίσωση κύματος).

Η συνάρτηση, λοιπόν $\xi = \sin(x-ct)$, λέμε ότι παριστά ένα αρμονικό κύμα.

Η πιο γενική μορφή, που ένα αρμονικό κύμα μπορεί να λάβει, είναι η

$$\xi = A\sin k(x-ct) + B\sin k(x+ct) + C\cos k(x-ct) + D\cos k(x+ct)$$

Αποδεικνύεται ότι η σταθερά k ισούται με $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, (2) όπου λ το “μήκος κύματος”. Πράγματι, για $k(x \mp ct) = 2\pi$, $\sin k(x \mp ct) = 1$, και $\sin k(x + \lambda \mp ct) = 1$. Άρα και $k(x \mp \lambda - ct) = k(x \mp ct) = 2\pi$, ή $k\lambda = 2\pi$, απ’ όπου η (2). Ο χρόνος που απαιτείται για να μεταβούμε από το σημείο x στο σημείο $x+\lambda$, καλείται περίοδος Τ της f. Είναι, $\lambda = cT$. Η συχνότητα της f ορίζεται ως $\nu = 1/T$.

Ο d’ Alembert μελέτησε την ταλάντωση χορδής μήκους λ, πακτωμένης στα δύο της άκρα. Η εξίσωση της διαταραχής $\xi = f(x + ct) - f(x - ct)$ έχει, τώρα, αρχικές συνθήκες, μια και στα άκρα της χορδής, η διαταραχή f ταυτίζεται. Είναι, συνεπώς, $f(x) = f(x \pm \lambda)$ (3). Στην συνέχεια έδειξε, ότι αν για $t = 0$, $\xi = \varphi(x)$ και $\frac{\partial \xi}{\partial t} = \psi(x)$, τότε, για όλες τις τιμές του x μεταξύ του 0 και του λ, ισχύουν οι σχέσεις, $f(x) - f(-x) = \varphi(x)$ και, $f(x) + f(-x) = \frac{1}{c}\int \psi(x)dx$. Οι σχέσεις αυτές, μαζί με την συνθήκη (3), προσδιορίζουν την f για κάθε $x \in [0, \lambda]$

Ο Fourier (1822) έδειξε ότι ορισμένες απλές συναρτήσεις $f(x)$ είναι δυνατόν να παρασταθούν υπό την μορφή τριγωνομετρικών σειρών:

$$f(x) \sim a_o + \sum_{1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad \text{όπου,}$$

$$a_o = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

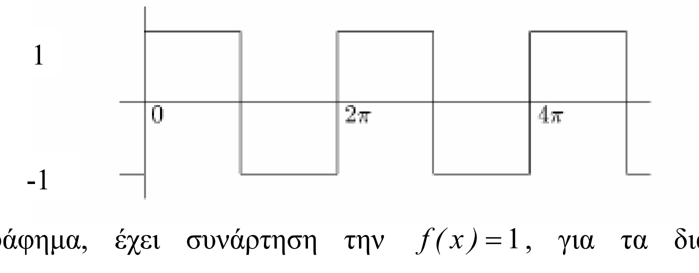
και για $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \; b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx. \quad (4)$$

Στην συνέχεια ισχυρίστηκε, ότι οιαδήποτε συνάρτηση, της οποίας μπορούμε να έχουμε το γράφημα, είναι δυνατόν να παρασταθεί ως άθροισμα τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Ο Dirichlet (1837) έδωσε το εξής κριτήριο που πρέπει να πληροί η $f(x)$, έτσι ώστε να είναι δυνατή η παράστασή της υπό την μορφή τριγωνομετρικής σειράς. Η $f(x)$, $-\pi \leq x \leq \pi$, πρέπει να είναι φραγμένη, και το διάστημα στο οποίο αυτή ορίζεται, να σπάει σε πεπερασμένο πλήθος υποδιαστημάτων μέσα στα οποία η $f(x)$ να είναι μονότονος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.



Το παραπάνω γράφημα, έχει συνάρτηση την $f(x) = 1$, για τα διαστήματα $2n\pi \leq x < (2n+1)\pi$, και $f(x) = -1$ για τα διαστήματα $(2n+1)\pi \leq x < 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$. Η συνάρτηση αυτή, πληροί το κριτήριο του Dirichlet. Είναι, λοιπόν,

$$f(x) \sim a_o + \sum_1^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\text{, όπου}$$

$$a_o = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 1dx + \int_{0}^{\pi} 1dx\right) = 0$$

$$a_n = \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nxd(nx) = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nxd(nx) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left(-\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{(-1)^n}{n}\right) = \begin{cases} 4/n\pi & \text{για } n = 2k+1 \\ 0 & \text{για } n = 2k \end{cases}$$

και, συνεπώς, $$f(x) \sim \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \dots\right)$$

Προσέγγιση συνεχούς συναρτήσεως $f(x),\ x \in [0,\ 2\pi]$, με τριγωνομετρικά πολυώνυμα.

Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathcal{C}$, όλων των συνεχών συναρτήσεων, που ορίζονται στο κλειστό διάστημα [0, 2π]. Ορίζουμε την μετρική του χώρου αυτού (βλέπε ενότητα "Η μετρική του χώρου") θέτοντας $f \cdot g = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$. Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$, όπου $\varphi_0(x) = \frac{1}{2\pi}$, $\varphi_{2k-1}(x) = \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}$, $\varphi_{2k}(x) = \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}$, $1 \le k \le n$. Οι συναρτήσεις αυτές, παράγουν έναν υπόχωρο $\mathcal{S}$ του $\mathcal{C}$, διαστάσεως $2n+1$. Τα στοιχεία του $\mathcal{S}$ καλούνται ***τριγωνομετρικά πολυώνυμα***. Αν $f(x) \in \mathcal{C}$, έστω f_n η προβολή του επί του $\mathcal{S}$. Είναι, τότε, $f_n = \sum_{i=0}^{2n} (\varphi_i \cdot f)\varphi_i$. Είναι, λοιπόν,

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right),$$

όπου a_0, a_k, b_k όπως εν (4).