III. Ο Ρ Ι Ζ Ο Υ Σ Ε Σ

1. Μεταθέσεις. Θεωρούμε ένα σύνολο N με πεπερασμένο το πλήθος αντικείμενα. Τα αριθμούμε αυτά κατά κάποιο τρόπο, και στη συνέχεια, αναφερόμεθα σ' αυτά με τον αριθμό τους. Εστω, λοιπόν, N = {1, 2, . . . , n} το δοσμένο σύνολο. Έστω S_p το σύνολο των μεταθέσεων (βλέπε σελ. 19) $p: N \to N$. Την μετάθεση p [permutation] την συμβολίζουν ως εξής:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ p(1) & \cdots & p(n) \end{pmatrix}$$

Η εικόνα p(1), . . . ,p(n) του πεδίου ορισμού {1, . . . ,n} της p, καλείται ***διάταξις*** του N. Φανερά, έχουμε τόσες διατάξεις του N, όσες και μεταθέσεις p.

Η διάταξη (1, 2, . . . ,n) αντιστοιχεί στην ταυτοτική μετάθεση του N.

Γιά να βρούμε το πλήθος των διατάξεων του N, σκεπτόμεθα ως εξής: Αν κάθε διάταξη προκύπτει από την ενέργειά μας, να γεμίσουμε κάποια από τις n θέσεις του σχήματος

1	2	. . .	n

τότε, η πρώτη θέση γεμίζει με n διαφορετικούς τρόπους. Η δεύτερη θέση, με n−1 διαφορετικούς τρόπους. Η Τρίτη με n−2, κ.ο.κ., η τελευταία, με ένα και μόνο τρόπο. Αρα το πλήθος των διαφορετικών τρόπων, που γεμίζουν όλες τις πραπάνω θέσεις, είναι $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot n = n!$ Εχουμε συνεπώς, n! το πλήθος διατάξεις των n αντικειμένων.

Το γινόμενο st δύο μεταθέσεων s και t ορίζεται πάντα μέσα στο S, ως η σύνθεση των s και t. Είναι:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ s(1) & s(2) & \cdots & s(n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ t(1) & t(2) & \cdots & t(n) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ s(1) & s(2) & \cdots & s(n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1' & 2' & \cdots & n' \\ t(1') & t(2') & \cdots & t(n') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ t(1') & t(2') & \cdots & t(n') \end{pmatrix}$$

όπου $i' = s(i)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Η πράξη του πολλαπλασιασμού καθιστά το σύνολο S ομάδα. Ουδέτερο στοιχείο της ομάδας αυτής, που έχει n! το πλήθος στοιχεία, και συμβολίζεται με το S_n, είναι η ταυτοτική μετάθεση.

Η αντίστροφη της $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ s(1) & \cdots & s(n) \end{pmatrix}$ είναι η $\begin{pmatrix} s(1) & \cdots & s(n) \\ 1 & \cdots & n \end{pmatrix}$.

Μία μετάθεση της μορφής $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$ καλείται ***κυκλική*** μετάθεση. Την κυκλική μετάθεση την συμβολίζουν $(1 \; \ldots \; n)$. Μία κυκλική μετάθεση, που ορίζεται σε ένα σύνολο δύο αντικειμένων, καλείται ***αντιμετάθεσις*** (transposition).

Με (k) συμβολίζουμε την απεικόνιση του k στον εαυτό του. Παράγοντες αυτής της μορφής, παραλείπονται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. $(1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 5)(2 \;\; 3 \;\; 5 \;\; 4) =$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&5&4\\3&5&4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&4&5&1\\3&5&2&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&2&4&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&2&3&5\\3&5&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&2&5\\3&2&5&1\end{pmatrix}=(1\quad 3\quad 2\quad 5)$$

Στις προτάσεις που ακολουθούν, αντί γενικής αποδείξεως, θα δίδουμε ένα παράδειγμα, μέσα από το οποίο θα γίνεται φανερός ο γενικός αλγόριθμος, που αποδεικνύει την πρόταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1. Μία μετάθεση παρίσταται ως γινόμενο ***ανεξαρτήτων*** κυκλικών μεταθέσεων. (Ανεξαρτήτων σημαίνει ότι δεν έχουν κοινά στοιχεία).
Παράδειγμα. Εχουμε λοιπόν, ότι,
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&5&4&3&6&1&7&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&5&6\\2&5&6&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\8\end{pmatrix}=(1\quad 2\quad 5\quad 6)(3\quad 4)$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2. Δύο αντιμεταθέσεις, που δεν έχουν κοινό στοιχείο αντιμετατίθενται.
Παράδειγμα. Είναι $(1\quad 2)(3\quad 4)=(3\quad 4)(1\quad 2)$, μιά και
$$(1\quad 2)(3\quad 4)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4&1&2\\4&3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$$
$$(3\quad 4)(1\quad 2)=\begin{pmatrix}3&4&1&2\\4&3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&4&3\\2&1&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3. Κάθε κυκλική μετάθεση, παρίσταται ως γινόμενο ενός ελαχίστου αριθμού n–1 αντιμεταθέσεων.
Παράδειγμα. Είναι, $(1\quad 2\quad 3\quad 4)=(4\quad 3)(3\quad 2)(2\quad 1)$.
Επίσης, $(1\quad 2\quad 3\quad 4)=(1\quad 2)(1\quad 3)(1\quad 4)$.
Βλέπουμε ότι, η παράσταση μιάς μεταθέσεως ως γινόμενο αντιμεταθέσεων, δεν είναι μοναδική. Το πλήθος όμως των παραγόντων στους οποίους αυτή αναλύεται, είναι το ολιγότερο n–1. Πράγματι, το πλήθος αυτό μπορεί να αυξηθεί, αν πολλαπλασιάσουμε το γινόμενο των n–1 παραγόντων από το ζεύγος των κυκλικών μεταθέσεων $(\nu\quad\mu)(\nu\quad\mu)$.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ 1) Κάθε μετάθεση παρίσταται ως γινόμενο k–r αντιμεταθέσεων, κατ' ελάχιστον, όπου r είναι το πλήθος των ταυτοτικών κύκλων που περιέχει, και k το πλήθος των στοιχείων που μεταβάλλει.
Π.χ. στην μετάθεση της προτάσεως 1, έχουμε, n = 8, r = 2 και k = 6.
Είναι πράγματι, $(1\quad 2\quad 5\quad 6)(3\quad 4)=(1\quad 2)(1\quad 5)(1\quad 6)(3\quad 4)$, 4 αντιμεταθέσεις σύμφωνα με τον κανώνα k–r = 6–2.

2) Μία μετάθεσις αναλύεται σε γινόμενο είτε αρτίου είτε περιττού πλήθους αντιμεταθέσεων.

3) Το πλήθος των αντιμεταθέσεων εις το οποίον αναλύεται μία μετάθεσις κατά την παραγοντοποίησή της, είναι k–r+2s, όπου s τυχόν φυσικός. Ακριβώς το ίδιο πλήθος παραγόντων έχει και η αντίστροφος αυτής μετάθεσις.

Ορισμός. ***Αρτία*** καλείται εκείνη η μετάθεσις, η οποία αναλύεται σε γινόμενο αρτίου πλήθους παραγόντων. ***Περιττή***, εκείνη η οποία αναλύεται σε γινόμενο περιττού πλήθους παραγόντων. Εξ' ορισμού, η ταυτοτική είναι πάντοτε αρτία.

4) Το σύνολο S_n περιέχει $\frac{n!}{2}$ άρτιες και $\frac{n!}{2}$ περιττές μεταθέσεις.

5) Μία κυκλική μετάθεση είναι αρτία ή περιττή ανάλογα με το αν το πλήθος των στοιχείων στα οποία αυτή δρά είναι περιττό ή άρτιο. Αν μία μετάθεση είναι αρτία, τότε και η αντίστροφός της είναι αρτία. Το ίδιο σημβαίνει και στην περίπτωση περιττής μετάθεσης Είναι π.χ. η $(1\ \ 2\ \ 5\ \ 6)(3\ \ 4) = (1\ \ 2)(1\ \ 5)(1\ \ 6)(3\ \ 4)$ είναι αρτία μετάθεση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Να βρεθεί το είδος της διατάξεως $(2\ \ 1\ \ 3\ \ 5\ \ 6\ \ 4)$.

Λύση. Στη διάταξη αυτή, αντιστοιχεί η μετάθεση $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$. Την γράφουμε ως γινόμενο παραγόντων κυκλικών μεταθέσεων:
$(1\ \ 2)(4\ \ 5\ \ 6) = (1\ \ 2)(4\ \ 5)(4\ \ 6)$, που είναι περιττή μετάθεση.

Το είδος μιάς μεταθέσεως, ευρίσκεται και από το πόσες φορές η μετάθεσή μας αλλάζει το πρόσημο του πολυωνύμου, (1+2+ . . . +n = $\dfrac{n(n+1)}{2}$ παράγοντες),

$$\begin{aligned}\prod_{i<j}(x_i - x_j) = (x_1 - x_n)(x_2 - x_n)\ \cdots\ &(x_{n-1} - x_n)\\ (x_1 - x_{n-1})\ \cdots\ &(x_{n-2} - x_{n-1})\\ &\ddots\\ &(x_1 - x_2).\end{aligned}$$

Ετσι, π.χ. γιά την μετάθεση $(1\ \ 2\ \ 3)$, όταν αυτή δράση πάνω στους δείκτες του αρχικού πολυώνυμου $(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_1 - x_2)$ δίδει το $(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_2 - x_3)$. Το πολυώνυμο που προκύπτει, ισούται με το αρχικό, μιά και αλλάζει δύο φορές πρόσημο. Συνεπώς η σημειούμενη μετάθεση, είναι αρτία.

2. Ορίζουσες. Μία πραγματική συνάρτηση $\Delta(a_1, a_2, \ \dots\ , a_n)$ όπου $(a_1, a_2, \ \dots\ , a_n) \in \mathbf{V}^n$, $\mathbf{V} = \mathbb{R}^n$ καλείται ***ορίζουσα*** n–τάξεως, ανν πληροί τις παρακάτω συνθήκες:
i) Η Δ είναι γραμμική ως πρός κάθε μία μεταβλητή a_i. Ισχύει δηλαδή ότι,
$\Delta(a_1, \ \dots\ , \lambda a_i + \xi b_i, \ \dots\ , a_n) = \lambda\Delta(a_1, \ \dots\ , a_i, \ \dots\ , a_n) + \xi\Delta(a_1, \ \dots\ , b_i, \ \dots\ , a_n)$.
ii) Αν $a_i = a_j$ γιά κάποιους δείκτες i και j ($i \neq j$), τότε $\Delta(a_1, \ \dots\ , a_i, \ \dots\ , a_j, \ \dots\ , a_n) = 0$.
iii) $\Delta(e_1, e_2, \ \dots\ , e_n) = 1$ όπου $\{e_1, e_2, \ \dots\ , e_n\}$ η (διατεταγμένη) κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. 1) $\Delta(a_1, \ \dots\ , a_i, a_{i+1}, \ \dots\ , a_n) = -\Delta(a_1, \ \dots\ , a_{i+1}, a_i, \ \dots\ , a_n)$.

2) Αν κάποιο από τα διανύσματα a_i είναι το μηδενικό διάνυσμα, τότε $\Delta(a_1, a_2, \ \dots\ , a_n) = 0$

3) Αν η ακολουθία των $b_1, b_2, \ \dots\ , b_n$ λαβαίνεται από την ακολουθία των $a_1, a_2, \ \dots\ , a_n$ διά της μεταθέσεως του a_i κατά k θέσεις προς τα αριστερά ή τα δεξιά είναι, $\Delta(b_1, b_2, \ \dots\ , b_n) = (-1)^k \Delta(a_1, a_2, \ \dots\ , a_n)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1. Γιά n = 1, θεωρούμε το τυχόν διάνυσμα αe$\in \mathbb{R}$. Είναι τότε,
Δ(αe) = αΔ(e) = α.
Γιά n = 2, θεωρούμε τα τυχόντα διάνυσμα $a_1 = \alpha_{11}e_1 + \alpha_{12}e_2$ και $a_2 = \alpha_{21}e_1 + \alpha_{22}e_2 \in \mathbb{R}^2$.
Είναι τότε, $\Delta(a_1, a_2) = \Delta(\alpha_{11}e_1 + \alpha_{12}e_2, \alpha_{21}e_1 + \alpha_{22}e_2) =$

$$\begin{gathered}\alpha_{11}\Delta(e_1, \alpha_{21}e_1 + \alpha_{22}e_2) + \alpha_{12}\Delta(e_2, \alpha_{21}e_1 + \alpha_{22}e_2) =\\ \alpha_{11}\alpha_{21}\Delta(e_1, e_1) + \alpha_{11}\alpha_{22}\Delta(e_1, e_2) + \alpha_{12}\alpha_{21}\Delta(e_2, e_1) + \alpha_{12}\alpha_{22}\Delta(e_2, e_2) =\\ \alpha_{11}\alpha_{22}\Delta(e_1, e_2) - \alpha_{12}\alpha_{21}\Delta(e_1, e_2) = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}\end{gathered}$$

Γράφουμε και

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}.$$

Γιά n = 3,
θεωρούμε τα τυχόντα διάνυσμα $a_1 = \alpha_{11}e_1 + \alpha_{12}e_2 + \alpha_{13}e_3$, $a_2 = \alpha_{21}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \alpha_{23}e_3$ και $a_3 = \alpha_{31}e_1 + \alpha_{32}e_2 + \alpha_{33}e_3 \in \mathbb{R}^3$. Γιά να υπολογίσουμε την $\Delta(a_1, a_2, a_3)$ παρατηρούμε ότι κάθε a_i, i = 1,2,3, δίδει τρείς όρους. Η $\Delta(a_1, a_2, a_3)$ συνεπώς αναλύεται σε ένα άθροισμα $3^3 = 27$ όρων της μορφής $\alpha_{1i}\alpha_{2j}\alpha_{1k}\Delta(e_i, e_j, e_k)$. Oμως, οι όροι, που έχουν i = j είτε j = k είτε k = i, ισούνται με μηδέν. Απομένουν συνεπώς 3! μη μηδενικοί όροι, που αντιστοιχούν στις 3! διαφορετικές διατάξεις των 1, 2, 3. Είναι, λοιπόν,

$$\begin{aligned}\Delta(a_1, a_2, a_3) &= \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}\Delta(e_1, e_2, e_3) + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31}\Delta(e_2, e_3, e_1) + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32}\Delta(e_3, e_1, e_2) \\ &\quad + \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33}\Delta(e_2, e_1, e_3) + \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31}\Delta(e_3, e_2, e_1) + \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32}\Delta(e_1, e_3, e_2) \\ &= \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32}.\end{aligned}$$

Γράφουμε και $\Delta(a_1,a_2,a_3) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$

Από τους παραπάνω υπολογισμούς, προκύπτει ότι: Η $\Delta(a_1, a_2, a_3)$ έχει ως τιμή ένα άθροισμα από 3! όρους, όσες οι διατάξεις των 1, 2, 3. Το πρόσημο εκάστου όρου είναι "+" ή "–", ανάλογα με το αν η διάταξη p(1, 2, 3) (που αποτελεί τους δεύτερους δείκτες κάθε όρου, οι πρώτοι δείκτες είναι πάντα στην διάταξη 1, 2, 3) είναι αρτία ή περιττή.

Στην γενική περίπτωση έχουμε λοιπόν, $\Delta(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum s(p)\alpha_{1p(1)}\cdots\alpha_{np(n)}$ όπου το σημειούμενο άθροισμα έχει n! όρους, και s(p) είναι + ή – ανάλογα με το αν η σημειούμενη μετάθεση p είναι αρτία ή περιττή. (s(p) = πρόσημο της p).

Οι παραπάνω υπολογισμοί, δείχνουν ότι, υπάρχει το πολύ μία συνάρτηση Δ, που να πληροί τις αρχικές συνθήκες i), ii) και iii). Εύκολα αποδεικνύεται και το αντίστροφο. Oτι δηλαδή, αν ορίσουμε την Δ από την σχέση

$$\Delta(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum s(p)\alpha_{1p(1)} \cdots \alpha_{np(n)}$$

τότε η συνάρτηση Δ: $\mathbf{V}^n \to \mathbb{R}$ έχει τις ιδιότητες i), ii) και iii). Η Δ καλείται ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ & \ddots & \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = (\alpha_{ij}).$$

Γράφουμε και $\Delta_n = \Delta = \det A = |(\alpha_{ij})|$, και καλούμε την Δ, στην μορφή του παραπάνω αθροίσματος, ***ανάπτυγμα*** της ορίζουσας του πίνακα A.

Οι ιδιότητες i), ii) και iii) όταν εφαρμόζονται επί της $\Delta = |(\alpha_{ij})|$, ερμηνεύονται ως εξής:

i) α) Η τιμή της Δ πολλαπλασιάζεται επί λ, αν αντικαταστήσουμε κάθε όρο μιάς οιασδήποτε γραμμής της (αντ. κολώνα της) με λ φορές τον όρο αυτό.

$$\lambda\Delta = \begin{vmatrix} \lambda\alpha_{11} & \cdots & \lambda\alpha_{1n} \\ & \ddots & \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

β) Αν όλοι οι όροι μιάς γραμμής (αντ. κολώνας) της Δ είναι άθροισμα δύο όρων, τότε η Δ ισούται με το άθροισμα δύο οριζουσών, κάθε μία περιέχουσα την γραμμή που σχηματίζουν οι όροι του αθροίσματος. Π.χ.

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}+\beta_{11} & \cdots & \alpha_{1n}+\beta_{1n} \\ & \ddots & \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ & \ddots & \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} \\ & \ddots & \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

ii) α) Μία ορίζουσα που έχει δύο ίδιες γραμμές (αντ. κολώνες) ισούται με μηδέν.
β) Η εναλλαγή δύο διαδοχικών γραμμών (αντ. κολωνών) έχει σαν συνέπεια της αλλαγής του προσήμου της Δ.
iii) Είναι $|(\delta_{ij})| = 1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 100 & 101 & 102 \\ 101 & 102 & 103 \\ 102 & 103 & 104 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100 & 100+1 & 102 \\ 101 & 101+1 & 103 \\ 102 & 102+1 & 104 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100 & 1 & 101+1 \\ 101 & 1 & 102+1 \\ 102 & 1 & 103+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100 & 1 & 100+1 \\ 101 & 1 & 101+1 \\ 102 & 1 & 102+1 \end{vmatrix} = 0$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 4. Αν $A^t = (\alpha_{ji})$, τότε είναι και detA = detA^t.

Απόδειξη. Και οι δύο ορίζουσες έχουν n! όρους στα αναπτύγματά τους. Ενας από τους όρους της detA είναι ο $s(p)\alpha_{1p(1)} \cdots \alpha_{np(n)}$. Σ' αυτόν, αντιστοιχεί ο όρος $s(p)\alpha_{p(1)1} \cdots \alpha_{p(n)n}$ της detA^t. Παρατηρούμε ότι, η αντιστοιχία

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ p(1) & \cdots & p(n) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} p(1) & \cdots & p(n) \\ 1 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

είναι η $p \mapsto p^{-1}$. Αρα είναι και οι δύο άρτιες, ή και οι δύο περιττές μεταθέσεις. Αρα σε κάθε όρο της detA, αντιστοιχεί όρος της $\det A^t$, με το ίδιο πρόσημο. Τέλος, κάθε όρος του αναπτύγματος της detA περιέχει ένα στοιχείο που ανήκει σε ακριβώς μία γραμμή και μία κολώνα. Το ίδιο όμως ισχύει και γιά την $\det A^t$. Κάθε όρος συνεπώς στο ανάπτυγμα της πρώτης ορίζουσας, έχει τον αντίστοιχό του στο ανάπτυγμα της δεύτερης, και οι όροι αυτοί, εμφανίζονται στα αντίστοιχα αναπτύγματα, με τα ίδια πρόσημα.

Ορισμοί. Αν από τον n×n πίνακα A της ορίζουσας Δ = detA παραλείψουμε την γραμμή και την κολώνα που περιέχουν το στοιχείο α_{ij} προκύπτει ένας (n–1)×(n–1) πίνακας A_{ij}, που καλείται, όπως και η ορίζουσά του, ***ελάσσων*** (minor) της Δ που αντιστοιχεί στο στοιχείο α_{ij}. Ο αριθμός $(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ καλείται ***συντελεστής*** (cofactor) ή ***αλγεβρικό συμπλήρωμα*** C_{ij} ή A_{ij} (κατάχρηστικά, χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο) του στοιχείου α_{ij}. ***Τάξη*** της Δ καλείται το πλήθος n των γραμμών (ή των στηλών) της.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5. Ισχύουν οι σχέσεις: $\Delta = \alpha_{i1}A_{i1} + \alpha_{i2}A_{i2} + \ \ldots \ + \alpha_{in}A_{in}$ (ανάπτυγμα της Δ κατά τα στοιχεία της i γραμμής) και $\Delta = \alpha_{1j}A_{1j} + \alpha_{2j}A_{2j} + \ \ldots \ + \alpha_{nj}A_{nj}$ (ανάπτυγμα της Δ κατά τα στοιχεία της j κολώνας).
Απόδειξη. Θεωρούμε κατ' αρχήν την περίπτωση i = 1 (ανάπτυγμα της Δ κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής). Είναι, $a_1 = \alpha_{11}e_1 + \alpha_{12}e_2 + \ \ldots \ + \alpha_{1n}e_n$. Αρα και

$$\Delta(a_1, a_2, \ \ldots \ , a_n) = \Delta(\alpha_{11}e_1 + \ \ldots \ + \alpha_{1n}e_n, a_2, \ \ldots \ , a_n)$$
$$= \alpha_{11}\Delta(e_1, a_2, \ \ldots \ , a_n) + \alpha_{12}\Delta(e_2, a_2 + \ \ldots \ + \alpha_{1n}e_n) + \ \ldots \ + \alpha_{1n}\Delta(e_n, a_2 + \ \ldots \ + \alpha_{1n}e_n).$$

Αρκεί να δείξουμε ότι, $A_{1j} = \Delta(e_j, a_2, \ \ldots \ , a_n)$ για κάθε j = 1, . . . ,n.
Ας δείξουμε την $A_{11} = \Delta(e_1, a_2, \ \ldots \ , a_n)$. Είναι,

$\Delta(e_1, a_2, \ \ldots \ , a_n) = \sum s(p)\delta_{1p(1)}\alpha_{2p(2)} \ \cdots \ \alpha_{np(n)}$. Οι μη μηδενικοί όροι του αθροίσματος αυτού, είναι εκείνοι που έχουν στο δ δείκτες i, p(i) με i = p(i), και γιά τους οποίους έχουμε ότι, $\delta_{i,i} = 1$. Το προηγούμενο άθροισμα μετατρέπεται συνεπώς, στο

$\sum s(p)\alpha_{2p(2)} \ \cdots \ \alpha_{np(n)}$. (Π.χ. για n = 3, έχουμε τους όρους

$$= \delta_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \delta_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \delta_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \delta_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} - \delta_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} - \delta_{11}\alpha_{23}\alpha_{32}$$

$= \delta_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \delta_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} = \alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{32}$). Το $\sum s(p)\alpha_{2p(2)} \ \cdots \ \alpha_{np(n)}$ όμως, είναι ο A_{11}.
Δείξαμε συνεπώς ότι,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ & \ddots & \\ \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

Ομοια έχουμε ότι, $\Delta(a_1, e_2, \ \ldots \ , a_n) = (-1)A_{12}$ και γενικά,

$\Delta(a_1, \ \ldots \ , e_j, \ \ldots \ , a_n) = (-1)^{1+j}A_{1j}$. Δείξαμε λοιπόν ότι,

$\Delta = \alpha_{11}A_{11} + \alpha_{12}A_{12} + \ \ldots \ + \alpha_{1n}A_{1n}$. Ανάλογα εργαζόμαστε γιά το ανάπτυγμα ως προς τα στοιχεία της i-γραμμής.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2. Τα δύο προηγούμενα αναπτύγματα, γράφονται και στην μορφή

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}A_{jk} = \delta_{ij}\Delta \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{n}\alpha_{kj}A_{ki} = \delta_{ji}\Delta .$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. $\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$

$$= \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32}$$

$$= \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31}$$

$$= \alpha_{11}\det\begin{bmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} - \alpha_{12}\det\begin{bmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{bmatrix} + \alpha_{13}\det\begin{bmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{bmatrix}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ. Αν ο πίνακας A είναι άνω (ή κάτω) τριγωνικός, τότε η detA ισούται με το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων του.

Ορισμοί. Αν από τον πίνακα A μιάς ορίζουσας Δ επιλέξουμε k γραμμές και k κολώνες, σχηματίζουμε μία k τάξεως ελάσσωνα M της ορίζουσας. Οι υπόλοιπες n–k γραμμές και n–k κολώνες σχηματίζουν μία n–k τάξεως ορίζουσα, η οποία καλείται συμπλήρωμα της M. Στην περίπτωση, που k = 1, έχουμε τις ορίζουσες $\det(\alpha_{ij}) = \alpha_{ij}$ και $\det(A_{ij}) = A_{ij}$. Για να λάβουμε μία έννοια ανάλογο με αυτήν του cofactor, θεωρούμε το ***αλγεβρικό συμπλήρωμα*** της M, που είναι το συμπλήρωμα της M με κατάλληλο πρόσημο. Το πρόσημο αυτό δίδεται από το $(-1)^m$ όπου m = k+l, k το άθροισμα των δεικτών των επιλεγμένων στύλων, και l το άθροισμα των δεικτών των επιλεγμένων γραμμών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6. Εστω η $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{25} & \alpha_{26} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \alpha_{35} & \alpha_{36} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \alpha_{45} & \alpha_{46} \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} & \alpha_{55} & \alpha_{56} \\ \alpha_{61} & \alpha_{62} & \alpha_{63} & \alpha_{64} & \alpha_{65} & \alpha_{66} \end{vmatrix}$.

Αν λάβουμε την ελάσσωνα $M = \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$, τότε, το συμπλήρωμά της είναι η

$N = \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} \\ \alpha_{42} & \alpha_{44} & \alpha_{45} & \alpha_{46} \\ \alpha_{52} & \alpha_{54} & \alpha_{55} & \alpha_{56} \\ \alpha_{62} & \alpha_{64} & \alpha_{65} & \alpha_{66} \end{vmatrix}$, και το αλγεβρικό της συμπλήρωμα, η $(-1)^{2+3+1+3}N$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3. Γενίκευση του προηγούμενου αναπτύγματος κατά τα στοιχεία μιάς γραμμής (ή κολώνας) μιάς ορίζουσας Δ, αποτελεί το κατά Laplace ανάπτυγμά της: Από την Δ λαβαίνουμε όλες τις k τάξεως ελάσσωνες, πολλαπλασιάζουμε κάθε μία απ' αυτές επί το αλγεβρικό της συμπλήρωμα, και σχηματίζουμε το άθροισμα όλων των προηγούμενων γινομένων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6. Να υπολογίσεται την ορίζουσα $\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

Επειδή σε δύο κολώνες εμφανίζονται αρκετά μηδενικά, θα αναπτύξουμε κατά Laplace με ελάσσωνες τάξεως 2. Το πλήθος αυτών είναι, όσες οι επιλογές των 2 από τα 5. Είναι δηλαδή, $\frac{5!}{2!3!} = 10$. Σ' αυτές τις 10 ελάσσωνες, περιλαμβάνονται και αρκετές μηδενικές. Για να τις βρούμε, μαζεύουμε όλα τα μηδενικά στοιχεία στην άνω αριστερή γωνία, μετακινώντας κατάλληλα τις γραμμές και τις κολώνες,

οπότε η Δ ισούται με $\Delta = (-1)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 5 \\ -4 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$. Φανερά, τώρα, οι μη μηδενικές ελάσσωνες τάξεως 2, είναι αυτές που περιέχουν τις γραμμές 3 και 4, 3 και 5, 4 και 5. Στο κατά Laplace λοιπόν ανάπτυγμα της Δ, εμφανίζεται το άθροισμα των όρων:

$$\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Για να βρούμε το πρόσημο κάθε όρου, παρατηρούμε ότι: Ο πρώτος όρος, περιέχει στοιχεία (της τάξεως 2 ελάσσωνος) από την 3η, 4η γραμμή, και την 1η, 2η κολώνα. Ο δεύτερος όρος από την 3η, 5η γραμμή, και την 1η, 2η κολώνα. Ο τρίτος όρος, από την 4η, 5η γραμμή και την 1η, 2η κολώνα. Αρα το πρόσημο του πρώτου όρου είναι $(-1)^{3+4+1+2}$, του δεύτερου όρου είναι $(-1)^{3+5+1+2}$, και του τρίτου όρου είναι $(-1)^{4+5+1+2}$.
Είναι λοιπόν, $-\Delta = (-8)(20)-(-10)(62)+(7)(87) = 1059$. Αρα $\Delta = -1059$.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Αν τον πίνακα A της ορίζουσας Δ, μπορούμε να τον χωρίσουμε σε τέσσερα τμήματα A_1, B_1, A_2 B_2 σε τρόπο ώστε, κάθε ένα από τα τμήματα αυτά να είναι ένας τετραγωνικός πίνακας, τότε ισχύει ότι,

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1B_2 - A_2B_1 .$$

ΘΕΩΡΗΜΑ. Αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι το σύνολο $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ γραμμικά εξαρτημένο, είναι η $\Delta(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$.
Απόδειξη. α) Το $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο. Τότε κάποιο από τα a, έστω το a_k, γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Τότε όμως $\Delta = 0$.
β) Εστω $\Delta = 0$. Υποθέτουμε κατ' αρχήν, ότι για κάποιο στοιχείο α_{pq} είναι $A_{pq} \neq 0$.

Είναι, $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}A_{ij} = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Αρα και $\sum_{j=1}^{n} A_{pj}a_j = 0$. Η σχέση αυτή δείχνει ότι το σύνολο $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο. Τώρα, για την περίπτωση, που δεν έχουμε μη μηδενικό A_{pj}, αλλά βέβαια δεν είναι όλα τα $a_j = 0$, θα υπάρχει κάποιος δείκτης r για τον οποίο, η r τάξεως ελάσσων M είναι $\neq 0$. Η M σχηματίζεται από τα μη μηδενικά διανύσματα a. Μπορούμε να θεωρούμε την M στην άνω αριστερή γωνία του πίνακα της Δ. Είναι λοιπόν, $M = (\alpha_{kl})$, $l = 1, \ldots, r$, $r < n$. Αυξάνουμε τώρα την τάξη του M κατά 1, χρησιμοποιούντες στοιχεία από κάποιο μηδενικό a. Η ορίζουσα του επαυξιμένου αυτού πίνακα, είναι τότε, ίση με μηδέν. Είναι συνεπώς, $\Delta = \sum_{j=1}^{r+1} \alpha_{ij}A_{ij} = 0$, και συνεπώς, το σύνολο $\{a_1, a_2, \ldots, a_{r+1}\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο. Αρα και το αρχικό σύνολο είναι γραμμικά εξαρτημένο.

ΠΑΡΑΔΗΓΜΑΤΑ 11. α) Είναι, $\Delta = |(\delta_{ij}\alpha)| = \alpha^n$.

β) Η ορίζουσα του Vandermonde.

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \cdots & x_1^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \cdots & x_n^0 \end{vmatrix}$$

Για n = 1 και n = 2 έχουμε αντίστοιχα, $\Delta_1 = 1$ και $\Delta_2 = x_1^1 - x_2^1$.

Για n = 3 είναι, $$\Delta_3(x) = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1^1 & 1 \\ x_2^2 & x_2^1 & 1 \\ x_3^2 & x_3^1 & 1 \end{vmatrix}$$

και αυτή είναι ένα πολυώνυμο του $x = x_1$ έστω, δευτέρου βαθμού. Παρατηρούμε ότι, για

$x = x_2$ ή $x = x_3$ η Δ_3 μηδενίζεται. Αρα οι τιμές x_2 και x_3 είναι ρίζες του πολυωνύμου αυτού. Είναι λοιπόν, $\Delta_3 = A(x - x_2)(x - x_3)$. Ο συντελεστής Α δεν είναι άλλος από τον $C_{11} = (x_1 - x_2)$. Αρα $\Delta_3 = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$. Ομοια βρίσκουμε ότι,

$$\begin{aligned} \Delta = (x_1 - x_n)(x_2 - x_n) \cdots (x_{n-1} - x_n) \\ (x_1 - x_{n-1}) \cdots (x_{n-2} - x_{n-1}) \\ \ddots \\ (x_1 - x_2) = \prod_{i<j} (x_i - x_j) \end{aligned}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ. Ισχύει ότι, det(AB) = (detA)(detB). (AB είναι το γινόμενο των πινάκων A και B. Τον ορισμό του γινομένου αυτού, τον δίδουμε παρακάτω).

Απόδειξη. Θα κάνουμε την απόδειξη για ορίζουσα 3 τάξεως μιά και παρόμοια είναι η απόδειξη για ορίζουσα n τάξεως. Γράφουμε πρώτα, το (detA)(detB) όπως φαίνεται δίπλα. Μηδενίζουμε στη συνέχεια, τις θέσεις που κατέχουν τα β. Τούτο επιτυγχάνεται, αν πολλαπλασιάσουμε την γραμμή 1 διαδοχικά επί β_{11}, β_{21}, β_{31} και την προσθέσουμε στις γραμμές 4, 5 και 6, οπότε θα μηδενιστούν τα β_{11}, β_{21}, β_{31}. Στη συνέχεια, πολλαπλασιάζουμε την γραμμή 2 διαδοχικά επί β_{12}, β_{22}, β_{32} και την προσθέτουμε στις γραμμές 4, 5, 6, οπότε θα μηδενιστούν τα β_{12}, β_{22}, β_{32}. Τέλος πολλαπλασιάζουμε την γραμμή 3 διαδοχικά επί β_{13}, β_{23}, β_{33} και την προσθέτουμε στις γραμμές 4, 5 και 6, οπότε θα μηδενιστούν τα β_{13}, β_{23}, β_{33} και θα έχουμε τελικά, την ορίζουσα,

$$(\det A)(\det B) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & -1 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 & -1 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix}$$

$$(\det A)(\det B) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdot & \alpha_{13} & -1 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \cdot & \alpha_{23} & 0 & -1 & 0 \\ \alpha_{31} & \cdot & \alpha_{33} & 0 & 0 & -1 \\ \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} + \alpha_{13}\beta_{31} & \cdots & \alpha_{11}\beta_{13} + \alpha_{12}\beta_{23} + \alpha_{13}\beta_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{22}\beta_{21} + \alpha_{23}\beta_{31} & \cdots & \alpha_{21}\beta_{13} + \alpha_{22}\beta_{23} + \alpha_{23}\beta_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{31}\beta_{13} + \alpha_{32}\beta_{23} + \alpha_{33}\beta_{33} & \cdots & \alpha_{31}\beta_{13} + \alpha_{32}\beta_{23} + \alpha_{33}\beta_{33} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

η οποία, αν την αναπτύξουμε κατά Laplace, ισούται με την

$$-(-1)^3 \begin{vmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} + \alpha_{13}\beta_{31} & \alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22} + \alpha_{13}\beta_{32} & \alpha_{11}\beta_{13} + \alpha_{12}\beta_{23} + \alpha_{13}\beta_{33} \\ \alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{22}\beta_{22} + \alpha_{23}\beta_{32} & \alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{22}\beta_{22} + \alpha_{23}\beta_{32} & \alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{22}\beta_{22} + \alpha_{23}\beta_{32} \\ \alpha_{31}\beta_{13} + \alpha_{32}\beta_{23} + \alpha_{33}\beta_{33} & \alpha_{31}\beta_{13} + \alpha_{32}\beta_{23} + \alpha_{33}\beta_{33} & \alpha_{31}\beta_{13} + \alpha_{32}\beta_{23} + \alpha_{33}\beta_{33} \end{vmatrix}$$

που είναι η det(AB).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. Να προσδιορίσετε αν και κατά πόσον, τα παρακάτω σύνολα διανυσμάτων, είναι σύνολα γραμμικά εξαρτημένα. α) {(1, 2, –1, 3), (2, –4, 1, 0), (0, 1, 2, –1), (3, –1, 2, 2)} β) {(1, 2, –1), (2, –1, 3), (1, 7, –6)} γ) $\{(x, x^2, 1), (-1, x, x), (0, 2x^2, x^2 + 1)\}$.

3. Αντιστροφή ορίζουσας. Εστω ο πίνακας A = (α_{ij}), με detA ≠ 0. Ο ***συνδεδεμένος*** (adjoin) πίνακας του A, είναι ο πίνακας adjA = (A_{ji}). Θεωρούμε το γινόμενο C = (α_{ij})(A_{ji}). Το στοιχείο c_{ij} του πίνακα C, είναι το $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} A_{kj}$. Εχουμε όμως, (βλέπε παρατήρηση 2, σελ. 31), ότι, $\det A = \delta_{ij} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} A_{jk} = \delta_{ij} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} A_{kj}$. Ο πίνακας C έχει συνεπώς ως στοιχεία, τα $c_{ij} = \delta_{ij} \det A$. Αρα, (βλέπε παρ.11α, σελ. 33), $\det C = (\det A)^n$. Η $\det C = (\det A)(\det(\mathrm{adj}A))$ δίδει συνεπώς, την $\det(\mathrm{adj}A) = \det A^{n-1}$. (Τύπος του Cauchy). Από τον τύπο του Cauchy έπεται και η σχέση $\det A^{-1} = (\det(\mathrm{adj}A))(\det A^{-n})$, που χρησιμοποιείται γιά τον υπολογισμό του αντιστρόφου A^{-1} του πίνακα A. Είναι, $(\det A)(\det A^{-1}) = 1$, ή $(\det A^n)(\det A^{-n}) = 1$, ή $(\det A^{n-1})(\det A^{-n}) = \det A^{-1}$. Αρα, $\det A^{-1} = (\det(\mathrm{adj}A))(\det A^{-n})$.

4. Στοιχειώδεις πράξεις επί των γραμμών. Πάνω στον πίνακα A εκτελούμε τις τρεις στοιχειώδεις πράξεις (βλέπε ενότητα ΠΙΝΑΚΕΣ ή ενότητα ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ) και θέλουμε να δούμε με ποιόν τρόπο αυτές επιρρεάζουν την τιμή της ορίζουσας Δ του πίνακα.

1) Η αντιμετάθεση δύο γραμμών του A αλλάζει το πρόσημο της Δ. Συνεπώς, αν κάνουμε r αντιμεταθέσεις, η τιμή της Δ γίνεται $1)^r\Delta$.

2) Ο πολλαπλασιασμός μιάς γραμμής επί λ, αλλάζει την Δ σε λΔ.

3) Η αντικατάσταση της γραμμής ℓ με το άθροισμα $\ell + \ell_\kappa$ όπου ℓ_κ κάποια άλλη γραμμή του πίνακα A, δεν μεταβάλει την τιμή της Δ.

Πράγματι, έστω π.χ.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21}+\alpha_{11} & \alpha_{22}+\alpha_{12} & \alpha_{23}+\alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

Είναι

$$\det B = \det \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} = \det A$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Υπολογίστε την ορίζουσα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 6 & 8 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Έχουμε,

$$\det A = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 6 & 8 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{bmatrix} = 2\det \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{bmatrix} = 2\det \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & -9 & 6 & 8 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= 2\det\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & -9 & 6 & 8 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{2}{3}\det\begin{bmatrix} 3 & -12 & 9 & 12 \\ 0 & -9 & 6 & 8 \\ 0 & -12 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{2}{36}\det\begin{bmatrix} 3 & -12 & 9 & 12 \\ 0 & -36 & 24 & 32 \\ 0 & -36 & 30 & 30 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2}{36}\det\begin{bmatrix} 3 & -12 & 9 & 12 \\ 0 & -36 & 24 & 32 \\ 0 & -36 & 30 & 30 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{2}{36}\det\begin{bmatrix} 3 & -12 & 9 & 12 \\ 0 & -36 & 24 & 32 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{36}\det\begin{bmatrix} 3 & -12 & 9 & 12 \\ 0 & -36 & 24 & 32 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι τριγωνικός. Άρα, $\det A = \dfrac{(3)(-36)(6)(2)}{36} = -36$.

5. Κυρία ελάσσων. Έστω ο $n \times n$ πίνακας A. Κάθε $r \times r$, $r \le n$, υποπίνακας του A, καλείται ελάσσων υποπίνακας του A. Ένας ελάσσων υποπίνακας του A προκύπτει από τον πίνακα A, αν αφαιρέσουμε τις $n-r$ γραμμές και τις αντίστοιχες $n-r$ κολώνες του. Από τον πίνακα A, λοιπόν, είναι δυνατόν να προκύψουν $\begin{pmatrix} n \\ n-r \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$, διαφορετικοί κύριοι ελάσσονες υποπίνακες.

Κυρία ελάσσων ορίζουσα (principal minor) είναι η αντίστοιχος ορίζουσα. Για τον πίνακα A του προηγούμενου παραδείγματος, έχουμε κυρίες ελάσσονες τις ορίζουσες

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Έστω ο $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 20 & 3 & 10 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$. Από τον A προκύπτουν οι εξής διαφορετικοί ελάσσονες πίνακες: Για $r = 3$, $\det A$. Για $r = 2$, αφαιρώντας $3-2=1$ διαφορετική γραμμή – κολώνα κάθε φορά, έχουμε τις 2×2 ορίζουσες $\det\begin{bmatrix} 3 & 10 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = 32$, $\det\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = -6$ και $\det\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 20 & 3 \end{bmatrix} = -29$, τέλος, για $r = 1$ αφαιρώντας $3-1=2$ διαφορετικές γραμμές – κολώνες κάθε φορά, έχουμε τις 1×1 ορίζουσες, που δεν είναι άλλες από τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα A.