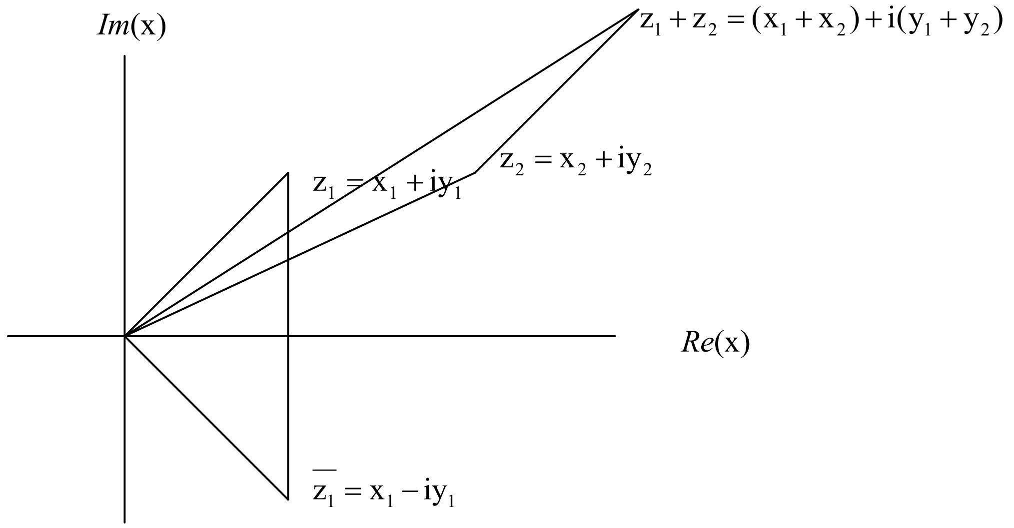
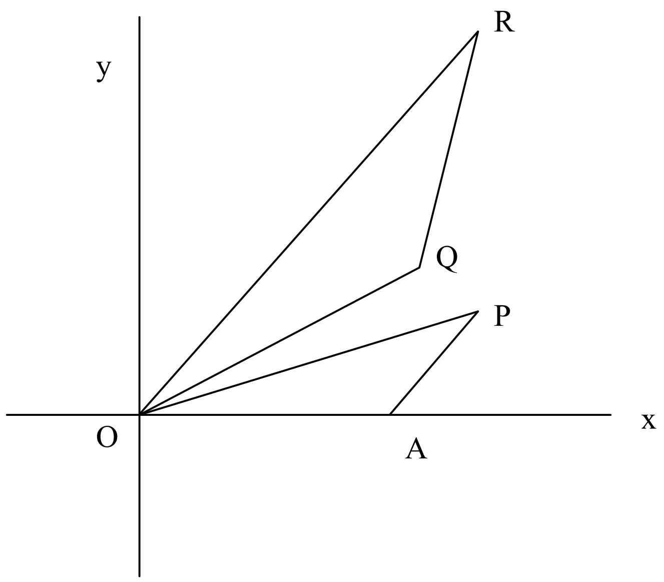
ΤΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

1. Επί του επιπέδου θεωρούμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxy, και σε κάθε σημείο $P(x, y)$ του επιπέδου αντιστοιχίζουμε τον μιγαδικό αριθμό $z = x + iy$. Η αντιστοιχία αυτή είναι μία ένα – ένα απεικόνιση των σημείων του επιπέδου στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.





Το γινόμενο δύο μιγαδικών αριθμών, στο μιγαδικό επίπεδο, μπορούμε να το παραστήσουμε από την παρακάτω κατασκευή:

Έστω $P = z_1 = x_1 + iy_1$

$Q = z_2 = x_2 + iy_2$

$A = 1 + i0$

Γωνία POQ = Γωνία POA και
Γωνία OQR = Γωνία OAP.
Όταν ισχύουν τα παραπάνω, τότε,
Τρίγωνο OAP ≈ Τρίγωνο OQR.

Άρα $\dfrac{(OR)}{(OP)} = \dfrac{(OQ)}{(OA)}$ απ' όπου έπεται ότι $(OR) = (OP)(OQ)$. Στο μιγαδικό επίπεδο το σημείο R έχει όρισμα $\arg z = \arg z_1 + \arg z_2$ και μέτρο ίσο προς $|z_1||z_2|$. Το σημείο R αντιστοιχεί συνεπώς, στο γινόμενο των αριθμών z_1 και z_2.

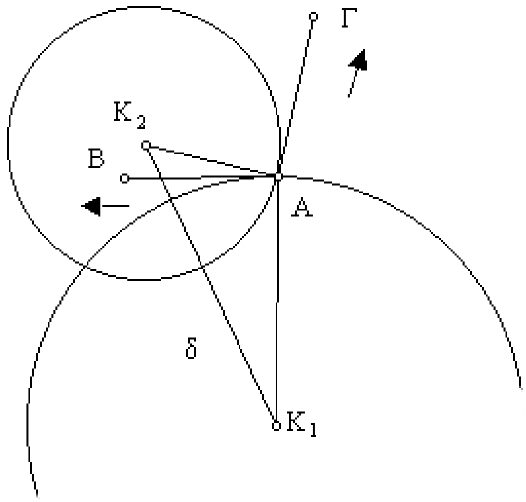
2. Ευθεία και κύκλος στο μιγαδικό επίπεδο. Το σύνολο των σημείων z του μιδαδικού επιπέδου, που πληρούν την σχέση $bz + c\bar{z} + d = 0$ (1), με $d \in \mathbb{R}$ και $\bar{b} = c$, κείται επ' ευθείας. Πράγματι, αν θέσουμε $b = \beta_1 + \beta_2 i$ οπότε και $c = \bar{b} = \beta_1 - \beta_2 i$ λαβαίνουμε την $(b + \bar{b})x - (b - \bar{b})iy + d = 0$, ή την $2\beta_1 x + 2\beta_2 y + d = 0$. Μία ευθεία περνά από την αρχή των αξόνων ανν $d = 0$. Η λύση του συστήματος $\bar{c}_i z + c_i \bar{z} + 2d_i = 0$, $i = 1, 2$, δίδει $\dfrac{d_1 c_2 - d_2 c_1}{c_1 \bar{c}_2 - \bar{c}_1 c_2}$.

Έχουμε, λοιπόν, ότι δύο ευθείες είναι: α) τεμνόμενες ανν $c_1 \bar{c}_2 \neq \bar{c}_1 c_2$ β) παράλληλες ανν $\dfrac{c_1}{c_2} \in \mathrm{Re}$, ή $c_1 \bar{c}_2 - \bar{c}_1 c_2 = 0$. γ) Κάθετες ανν $\dfrac{c_1}{c_2} \in \mathrm{Im}$, ή $c_1 \bar{c}_2 + \bar{c}_1 c_2 = 0$.

Η (κάθετος) απόσταση του σημείου w από την ευθεία (1) δίδεται από την σχέση $\dfrac{|\bar{c}w + c\bar{w} + d|}{2c}$.

Η γωνία δύο ευθειών θ ή $\pi - \theta$ είναι, $i \tan\theta = \dfrac{c_1 \bar{c}_2 - \bar{c}_1 c_2}{c_1 \bar{c}_2 + \bar{c}_1 c_2}$.

Το σύνολο των σημείων z του μιδαδικού επιπέδου, που πληρούν την σχέση $|z - z_0| = r$, με $r \in \mathbb{R}$, καλείται ***περιφέρεια κύκλου*** ή απλά κύκλος K του μιγαδικού επιπέδου. Είναι, λοιπόν, $K = \{z \in \mathbb{C},$ με $|z - z_0| = r\}$. Άρα και, $(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = z\bar{z} - z_0\bar{z} - z\bar{z}_0 + z_0\bar{z}_0 = r^2$ (2).



Έστω, τώρα, $K = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ένας 2×2 ***hermitian*** πίνακας. Είναι, δηλαδή, $a, d \in \mathbb{R}$, $c = \bar{b}$. Η ορίζουσα του πίνακα K είναι η $\Delta = ad - bc = ad - b\bar{b} \in \mathbb{R}$. Στον πίνακα K αντιστοιχίζουμε την σχέση $az\bar{z} + bz + c\bar{z} + d = 0$ με $a \neq 0$, $a, d \in \mathbb{R}$ (3), η οποία συμπίπτει με την (2) αν είναι, $b = -az_0$, $c = \bar{b}$, $d = a(z_0\bar{z} - r^2)$, οπότε, τότε, στον πίνακα K αντιστοιχίζουμε τον κύκλο K. Η (3) συμπίπτει με την (1), ανν $a = 0$ και $\bar{b} = c$. Λέμε ότι, ο K παριστάνει τον K. Φανερά, οι πίνακες K και λK παριστάνουν τον ίδιο κύκλο K. Όταν ο K παριστάνει κύκλο K, η ορίζουσα Δ γίνεται $\Delta = -a^2 r^2$. Το κέντρο του κύκλου (2) βρίσκεται στο σημείο $-\dfrac{c}{a}$, και ακτίνα $\dfrac{\sqrt{c\bar{c} - ad}}{a}$.

Παρατηρούμε ότι 1) Για $a \neq 0$ και $\Delta < 0$, έχουμε "κανονικό" κύκλο για $r > 0$, ενώ ένα σημείο για $r = 0$. 2) Για $a \neq 0$ και $\Delta < 0$, λαβαίνουμε έναν "φανταστικό" κύκλο. 3) Για $a = 0$ και $\Delta < 0$ η (3) παριστάνει μια ευθεία του μιγαδικού επιπέδου.

Η θετική ***φορά ενός κύκλου,*** καθορίζεται από το θετικό πρόσημο του συντελεστού a.

Δύο διαφορετικοί κύκλοι $K_1 \neq \lambda K_2$ ορίζουν μία ***δέσμη κύκλων*** μέσω της μονοπαραμετρικής οικογένειας $K = \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2$. Κάθε (πραγματικό) στοιχείο της οικογένειας αυτής, διέρχεται από τα σημεία τομής των κύκλων K_1 και K_2, και δύο τυχόντα στοιχεία Κ και $\Lambda = \mu_1 K_1 + \mu_2 K_2$, όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ορίζουν την ίδια δέσμη..

Ισχύει ότι, $\Delta = \Delta_1 \lambda_1^2 + 2\Delta_{12}\lambda_1\lambda_2 + \Delta_2\lambda_2^2$ (4) όπου Δ, Δ_1, Δ_2 οι ορίζουσες των πινάκων K, K_1, K_2 αντίστοιχα, και, $2\Delta_{12} = a_1 d_2 + a_2 d_1 - b_1 c_2 - b_2 c_1$

Επίσης, $\Delta_1 = -A_1^2 r_1^2$, $\Delta_2 = -A_2^2 r_2^2$, $2\Delta_{12} = A_1 A_2(\delta^2 - r_1^2 - r_2^2)$ όπου $\delta = |\kappa_1 - \kappa_2|$ η απόσταση των κέντρων των κύκλων.

Δύο κύκλοι τέμνονται κατά γωνία ω, ίση με την γωνία των εφαπτομένων στο σημείο τομής τους. Η γωνία αυτή $(\angle B A \Gamma)$ ισούται με την $\angle K_2 A K_1 = \omega$, μιά και έχουν τις πλευρές κάθετες. Από το τρίγωνο $K_2 A K_1$ έχουμε, $\delta^2 = r_1^2 + r_2^2 \mp 2r_1 r_2 \cos\omega$. Άρα, τελικά, και $\cos\omega = \dfrac{\Delta_{12}}{\sqrt{\Delta_1}\sqrt{\Delta_2}}$. Όταν οι κύκλοι K_1 και K_2 είναι πραγματικοί, τότε και μόνον, $-1 \le \cos\omega \le 1$, δηλαδή, $\Delta_1\Delta_2 - \Delta_{12}^2 \ge 0$, σχέση, που μαζί με την $\Delta_1 < 0$, εξασφαλίζουν ότι η (4) έχει το πολύ μία ρίζα.

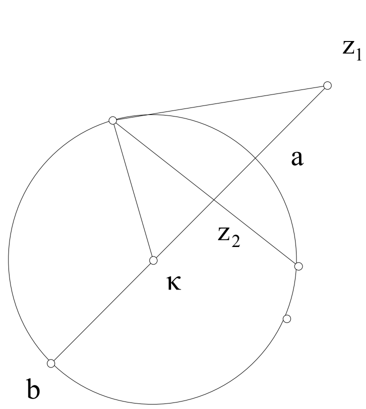
Όταν $\Delta_1\Delta_2 - \Delta_{12}^2 = 0$ οι κύκλοι εφάπτονται, εξωτερικά αν $\cos\omega = -1$, εσωτερικά αν $\cos\omega = 1$. Οι πραγματικοί κύκλοι είναι ***ορθογώνιοι*** ανν $\cos\omega = 0$, οπότε και, $\Delta_{12} = 0$. Η τελευταία αυτή σχέση, γενικεύει την έννοια της ορθογωνιότητας για οιουσδήποτε κύκλους.

Μία δέσμη κύκλων λέγεται: α) ***ελλειπτική*** ανν $\Delta > 0$, οπότε η (4) έχει δύο ρίζες, που ορίζουν τα σημεία τομής των κύκλων της δέσμης. β) ***παραβολική*** ανν $\Delta = 0$ οπότε οι κύκλοι της δέσμης έχουν όλοι ένα κοινό σημείο, και γ) ***υπερβολική,*** ανν $\Delta < 0$ οπότε, δεν έχουμε σημεία τομής των κύκλων της δέσμης.

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων z του μιγαδικού επιπέδου, των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία z_1 και z_2 είναι σταθερός, είναι περιφέρεια κύκλου γνωστός ως ***κύκλος του Απολλωνίου.***

Πράγματι, η $\dfrac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = k$ δίδει την

$(1 - k^2) z\bar{z} + (k^2 \bar{z}_2 - \bar{z}_1) z + (k^2 z_2 - z_1)\bar{z} + z_1\bar{z}_1 - k^2 z_2 \bar{z}_2 = 0$, που είναι περιφέρεια κύκλου Κ με κέντρο $\kappa = -\dfrac{k^2 z_2 - z_1}{1 - k^2}$ και ακτίνα $r = \dfrac{k|z_2 - z_1|}{1 - k^2}$.



Παρατηρούμε ότι, το κέντρο κ του κύκλου κείται επί της ευθείας $z_1 z_2$. Το γεγονός αυτό, αποδεικνύεται ως εξής: Η (1) πληρούται από τα σημεία z_1 και z_2, και πρέπει να πληρούται επίσης από το σημείο κ.

Είναι, λοιπόν, $\bar{c}z_1 + c\bar{z}_1 + d = 0$, $\bar{c}z_2 + c\bar{z}_2 + d = 0$, και πρέπει, ακόμα, $\bar{c}\kappa + c\bar{\kappa} + d = 0$, σχέση, που προφανώς ισχύει για την τιμή του κ που βρήκαμε.

Έστω, τώρα, a, b, τα σημεία τομής της ευθείας z_1z_2 και του κύκλου K. Ισχύει, τότε, $\frac{(z_1-z_2)(a-b)}{(z_2-a)(b-z_1)}=-1$. Λέμε, ότι τα σημεία z_1,a,z_2,b αποτελούν έναν ***αρμονικό λόγο.*** Τα σημεία z_1 και z_2 καλούνται ***συμμετρικά*** ως προς τον κύκλο K. Ισχύει επίσης ότι, $(z_2-\kappa)(\overline{z}_1-\overline{\kappa})=r^2$, και λέμε ακόμα ότι, τα σημεία z_1 και z_2 είναι ***αντίστροφα*** ως προς τον κύκλο K. Ένα ζεύγος αντιστρόφων σημείων, παρίσταται δια του (z,z^*). Αν $K=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ ο πίνακας του κύκλου K, και $A\zeta\overline{\zeta}+B\zeta+C\overline{\zeta}+D=0$ (1) η εξίσωσή του, είναι τότε και,

$Az^*\overline{z}+Bz^*+C\overline{z}+D=0$, απ' όπου έχουμε ότι, $z^*=\frac{C\overline{z}+D}{A\overline{z}+B}$ (2). Το ζεύγος (z,z^*), πληροί την εξίσωση (1) του κύκλου K. Όταν, λοιπόν, τα σημεία z και z^* βρίσκονται πάνω στην περιφέρεια του K, έχουμε τότε, $(z-z^*)(A\overline{z}+B)=0$, και, επειδή $A\overline{z}+B=\overline{Az+C}\neq 0$, έπεται ότι, $z=z^*$.

Η σχέση (2) ορίζει μία απεικόνιση, που λέγεται ***αντιστροφή*** και είναι ένα προς ένα, του εσωτερικού του κύκλου K επί το εξωτερικό του. Το κέντρο κ του κύκλου, το αντιστοιχίζουμε στο σημείο ∞. Τα σημεία επί της περιφερείας του κύκλου, παραμένουν αναλλοίωτα ως προς την απεικόνιση αυτή.

3. Απλός και διπλός λόγος. Ορίζουμε τον ***απλό λόγο*** $(z_1;z_2,z_3)$ των τριών σημείων z_i, $1\leq i\leq 3$ του μιγαδικού επιπέδου ως εξής: $(z_1;z_2,z_3)=\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$ αν $z_1\neq z_3$, ∞, αν $z_1=z_3$. Θέτουμε επίσης, $(\infty;z_2,z_3)=1$ $(z_1;\infty,z_3)=\infty$, $(z_1;z_2,\infty)=0$ και $(\infty;\infty,z_3)=0$ $(z_1;\infty,\infty)=1$, $(\infty;z_2,\infty)=\infty$. Αν είναι $(z_1;z_2,z_3)=u$, και ενεργήσουμε τις 3! μεταθέσεις πάνω στους δείκτες του συμβόλου $(z_1;z_2,z_3)$, λαβαίνουμε τις εξής 6 τιμές του απλού λόγου: $(z_1;z_2,z_3)=u$, $(z_2;z_3,z_1)=\frac{u-1}{u}$, $(z_3;z_1,z_2)=\frac{1}{1-u}$, $(z_1;z_3,z_2)=\frac{1}{u}$, $(z_2;z_1,z_3)=\frac{u}{u-1}$, $(z_3;z_2,z_1)=1-u$.

Πρόταση. Τρία σημεία του μιγαδικού επιπέδου κείνται επ' ευθείας, ανν ο απλός λόγος τους είναι πραγματικός αριθμός.

Απόδειξη. Η συνθήκη που εκφράζουμε στην πρόταση αυτή, είναι ισοδύναμη της ισότητας

$(z;z_2,z_3)=(\overline{z};\overline{z}_2,\overline{z}_3)$. Ή $(z-z_2)(\overline{z}-\overline{z}_3)=(\overline{z}-\overline{z}_2)(z-z_3)$, ή

$-z_2\overline{z}+z_2\overline{z}_3-z\overline{z}_3+\overline{z}_2z-\overline{z}_2z_3+\overline{z}z_3=0$, πολλαπλασιάζουμε επί i, και έχουμε,

$(\overline{z}_2'-\overline{z}_3')z+(z_2'-z_3')\overline{z}+z_2'\overline{z}_3'+\overline{z}_2'z_3'=0$, όπου $z_j'=y_j+ix_j$, j = 2, 3, που είναι η εξίσωση μιάς ευθείας.

Ο ***διπλός λόγος*** τεσσάρων σημείων z_i, $1\leq i\leq 4$, ορίζεται από τον λόγο δύο απλών λόγων ως εξής: $(z_1,z_2;z_3,z_4)=(z_1;z_3,z_4):(z_2;z_3,z_4)=\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_3-z_2)(z_4-z_2)}$. Οι 4! μεταθέσεις των δεικτών του διπλού λόγου δίδουν πάλι τις 6 προηγούμενες τιμές του απλού λόγου, μιά και έχουμε τις ισότητες,

$$(z_1,z_2;z_3,z_4)=(z_2,z_1;z_4,z_3)=(z_3,z_4;z_1,z_2)=(z_4,z_3;z_2,z_1)=u$$

$$(z_2,z_3;z_1,z_4)=(z_3,z_2;z_4,z_1)=(z_1,z_4;z_2,z_3)=(z_4,z_1;z_3,z_2)=\frac{u-1}{u}$$

$$(z_3,z_1;z_2,z_4)=(z_1,z_3;z_4,z_2)=(z_2,z_4;z_3,z_1)=(z_4,z_2,;z_1,z_3)=\frac{1}{1-u}$$

$$(z_2,z_1;z_3,z_4)=(z_1,z_2;z_4,z_3)=(z_3,z_4;z_2,z_1)=(z_4,z_3;z_1,z_2)=\frac{1}{u}$$

$$(z_3,z_2;z_1,z_4)=(z_2,z_3;z_4,z_1)=(z_1,z_4;z_3,z_2)=(z_4,z_1;z_2,z_3)=\frac{u}{u-1}$$

$$(z_1,z_3;z_2,z_4)=(z_3,z_1;z_4,z_2)=(z_2,z_4;z_1,z_3)=(z_4,z_2;z_3,z_1)=1-u$$

Πρόταση. Τέσσερα σημεία του μιγαδικού επιπέδου κείνται επί του ιδίου κύκλου, ανν ο διπλός τους λόγος είναι πραγματικός αριθμός.
Απόδειξη. Είναι ανάλογος της προηγούμενης προτάσεως.

Πρόταση. Αν z_j^* τα αντίστροφα σημεία των z_j, $1\le j\le 4$, ως προς κύκλο Κ, τότε, ισχύει ότι, $(\overline{z}_1,\overline{z}_2;\overline{z}_3,\overline{z}_4)=(z_1^*,z_2^*;z_3^*,z_4^*)$.
Απόδειξη. Έχουμε ότι, $(z_j^*-\kappa)(\overline{z}_j-\overline{\kappa})=r^2$, απ' όπου έπεται και η

$$z_j^*-z_k^*=r^2\,\frac{\overline{z}_k-\overline{z}_j}{(\overline{z}_j-\overline{\kappa})(\overline{z}_k-\overline{\kappa})}$$ και είναι, $(z_j^*;z_3^*,z_4^*)=(\overline{\kappa};\overline{z}_4,\overline{z}_3)(\overline{z}_j;\overline{z}_3,\overline{z}_4)$.

Βιβλιογραφία. 1) Geometry of Complex Numbers, Hans Schwerdtfeger, Dover.
2) Theory of Functions of a Complex Variable, C. Caratheodory, Chelsea Volume one.

Ασκήσεις. 1. Δύο κύκλοι είναι ορθογώνιοι, αν και μόνον αν $tr(K_1K_2^{-1})=0$.

4. Γραμμικοί μετασχηματισμοί (ή Moebius μετασχηματισμοί) του μιγαδικού επιπέδου. Έτσι ονομάζονται οι μετασχηματισμοί $\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ της μορφής $w=\varphi(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ (1), $z\in\mathbb{C}$, με $\delta=\det\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=ad-bc\neq 0$. Κάθε μετασχηματισμός (1), ορίζει έναν πίνακα $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, και όλοι οι πίνακες kM, δίδουν τον ίδιο μετασχηματισμό (1). Η απεικόνιση $F:kM\to\varphi$ είναι ένας ομομορφισμός του συνόλου των 2×2 μη ιδιαζόντων πινάκων με πράξη των πολλαπλασιασμό, επί του συνόλου των γραμμικών μετασχηματισμών φ, με πράξη την σύνθεση αυτών. Ο M^{-1} πίνακας είναι ο $\delta^{-1}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$, που αντιστοιχεί στον

$\varphi^{-1}(w)=\dfrac{dz-b}{-cz+a}$. Το σύνολο των γραμμικών μετασχηματισμών φ με πράξη την σύνθεση αυτών, αποτελεί συνεπώς ομάδα.
Ερχόμαστε, τώρα, στον μετασχηματισμό (1), και έστω z_1, z_2 δύο σταθερά σημεία του μιγαδικού επιπέδου. Για το τυχόν σημείο $z\in\mathbb{C}$, σχηματίζουμε τον απλό λόγο $(z;z_1,z_2)$, και στην συνέχεια λαβαίνουμε την εικόνα του, $(w;w_1,w_2)$. Βρίσκουμε, τότε, ότι $(w;w_1,w_2)=k(z;z_1,z_2)$, όπου η k σταθερά, $k=\dfrac{cz_2+d}{cz_1+d}\neq 0,\infty$. Έστω ένα ακόμα σημείο $z_3\in\mathbb{C}$. Είναι, $(w_3;w_1,w_2)=k(z_3;z_1,z_2)$. Άρα και, $(w,w_3;w_1,w_2)=(z,z_3;z_1,z_2)$. Η ισότητα αυτή, εκφράζει την

Πρόταση. Ο γραμμικός μετασχηματισμός φ, διατηρεί τον διπλό λόγο.

Πόρισμα. Ο γραμμικός μετασχηματισμός φ, απεικονίζει έναν κύκλο K_z σε έναν κύκλο K_w. Επίσης, αν τα σημεία z και z^* είναι συμμετρικά ως προς K_z, τα σημεία w και w^* είναι συμμετρικά ως προς K_w.

Τα ***σταθερά σημεία*** ενός μετασχηματισμού φ δίδονται από την σχέση $\varphi(z)=z$ ή από την $z=\dfrac{az+b}{cz+d}$, απ' όπου έχουμε ότι τα σταθερά σημεία του φ, είναι οι ρίζες της εξισώσεως $cz^2-(a-d)z-b=0$ (1).
Ο γραμμικός μετασχηματισμός φ, έχει συνεπώς δύο το πολύ σταθερά σημεία. Αν γνωρίζουμε ότι ο φ έχει τρία σταθερά σημεία, τότε αυτός είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός. Αν $c\neq 0$, αμφότερα τα σταθερά του σημεία, είναι πεπερασμένα. Είναι δε και διαφορετικά, αν η διακρίνουσα Δ της (1) είναι ≠ 0. Αν $c=0$, τότε ένα τουλάχιστον από τα σταθερά του σημεία είναι το ∞. Αν επιπλέον $a=d$, ο φ είναι μία μεταφορά $w=z+b$. Αν $a\neq d$, ο $w=az+b$ έχει εκτός από το ∞ ως σταθερό σημείο, και το σημείο $\zeta=\dfrac{b}{1-a}$.
Επειδή οι μετασχηματισμοί φ έχουν ως αναλλοίωτο τον διπλό λόγο, εύκολα μπορούμε να βρούμε την μορφή του φ, αν γνωρίζουμε τις εικόνες w_1,w_2,w_3, τριών σημείων του πεδίου ορισμού του, z_1,z_2,z_3. Αρκεί να γράψουμε $(w,w_3;w_1,w_2)=(z,z_3;z_1,z_2)$, απ' όπου λαβαίνουμε για τον φ την ζητούμενη έκφραση. Για παράδειγμα, αν θέλουμε εκείνον τον γραμμικό μετασχηματισμό που απεικονίζει τα σημεία i, 0, -i στα σημεία 0, 1, ∞, αρκεί να γράψουμε την σχέση $(w,\infty;0,1)=(z,-i;i,0)$, απ' όπου και

$$\frac{w-0}{-1-0}=\frac{z-i}{z+i}:\frac{0-i}{0+i}, \qquad \text{ή} \qquad w=\frac{z-i}{z+i}.$$

Βιβλιογραφία. Εκτός από τα προαναφερθέντα βιβλία πάνω στις μιγαδικές συναρτήσεις, χρήσιμο είναι και το Elements of the theory of Functions του Konrad Knop, έκδοση Dover.

5. Τοπολογία του μιγαδικού επιπέδου. ***Περιοχή*** $N(z_0,\rho)$ του σημείου z_0 ακτίνας ρ καλείται το σύνολο $N(z_0,\rho)=\{z\in\mathbb{C}$ με $|z-z_0|<\rho\}$. Φανερά, $N(z_0,\rho)\neq\varnothing$, μιά και τουλάχιστον το $z_0\in N(z_0,\rho)$.
Οι περιοχές $N(z,\rho)$ χαρακτηρίζονται από τις ιδιότητες:
I. Αν $z_1\neq z_2$ δύο διαφορετικά σημεία του μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{C}$, τότε βρίσκονται περιοχές $N(z_1,\rho)$ και $N(z_2,\rho)$, έτσι ώστε $N(z_1,\rho)\cap N(z_2,\rho)=\varnothing$.
II Σε κάθε σημείο z του $\mathbb{C}$, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε μία φθίνουσα ακολουθία περιοχών του $N_i(z,\rho_i)$, $i\in\mathbb{N}$, έτσι ώστε, $z\in\bigcap N_i(z,\rho_i)$. Αυτό έχει σαν συνέπεια, να υπάρχει περιοχή του z, η οποία τελικώς θα περιέχει όλες τις περιοχές, που ανήκουν στην προαναφερθείσα ακολουθία.
III. Αν $z\in N(z_1,\rho_1)$ και $z\in N(z_2,\rho_2)$, $z_1\neq z_2$, τότε , $\exists\ N(z,\rho)\subset N(z_1,\rho_1)\cap N(z_2,\rho_2)$.

Έστω $S\subseteq\mathbb{C}$. Το σημείο $z\in S$ καλείται ***εσωτερικό σημείο*** του S, αν και μόνον αν, $\exists\ N(z,\rho):N(z,\rho)\subset S$. ***Ανοικτό*** καλείται εκείνο το σύνολο S, του οποίου κάθε σημείο, είναι εσωτερικό σημείο. Η περιοχή $N(z_0,\rho)$ είναι ένα ανοικτό σύνολο. Πράγματι, αν $z\in N(z_0,\rho)$, τότε και $N(z,\delta)\subset N(z_0,\rho)$, αν λάβουμε $\delta<\rho-|z-z_0|$. Ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο είναι συνεπώς, ανοικτό σύνολο.

Πρόταση. Η ένωση U οιουδήποτε πλήθους ανοικτών συνόλων G_i, $i\in I$, είναι ανοικτό σύνολο, μιά και αν $z\in U$, τότε και $z\in G_i$ για κάποιον δείκτη $i\in I$, και, συνεπώς, $\exists\ N(z,\rho)\subset G_i\subseteq U$.

Πρόταση. Η τομή πεπερασμένου πλήθους ανοικτών συνόλων, είναι ανοικτό σύνολο.
Απόδειξη. Έστω $z\in G=\bigcap_{i=1}^{n}G_i$. Υπάρχουν τότε οι $\rho_i>0$, $1\le i\le n$, έτσι ώστε, $N(z,\rho_i)\subset G_i$. Αρκεί να λάβουμε $r<\min\{\rho_i,\ 1\le i\le n\}$, για να εξασφαλίσουμε ότι η περιοχή $N(z,r)\subset G$.

Πρόταση. Το συμπλήρωμα ενός συνόλου, που αποτελείται από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων του επιπέδου $\mathbb{C}$, είναι ανοικτό σύνολο.
Απόδειξη. Έστω το $F=\{z_1,z_2,\ \dots\ ,z_k\}$, και $z\in\mathbb{C}-F$.
Αρκεί να λάβουμε $r<\min\{|z-z_i|,\ 1\le i\le k\}$, για να εξασφαλίσουμε ότι, $N(z,r)\subset\mathbb{C}-F$.

Έστω S_1,S_2 δύο μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{C}$. Η ***απόστασή*** τους $d(S_1,S_2)$ ορίζεται από την σχέση $d(S_1,S_2)=\inf\{|z_1-z_2|$, όπου $z_1\in S_1,z_2\in S_2\}$. Ιδιαίτερα, έχουμε την απόσταση $d(w,S)=\inf\{|w-z|$, με $z\in S\}$ του σημείου w από το σύνολο S. Είναι βέβαια $d(w,S)=0$, αν $w\in S$. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα. Για παράδειγμα, το σημείο $\{0\}$ απέχει μηδενική απόσταση από το σύνολο $S=\{z$ με $|z|<1\}-\{0\}$, χωρίς να ανήκει σ' αυτό. Ισχύει όμως ότι, $d(w,S)=0\leftrightarrow\forall\ N(w,\rho),\ N(w,\rho)\cap S\neq\varnothing$. Ένα ***κλειστό*** σύνολο

F ορίζεται ως εκείνο το υποσύνολο του $\mathbb{C}$, που περιέχει όλα τα σημεία του $\mathbb{C}$, που βρίσκονται σε μηδενική απόσταση απ' αυτό.

Πρόταση. Ένα σύνολο $S \subseteq \mathbb{C}$ είναι κλειστό, αν και μόνον αν, το συμπλήρωμά του (ως προς $\mathbb{C}$) είναι ανοικτό σύνολο.
Απόδειξη. 1) Έστω ότι το $\mathbb{C}$-S είναι ανοικτό σύνολο και $z \in \mathbb{C}$, τέτοιο ώστε, $d(z,S) = 0$ Τότε, κάθε περιοχή του z, θα περιέχει και σημεία του S. Συνεπώς $z \notin \mathbb{C}\text{-}S$. Άρα το $z \in S$.
2) Έστω το S κλειστό σύνολο. Αν το $S = \varnothing$, τότε, το συμπλήρωμά του είναι ολόκληρο το $\mathbb{C}$, και συνεπώς είναι ένα ανοικτό σύνολο. Αν $S \neq \varnothing$ και $z \in \mathbb{C}\text{-}S$, τότε και η απόσταση $d(z,S) > 0$. Άρα $\exists$ $N(z,\rho)$, με, $N(z,\rho) \cap S = \varnothing$, δηλαδή, $N(z,\rho) \subset \mathbb{C}\text{-}S$, και, συνεπώς, το $\mathbb{C}$-S ανοικτό σύνολο.

Πορίσματα της προηγούμενης προτάσεως είναι ότι, α) η τομή οιουδήποτε πλήθους κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο, και, β) η ένωσης πεπερασμένου πλήθους κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο. Τα σύνολα $\mathbb{C}$ και $\varnothing$, είναι τα μοναδικά σύνολα, που είναι ταυτόχρονα ανοικτά και κλειστά. Αυτά έπονται από τα αντίστοιχα πορίσματα για τα ανοικτά σύνολα, παίρνοντας από τα ανοιχτά στα κλειστά με τους κανόνες του de Morgan.
Για παράδειγμα, το $F = \{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$ είναι ένα κλειστό σύνολο. Εξ' άλλου, κάθε σημείο του συνόλου F, είναι ένα ***μεμονωμένο*** σημείο, με την έννοια ότι, υπάρχει περιοχή του, η οποία να περιέχει μόνον το σημείο αυτό, και κανένα άλλο σημείο του συνόλου F.

Όταν, λοιπόν, δίδεται ένα σύνολο S του μιγαδικού επιπέδου, τότε τα σημεία του $\mathbb{C}$ ως προς το S είναι δυνατόν να είναι είτε εσωτερικά, είτε ***εξωτερικά***, δηλαδή, εσωτερικά του συμπληρώματός του, είτε ***συνοριακά***, σημεία δηλαδή, των οποίων κάθε περιοχή περιέχει σημεία και του S και του $\mathbb{C}\text{-}S$. Ένα ***σημείο συσσωρεύσεως*** z (σ.σ.) του συνόλου S, είναι εκείνο το σημείο, που κάθε περιοχή του, περιέχει και ένα σημείο του S διαφορετικό από το z (αν είναι $z \in S$). Αν το z είναι σ.σ. του συνόλου S, τότε $z \in \overline{S}$, μιά και, αν $z \notin \overline{S}$, κάθε περιοχή του, δεν περιέχει κανένα σημείο του S. ***Ορικό σημείο*** του S, είναι εκείνο το σ.σ. του S, που, τελικά, μέσα σε κάθε περιοχή του, περιέχονται όλα τα σημεία του S.

Η ***διάμετρος*** $\delta(S)$ του συνόλου $S \subset \mathbb{C}$ ορίζεται η $\delta(S) = \sup\{|z-w|, \text{ όπου } z, w \in S\}$. Όταν έχουμε $\delta(S) \neq \infty$, τότε λέμε ότι το σύνολο S είναι φραγμένο Για φραγμένα σύνολα, ισχύει ότι, $\delta(S) = \delta(\overline{S})$.

Εσωτερικό S^o ενός συνόλου S, είναι η ένωση όλων των ανοικτών συνόλων που περιέχονται στο S. Το εσωτερικό ενός συνόλου είναι συνεπώς, το μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο που περιέχεται στο S. ***Κάλυμμα*** $\overline{S}$ ενός συνόλου S, είναι η τομή όλων των κλειστών συνόλων, στα οποία το S περιέχεται. Το κάλυμμα του S είναι συνεπώς το μικρότερο κλειστό σύνολο, που περιέχει το S. Για παράδειγμα, είναι $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Το ***σύνορο*** ενός συνόλου S ορίζεται ως το σύνολο $\overline{S} - S^o$. Φανερά, το S είναι ένα κλειστό σύνολο, αν και μόνον αν, $S = \overline{S}$.

Πρόταση. $z \in \overline{S}$, αν και μόνον αν, $d(z,S)=0$.

Απόδειξη. 1) Έστω $z \in \overline{S}$, με, $d(z,S)>0$. Τότε $\exists\ N(z,\rho)$, με, $N(z,\rho)\cap S=\varnothing$, δηλαδή, $N(z,\rho)\subset \mathbb{C}\text{-}S$. Το κλειστό σύνολο $\mathbb{C}\text{-}N(z,\rho)$ περιέχει το S και συνεπώς το $\overline{S}$, αντίθετα με την υπόθεσή μας, ότι $z \in \overline{S}$.

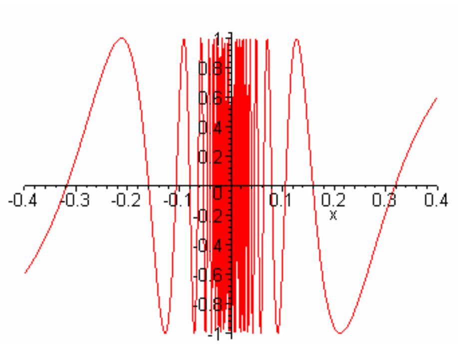
2) Έστω $d(z,S)=0$, και F οιοδήποτε κλειστό σύνολο που περιέχει το S. Τότε και, $d(z,F)=0$, και άρα $z\in F$. Το z λοιπόν, ανήκει στην τομή όλων των κλειστών συνόλων, που περιέχουν το S. Άρα, $z \in \overline{S}$.

Πόρισμα. Το $\overline{S}$ περιέχει όλα τα σημεία συσσωρεύσεως του.

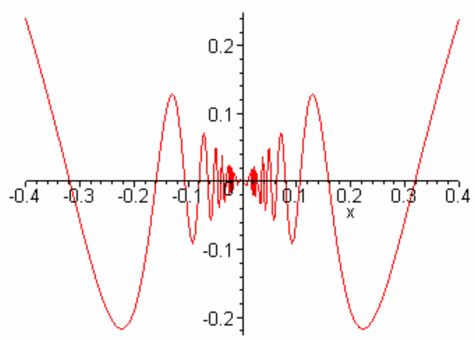
Πόρισμα. Ένα σημείο z ανήκει στο κάλυμμα $\overline{S}$ του συνόλου S, αν και μόνον αν, αυτό είναι ορικό σημείο μιάς ακολουθίας σημείων s_n του S.

Πόρισμα. Το ορικό σημείο μιάς ακολουθίας $\{s_n\}$ είναι μοναδικό. Πράγματι, αν η ακολουθία είχε δύο διαφορετικά ορικά σημεία $z_1 \neq z_2$, τότε, αν $\delta=|z_2-z_1|$, οι περιοχές $N(z_1,\rho_1)$ και $N(z_2,\rho_2)$ με $\rho_1,\rho_2<\delta/2$, έχουν τομή κενή. Είναι αδύνατον, λοιπόν, όλοι οι όροι της $\{s_n\}$ να περιέχονται τελικά και στην $N(z_1,\rho_1)$ και στην $N(z_2,\rho_2)$.

Παραδείγματα. 1. Αν S το σύνολο των σημείων (x,y) του επιπέδου, για τα οποία



$y=\sin(1/x)$



$y=x\sin(1/x)$

$y=\sin(1/x)$, τα σ.σ. του συνόλου S, είναι τα σημεία της μορφής $(0,y)$, με $-1\le y\le 1$.

2. Αν S το σύνολο των σημείων (x,y) του επιπέδου, για τα οποία $y=x\sin(1/x)$, το ορικό σημείο του συνόλου S, είναι το σημείο (0,0)

Θεώρημα (Bolzano – Weierstrass). Κάθε μη πεπερασμένο κλειστό και φραγμένο σύνολο S έχει ένα τουλάχιστον σημείο συσσωρεύσεως.

Απόδειξη. Έστω δ(S) η διάμετρος του S. Κάποιο άπειρο τμήμα του S, θα περιέχεται, μέσα σε ένα υποσύνολό του $\overline{S}_1$, με διάμετρο το $\dfrac{\delta(S)}{2}$. Συνεχίζουμε τον συλλογισμό αυτό, και θεωρούμε εκείνο το άπειρο υποσύνολο $\overline{S}_n$ του S, που έχει διάμετρο $\frac{\delta(S)}{2^n}$. Έστω $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ όπου $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n \supset S_{n+1}$. Το σύνολο αυτό F, είναι ένα μη κενό κλειστό σύνολο, ως τομή μη κενών κλειστών συνόλων. Ένα σημείο $z \in F$, είναι σ.σ. του S, μια και οιαδήποτε περιοχή του z, έχει τομή μη κενή με το σύνολο S. Επειδή το S κλειστό, $z \in S$.

Το σύνολο των ορικών σημείων του $S \subseteq \mathbb{C}$ καλείται ***παράγωγο*** σύνολο S' του S. Ισχύει, βέβαια, $\overline{S} = S \cup S'$. Ένα σύνολο $A \subseteq B$ λέμε ότι είναι ***πυκνό*** εν B, αν και μόνον αν $\overline{A} = B$. Για παράδειγμα, οι ρητοί αριθμοί $\mathbb{Q}$, είναι σύνολο πυκνό εν $\mathbb{R}$. Κάθε φορά, που σχηματίζουμε μία φθίνουσα ακολουθία κλειστών μη κενών συνόλων $\overline{S}_n$, τα οποία τελικά είναι και φραγμένα, με διαμέτρους $\delta_n(S_n) \to 0$, μπορούμε να επιλέξουμε μία ακολουθία $\{s_n\}$, τέτοια ώστε, $s_n \in S_n$, και με ένα ορικό σημείο s. (Θεώρημα του Cantor). Λέμε ότι, η $\{s_n\}$ ***συγκλίνει*** στο s. Γράφουμε $\{s_n\} \to s$, ή $\lim\{s_n\} = s$.

Θεώρημα των Heine - Borel. Αν κάθε σημείο z ενός κλειστού και φραγμένου συνόλου S καλύπτεται από ένα ανοικτό σύνολο G_z, τότε μπορούμε να επιλέξουμε ένα πεπερασμένο αριθμό απ' αυτά, που η ένωσή τους, να καλύπτει το S.

Απόδειξη. Έστω ότι για να καλύψουμε το S, απαιτείται ένας μη πεπερασμένος αριθμός από G_z. Αν δ(S) η διάμετρος του S, το ίδιο θα απαιτείται και για κάποιο από τα κλειστά υποσύνολα του S, που περιέχονται στο τμήμα εκείνο του S, που έχει διάμετρο $\delta(S)/2$. Επιλέγουμε το τμήμα αυτό του S, και το καλούμε S_1. Επαναλαμβάνοντας τον ίδιο συλλογισμό, σχηματίζουμε την φθίνουσα ακολουθία των κλειστών συνόλων S_n, τα οποία όλα, έχουν την ιδιότητα, να απαιτούν έναν μη πεπερασμένο αριθμό από ανοικτά σύνολα G_z, $z \in S_n$, για να καλυφθούν. Τούτο όμως είναι άτοπο, γιατί, το S ως κλειστό σύνολο, περιέχει το ορικό σημείο z της ακολουθίας S_n, και το σημείο αυτό, μπορεί να καλυφθεί από ένα και μόνον ανοικτό σύνολο G_z.

Ορισμός. Ένα κλειστό και φραγμένο σύνολο καλείται ***συμπαγές*** σύνολο.

Κριτήριο σύγκλισης του Cauchy. Αναγκαία και ικανή συνθήκη για να έχει ορικό σημείο η ακολουθία $\{z_n\}$, είναι , για κάθε $\varepsilon > 0$ να υπάρχει δείκτης $n_0 = n_0(\varepsilon)$, τέτοιος ώστε, $|z_{n+p} - z_n| < \varepsilon$, για όλους τους δείκτες $n > n_0(\varepsilon)$, και κάθε $p \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Αν $\{z_n\} \to z$, τότε, φανερά ισχύει το κριτήριο του Cauchy, μια και τελικά όλοι οι όροι της ακολουθίας βρίσκονται μέσα σε μία περιοχή $N(z,\varepsilon)$. Αντίστροφα, αν $|z_{n+p} - z_n| < \varepsilon$, το σύνολο $\{z_n\}$ είναι ένα άπειρο φραγμένο σύνολο. Πράγματι, αρκεί να λάβουμε $\varepsilon = 1$, οπότε υπάρχει δείκτης n_1, για τον οποίο, όλοι οι όροι της ακολουθίας που έχουν δείκτες $n > n_1$, είναι τέτοιοι ώστε, $|z_n - z_{n_1}| < 1$, και συνεπώς, έχουμε και ότι $|z_n| < 1 + |z_{n_1}|$. Φράγμα των όρων της $\{z_n\}$, αποτελεί ο $\max\{|z_1|, \ldots, |z_{n_1}| + 1\}$.

Θεωρούμε, τώρα, και τα σύνολα $S_n = \{|z|, \text{ με } |z| < |z_n|\}$. Για τα σύνολα $\overline{S}_n$, έχουμε ότι, $\delta(\overline{S}_n) \to 0$. Μπορούμε, συνεπώς, να επιλέξουμε μία ακολουθία $\{s_n\}$, η οποία να συγκλίνει. Όμως ισχύει, $\forall n$, $|z_{n+1}| < |s_n|$. Άρα και η $\{z_n\}$ συγκλίνει.

Πόρισμα. Μέσα σε ένα συμπαγές σύνολο, οι συγκλίνουσες ακολουθίες είναι ακολουθίες Cauchy, και αντίστροφα.

Ορισμός. Ο χώρος, μέσα στον οποίον μία ακολουθία συγκλίνει αν και μόνον αν, είναι ακολουθία Cauchy, καλείται ***πλήρης*** χώρος.

Ορισμός. ***Μη συνεκτικό*** είναι το υποσύνολο εκείνο S του $\mathbb{C}$, το οποίο είναι δυνατόν να γραφεί ως ένωσης δύο διακεκριμένων κλειστών συνόλων H_1 και H_2. Λέμε ότι, τα H_1 και H_2 αποτελούν έναν ***χωρισμό*** του S. Επειδή κάθε ένα από τα κλειστά αυτά σύνολα είναι και ανοικτό, ως συμπλήρωμα κλειστού συνόλου, μη συνεκτικό είναι το S, αν μερίζεται σε δύο ανοικτά σύνολα. ***Συνεχές*** καλείται, κάθε συνεκτικό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

Πρόταση. Ο $\mathbb{R}$ είναι συνεκτικό σύνολο. Τα διαστήματα του $\mathbb{R}$ είναι συνεκτικά σύνολα.
Απόδειξη. Έστω, ότι $\mathbb{R} = H_1 \cup H_2$, με $H_1 \cap H_2 = \varnothing$, $H_1 = \overline{H}_1 \neq \varnothing$ και $H_1 = \overline{H}_1 \neq \varnothing$. Για κάθε $a \in H_1$ και $b \in H_2$, $|b-a| = \varepsilon > 0$. Άρα, κάθε σημείο του H_1 απέχει από το H_2 μη μηδενική απόσταση. Επίσης, κάθε σημείο του H_2 απέχει από το H_1 μη μηδενική απόσταση. Τούτο όμως είναι αδύνατον, μια και τα σύνολα αυτά είναι κλειστά σύνολα.

Πρόταση. Αν E συνεκτικό σύνολο, και $E \subset E_1 \subset \overline{E}$, τότε και το E_1 συνεκτικό σύνολο.
Απόδειξη. Πράγματι, αν τα H_1 και H_2 αποτελούν χωρισμό του E_1, τότε και τα $H_1 \cap E$ και $H_1 \cap E$ αποτελούν, εφ' όσον είναι μη κενά, χωρισμό του E. Αν μία από τις δύο αυτές τομές είναι $\varnothing$, π.χ. αν $H_1 \cap E = \varnothing$, τότε, αναγκαστικά, $E \subseteq H_2$. Άρα, και, $\overline{E} \subseteq \overline{H}_2$, οπότε και, $E_1 \subseteq \overline{H}_2 = H_2$. Άρα, $H_1 = \varnothing$. Άτοπον.

Ορισμός. Θα λέμε ότι δύο σημεία του $\mathbb{C}$ ***συνδέονται,*** αν και μόνον αν, υπάρχει συνεκτικό σύνολο που να τα περιέχει.

Πρόταση. Αν κάθε δύο σημεία του συνόλου E συνδέονται, το E είναι συνεκτικό σύνολο.
Απόδειξη. Έστω ότι το E χωρίζεται από τα H_1 και H_2. Όμως, τα $z_1 \in H_1$ και $z_2 \in H_2$ από υπόθεση συνδέονται. Άτοπον.

Πόρισμα. Η ένωση δύο συνεκτικών συνόλων με τομή μη κενή, είναι συνεκτικό σύνολο.

Πόρισμα. Η έκφραση «το σημείο a συνδέεται με το σημείο b» ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας επί του $\mathbb{C}$.

Ορισμός. Συνεκτική συνιστώσα του σημείου a, είναι η τάξη ισοδυναμίας του a. Η συνεκτική συνιστώσα δηλαδή του a, αποτελείται από όλα εκείνα τα σημεία, που συνδέονται με το a. Αυτή, είναι, βέβαια, ένα συνεκτικό σύνολο.

Ορισμός. Λέμε ότι τα n σημεία z_i, $1 \leq i \leq n$, αποτελούν μία ε-άλυσσο, αν και μόνον αν, $|z_i - z_j| < \varepsilon$, για κάθε $1 \leq i, j \leq n$. Λέμε ότι, ο χώρος μας είναι ε-συνεκτικός, αν κάθε δύο σημεία του, αποτελούν την αρχή και το πέρας μιάς ε-αλύσσου.
Θα λέμε ότι τα n σύνολα E_i, $1 \leq i \leq n$, αποτελούν μίαν άλυσσο, αν και μόνον αν, η τομή τους ανά δύο είναι μη κενή.

Πρόταση. Το σύνολο S είναι συμπαγές, αν και μόνον αν είναι ε-συνεκτικό.
Απόδειξη. α) Το S συμπαγές. Υπάρχει τότε, πεπερασμένη ανοικτή κάλυψη $(A_i)_{i \in N}$ του S. Την εκλέγουμε, έτσι ώστε $\delta(A_i) < \varepsilon / 2$.
β) Το σύνολο S είναι ε-συνεκτικό. Άρα, μία συγκλίνουσα ακολουθία, είναι και ακολουθία Cauchy.

Βιβλιογραφία. 1) S. Saks and A. Zygmund: «Analytic Functions» Polska Akademia Nauk, 1965
2) M.H.A. Newman: Elements of the Topology of Plane Sets of Points Cambridge at the University Press, 1961.