



## ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΔΙΕΓΕΡΣΗ ΑΝΩ ΚΛΑΔΟΥ ΤΗΣ ΔΕΥΤΕΡΟΓΕΝΟΥΣ ΛΥΣΗΣ ΡΟΗΣ POISEUILLE 2D

Μάριος-Ανδρέας Νικολαΐδης\* και Πέτρος Ιωάννου

Τμήμα Φυσικής, Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα

\* e-mail: [mnikolaidis@phys.uoa.gr](mailto:mnikolaidis@phys.uoa.gr)

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Διαταραχές που εμφανίζουν μεταβατική αύξηση αποτελούν έναν αποτελεσματικό τρόπο για να μεταφερθεί ενέργεια από μια μέση ροή στις διαταραχές και για να έχουμε μετάβαση στην τυρβώδη κατάσταση. Εξετάζουμε στην περίπτωση μιας ροής Poiseuille 2D σε αριθμό  $Re=4000$  εάν οι μη γραμμικές βέλτιστες διαταραχές αποτελούν τις καταλληλότερες αρχικές συνθήκες για να καταλήξουν στη ζώνη ημισορροπίας και συν τω χρόνω στην χρονοεξαρτώμενη ευσταθή λύση της ροής στις δύο διαστάσεις. Ο προσδιορισμός των μη γραμμικών διαταραχών γίνεται με μεθόδους συζυγούς βελτιστοποίησης. Συμπεραίνουμε ότι σε 2 διαστάσεις οι μη γραμμικές βέλτιστες διαταραχές δεν αποφέρουν σημαντική βελτίωση της απόδοσης και δεν ακολουθούν μια διαφορετική διαδικασία διέγερσης του άνω κλάδου της δευτερογενούς λύσης.

**Λέξεις κλειδιά:** μετάβαση στην τυρβώδη κατάσταση, μη γραμμική βελτιστοποίηση

### 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Γνωρίζουμε πως μια ροή Poiseuille 2D αποκτά δευτερογενείς λύσεις καθώς αυξάνεται ο αριθμός  $Re$ , χωρίς απαραίτητα να είναι γραμμικά ασταθής. Η αστάθεια των δευτερογενών λύσεων σε 3 διαστάσεις αποτελεί έναν γενικότερο μηχανισμό για την μετάβαση στην τυρβώδη κατάσταση. Η αρχική υλοποίηση του μηχανισμού από τους [Orszag and Patera \(1980\)](#) προέβλεπε την χρήση ιδιοκαταστάσεων του τελεστή Orr-Sommerfeld (OS) με ενέργεια που ξεπερνούσε το κατώφλι το οποίο είχε ταυτοποιηθεί από τους [Zahn et al. \(1974\)](#) ως ο ασταθής κάτω κλάδος της λύσης (Lower Branch-LB) με την προσθήκη μιας μικρής τρισδιάστατης διαταραχής. Ένας πιο αποδοτικός τρόπος για να ξεπεραστεί αυτό το κατώφλι προτάθηκε από τους [Butler and Farrell \(1994\)](#), με την χρήση γραμμικών βέλτιστων διαταραχών (Optimals-OP), οι οποίες εκμεταλλεύονται τη μη κανονικότητα του γραμμικού τελεστή για να επιτύχουν μεταβατική αύξηση της ενέργειας.

Σχετικά πρόσφατα νέες τεχνικές για τον υπολογισμό μη γραμμικών βέλτιστων διαταραχών (Non-Linear Optimals-NLOP) έχουν εντοπίσει αρκετά διαφορετικά αποτελέσματα σε σχέση με τα OP σε κάποιες τρισδιάστατες ροές ([Pringle et al. \(2012\)](#), [Cherubini et al. \(2011\)](#)). Θα εφαρμόσουμε αυτές τις τεχνικές σε μια ροή Poiseuille 2D για να εξετάσουμε εάν τα NLOP χρειάζονται σημαντικά χαμηλότερη αρχική ενέργεια σε σχέση με τα OP για να μεταβούν στη ζώνη ημισορροπίας ανάμεσα στους 2 κλάδους της δευτερογενούς λύσης. Επιπλέον θα επαναλάβουμε την ίδια ανάλυση για τις περιορισμένες Navier-Stokes εξισώσεις όπου η μη γραμμικότητα διατηρείται μόνο στις αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στη μέση ροή και στα κύματα κατά τη διεύθυνση της ροής.

## 2. ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Ορίζουμε την ενέργεια διαταραχών ως το ολοκλήρωμα  $E(T) = \iint \frac{1}{2} \vec{u}' \cdot \vec{u}'|_T dx dy$ , όπου το  $\vec{u}'$  υπολογίζεται από την διαφορά του πεδίου ταχυτήτων με την ομαλή ροή Poiseuille  $U$ . Η ποσότητα που θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε είναι ο λόγος της τελικής προς την αρχική ενέργεια, δηλαδή το συναρτησοειδές  $\tilde{G}(\vec{u}'(T), \vec{u}'(0)) = \frac{E(T)}{E(0)}$ . Οι περιορισμοί που διέπουν τη μεγιστοποίηση επιβάλλονται με την χρήση πολλαπλασιαστών Lagrange, δηλαδή εξέλιξη με βάση τις ασυμπίεστες Navier-Stokes και αρχική ενέργεια διαταραχών  $E_0$ . Τελικά το επαυξημένο συναρτησοειδές γράφεται ως εξής:

$$G(\vec{u}', \vec{\lambda}, b, c) = \tilde{G} - \int_0^T \int_{-1}^1 \int_0^{\frac{2\pi}{a}} b^\dagger (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}') dx dy dt - c(E'(0) - E_0) - \int_0^T \int_{-1}^1 \int_0^{\frac{2\pi}{a}} \vec{\lambda}^\dagger \left[ \partial_t \vec{u}' + U \partial_x \vec{u}' + v \partial_y U \hat{x} + (\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}' + \vec{\nabla} p' - \frac{1}{Re} \Delta \vec{u}' \right] dx dy dt$$

Το RNL σύστημα περιγράφει μια απλούστερη εικόνα, στην οποία η μέση ροή εξελίσσεται με βάση το NL αλλά οι διαταραχές ακολουθούν την γραμμική δυναμική. Για τον υπολογισμό στο RNL σύστημα θα αντικαταστήσουμε τον μη γραμμικό όρο με τη μέση τιμή του ως προς τη διεύθυνση της ροής,  $(\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}' \rightarrow \langle (\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}' \rangle = \int_0^{\frac{2\pi}{a}} (\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}' dx$ .

Οι μεταβολές αυτού του συναρτησοειδούς σε σχέση με τις κανονικές μεταβλητές εξάγουν τις συζυγείς (adjoint) εξισώσεις και τις αντίστοιχες συνοριακές και αρχικές συνθήκες.

$$\vec{\lambda}(x, y, T) = \vec{u}'(x, y, T), \vec{\lambda}(0, y, t) = \vec{\lambda}\left(\frac{2\pi}{1.25}, y, t\right), \vec{\lambda}(x, \pm 1, t) = 0 \quad (1)$$

$$\partial_t \vec{\lambda} = -U \partial_x \vec{\lambda} + \lambda_1 \partial_y U \hat{y} - (\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{\lambda} - u'_i \nabla \lambda_i - \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{\lambda} - \vec{\nabla} b \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{\lambda} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \vec{u}_0} = \vec{\lambda}(x, y, 0) - c \vec{u}'(x, y, 0) \quad (4)$$

Η συναρτησιακή παράγωγος (εξ.4) δεν μπορεί εν γένει να μηδενιστεί άμεσα (διαφορετικά θα ήμασταν ήδη σε κάποιο ακρότατο), και χρησιμοποιείται για να μεταβάλλουμε την αρχική συνθήκη  $\vec{u}'(x, y, 0)$  με βάση μια μέθοδο συζυγούς βελτιστοποίησης όπως περιγράφεται από τους [Cherubini and De Palma \(2013\)](#). Επιλέγουμε μόνο περιοδικές διαταραχές έτσι ώστε να διατηρήσουμε την αρχική ροή μάζας και τη συνολική ενέργεια του συστήματος. Οι ενέργειες των διαταραχών κανονικοποιούνται με βάση την ενέργεια της ομαλής ροής  $E_b = \iint \frac{1}{2} U^2 dx dy$ .

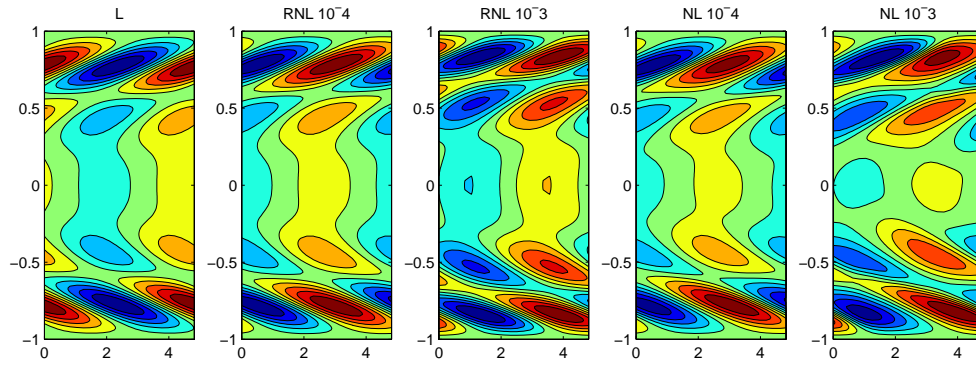
Οι Navier-Stokes και οι συζυγείς εξισώσεις επιλύονται αριθμητικά σε ένα περιοδικό χωρίο  $[2 \times \frac{2\pi}{a}]$ ,  $a = 1.25$ , με διακριτοποίηση 197 σημείων στο  $y$  και 24 στο  $x$ . Επιλέγουμε την αναπαράσταση vorticity-streamfunction ( $\omega - \psi$ ) και για τις δυο εξισώσεις. Για τις Navier-Stokes επιβάλλουμε μια σταθερή βαθμίδα πίεσης στην περιοδική διεύθυνση  $\hat{x}$  της ροής.

Για να επιβεβαιώσουμε την ακρίβεια του αριθμητικού κώδικα ολοκληρώνουμε καταστάσεις OS στην γραμμική περιοχή για την παραπάνω και για διαφορετικές διατάξεις και επίσης ελέγχουμε την δυνατότητα μετάβασης στην ζώνη ημι-ισορροπίας και την ευσταθή λύση (UB). Ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης ελέγχεται με βάση τα γραμμικά αποτελέσματα. Για τη συνέχεια θα περιοριστούμε στο αρχικό χωρίο και σε αριθμό  $Re = 4000$  όπου και έχουμε δεδομένα από προηγούμενες μελέτες σχετικά με τη μετάβαση στο UB.

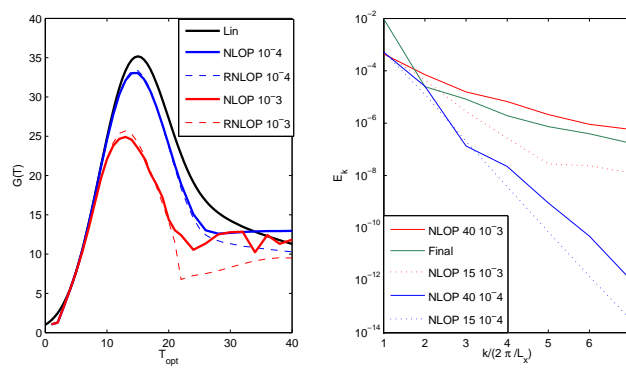
## 3. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

### 3.1 Μη γραμμικές βέλτιστες διαταραχές

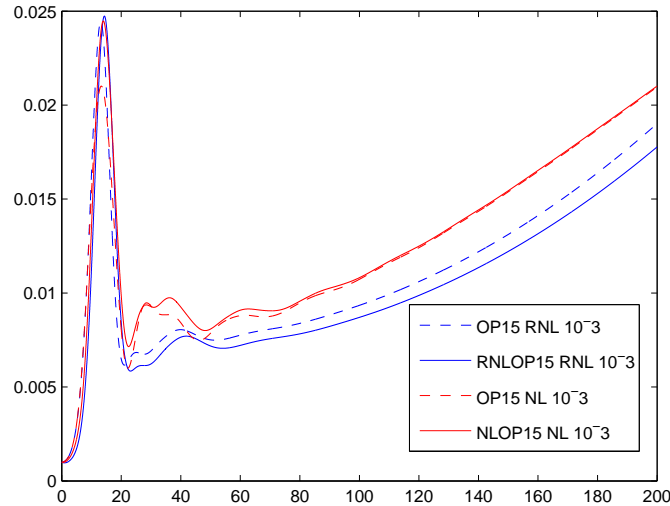
Εισάγουμε ως αρχικό πεδίο  $u_0$  ένα OP το οποίο κανονικοποιούμε στην εκάστοτε ενέργεια  $E_0$  και υπο-



Σχήμα 1: Optimals για τις 2 περιπτώσεις (RNL, NL) κανονικοποιημένα στην ενέργεια της ομαλής ροής και γραμμικό optimal (L) χρόνου  $T = 15$ .



Σχήμα 2: Διάγραμμα βέλτιστης ανάπτυξης (αριστερά) και ενέργεια στις κυματικές καταστάσεις για διάφορα optimals και την τελική κυματική λύση (δεξιά)



Σχήμα 3: Εξέλιξη σε RNL και NL των optimalis  $T = 15$

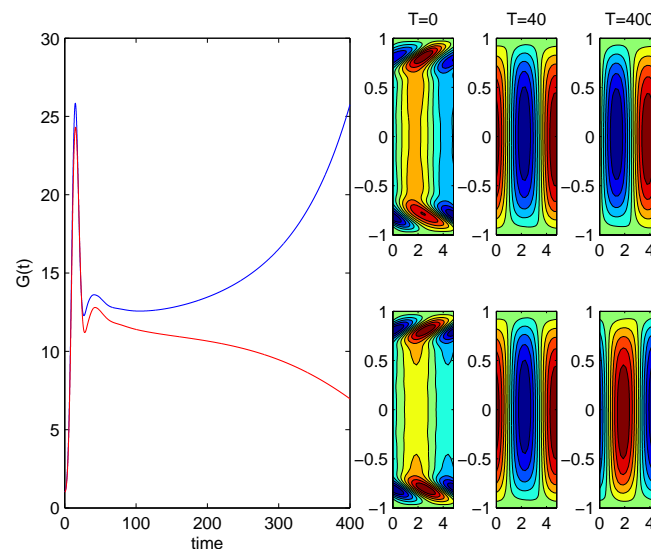
λογίζουμε την ανάπτυξη για διαφορετικούς χρόνους  $T$ . Στο σχ. 2 συγκρίνουμε την βέλτιστη ανάπτυξη στην γραμμική περιοχή με αυτές των NL και RNL συστημάτων. Η πιο σημαντική αλληλεπίδραση για την δραστική μείωση της ανάπτυξης είναι αυτή της μέσης ροής και των διαταραχών, η οποία είναι η μόνη μη γραμμική που διατηρείται στην περίπτωση του RNL. Οι αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στα κύματα επιφέρουν μια επιπλέον μικρή μείωση. Τα αντίστοιχα RNLOP αποτελούνται από κύματα ενός κυματαριθμού, ενώ τα NLOP καταλαμβάνουν όλο το διαθέσιμο φάσμα σχ. 2, με το πλάτος του κάθε κύματος να εξαρτάται από την αρχική ενέργεια  $E_0$  και τον χρόνο  $T$ . Η δομή του OP δεν αλλάζει σημαντικά και στις 2 περιπτώσεις (σχ. 1).

### 3.2 Εξέλιξη των optimalis χρόνου $T = 15$

Το επόμενο βήμα είναι να συγκρίνουμε την εξέλιξη των optimalis της κάθε δυναμικής με το αντίστοιχο γραμμικό. Όπως έδειξαν οι Butler και Farrell, OP με ενέργεια μιας τάξης μεγέθους μικρότερη από τις OS καταστάσεις που χρησιμοποίησαν οι Orszag και Patera καταφέρνουν να ξεπεράσουν το κατώφλι της LB λύσης καταλήγοντας στην ζώνη ημι-ισορροπίας και στην συνέχεια εξελίσσονται στην χρονοεξαρτώμενη ευσταθή λύση (Upper Branch). Θα εξετάσουμε την περίπτωση του  $T = 15$  OP με ενέργεια  $E_0 = 10^{-3} E_b$ . Στο σχ. 3 βλέπουμε την εξέλιξη των διαφορετικών καταστάσεων. Αν και τα NLOP, RNLOP χρόνου  $T = 15$  εμφανίζουν μεγαλύτερη ανάπτυξη για τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή από τα γραμμικά, η μετέπειτα εξέλιξή τους δεν αποτελεί βελτίωση ως προς τα OP (μάλιστα στην περίπτωση του RNL το RNLOP έχει μικρότερη ανάπτυξη). Κατά την εξέλιξη του RNL οι διαταραχές παραμένουν μονοχρωματικές. Μπορεί μάλιστα να δειχθεί ότι η RNL και η NL δυναμική είναι ισοδύναμες στην περίπτωση που περιοριστούμε στην αλληλεπίδραση ενός κύματος με την μέση ροή. Από αυτή την παρατήρηση είναι εύκολο να εντοπίσουμε το αντίστοιχο ενεργειακό κατώφλι και για το RNL σύστημα. Επίσης επιβεβαιώνουμε και την αναμενόμενη διαφορά στην ενέργεια της RNL UB λύσης από την NL.

### 3.3 Ελάχιστη ενέργεια μετάβασης

Εξετάζουμε στη συνέχεια εάν τα NLOP μειώνουν την ελάχιστη ενέργεια που χρειάζεται για να περάσουμε στην αυτοσυντηρούμενη περιοχή της NL περίπτωσης. Καθώς είδαμε τα NLOP σχετικά μικρών χρόνων ( $T < 20$ ) δεν εξασφαλίζουν μια καλύτερη μετάβαση στη ζώνη ημι-ισορροπίας, για αυτό θα χρησιμοποιήσουμε NLOP (και OP) που αντιστοιχούν σε χρόνο  $T = 40$ . Αρχικά αναζητούμε OP που να επιστρέφουν στην ομαλή ροή αλλά να πλησιάζουν αρκετά κοντά στην απαιτούμενη ενέργεια για τη μετάβαση. Εντοπίζουμε μια τέτοια ενέργεια,  $E_0 = 1.3 \cdot 10^{-4} E_b$ , για την οποία και πραγματοποιούμε τη μη γραμμική βελτιστοποίηση. Στο σχ. 4 βλέπουμε το NLOP να εξελίσσεται τελικά προς την UB λύση της ροής. Οι δομές των διαταραχών και εδώ δεν διαφέρουν σημαντικά.



Σχήμα 4: Σύγκριση NL (μπλέ, πάνω σειρά στιγμιότυπων) και γραμμικού (κόκκινο, κάτω σειρά) optimal χρόνου  $T = 40$  και αρχικής ενέργειας  $E_0 = 1.3 \cdot 10^{-4}$  σε μη γραμμική ολοκλήρωση.

#### 4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η εφαρμογή της μη-γραμμικής βελτιστοποίησης για τα optimal 2 διαστάσεων στην ροή Poiseuille δεν αποτέλεσε σημαντική βελτίωση σε σχέση με τα OP, και δεν εντοπίσαμε κάποιο καινούργιο NLOP το οποίο να μεταβάλλει τις βέλτιστες δομές. Από τα παραπάνω φαίνεται ότι η πιο σημαντική διεργασία που διαφοροποιεί τα γραμμικά αποτελέσματα είναι η μεταβολή της μέσης ροής κατά την διάρκεια της μεταβατικής αύξησης (έως  $T = 20$ ). Μια παρατήρηση που μπορούμε να κάνουμε είναι πως OP και NLOP θα συμφωνούν όλο και περισσότερο καθώς πλησιάζουμε την γραμμικά ασταθή περιοχή, λόγω της μείωσης στην ενέργεια κατωφλίου.

#### Αναφορές

- K. M. Butler and B. F. Farrell, “Nonlinear equilibration of two-dimensional optimal perturbations in viscous shear flow” *Phys. Fluids* **6**, 2011–2019 (1994).
- S. Cherubini and B. De Palma, “Nonlinear optimal perturbations in a Couette flow: bursting and transition” *J.Fluid Mech.* **716**, 251–279 (2013).
- S. Cherubini, B. De Palma, J. C. Robinet, and A. Bottaro, “The minimal seed of turbulent transition in the boundary layer” *J.Fluid Mech.* **689**, 221–253 (2011).
- S. A. Orszag and A. T. Patera, “Subcritical transition to turbulence in plane channel flows” *Phys.Rev.Lett.* **45**, 989–993 (1980).
- C. C.T. Pringle, A. P. Willis and R. R. Kerswell, “Minimal seeds for shear flow turbulence: using nonlinear transient growth to touch the edge of chaos” *J.Fluid Mech.* **702**, 415–443 (2012).
- Z. P. Zahn, J. Toomre, E. A. Spiegel, and D. O. Gough, “Nonlinear cellular motions in Poiseuille channel flow” *J.Fluid Mech.* **64**, 319–345 (1974)

# OPTIMAL EXCITATION OF THE UPPER BRANCH SOLUTION IN 2D POISEUILLE FLOW

Marios-Andreas Nikolaidis\* and Petros Ioannou

Department of Physics, National and Kapodistrian University of Athens, Athens

\* e-mail: [pjoannou@phys.uoa.gr](mailto:pjoannou@phys.uoa.gr)

## ABSTRACT

Transiently growing disturbances are an efficient way to gain energy from a mean velocity profile and trigger transition. In the case of a 2D Poiseuille flow at  $Re = 4000$  we are interested in determining whether the nonlinear optimal disturbances are the most efficient initial conditions for reaching the zone of quasi-equilibria and eventually exciting the upper branch solution of the flow. We conclude that in two dimensions nonlinear optimals do not result in a significant improvement of energy growth and do not produce an alternative path for the excitation of the upper-branch solution.

**Keywords:** transition to turbulence, non-linear optimization