

Μελέτη της μετάβασης σε τυρβώδη κατάσταση ροής Couette μέσω μη γραμμικών βέλτιστων διαταραχών και υπό την επίδραση ελεύθερης τύρβης

Μάριος-Ανδρέας Νικολαΐδης* και Πέτρος Ι. Ιωάννου

Τμήμα Φυσικής, Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα

* e-mail: mnikolaidis@phys.uoa.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η μελέτη της εξέλιξης των μη γραμμικών βέλτιστων διαταραχών (ΜΓΒΔ) μιας διατμητικής ροής προσδιορίζει την αλληλουχία των μηχανισμών που επιφέρουν τη μετάβαση στην τυρβώδη κατάσταση σε ένα ιδεατό περιβάλλον άνευ θορύβου. Η ύπαρξη θορύβου κατά τη μετάβαση είναι όμως ένας σημαντικός παράγοντας που πρέπει να λάβουμε υπόψιν μας. Σε αυτή την εργασία υπολογίζουμε τις ΜΓΒΔ που αντιστοιχούν στο μικρότερο χωρίο που υποστηρίζει τυρβώδη δυναμική σε μία ροή Couette και προσδιορίζουμε τη συνεισφορά των ΜΓΒΔ στην διαδικασία μετάβασης σε περιβάλλον θορύβου.

Λέξεις κλειδιά: τυρβώδης ροή, μετάβαση σε τύρβη, μη γραμμική βελτιστοποίηση, στοχαστική διέγερση

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μετάβαση στην τυρβώδη κατάσταση δεν επιτυγχάνεται αν δεν ενεργοποιηθούν μη γραμμικές διαδικασίες. Ερώτημα όμως παραμένει αν στα αρχικά στάδια η μετάβαση κυριαρχείται από κυρίως γραμμικές ή κυρίως μη γραμμικές διαδικασίες. Το ερώτημα εγείρεται λόγω της απουσίας κάποιας (ισχυρής) υδροδυναμικής αστάθειας που θα οδηγούσε τις στρωτές ροές Couette, Hagen-Poiseuille, που είναι γραμμικά ασυμπτωτικά ευσταθείς για κάθε αριθμό Reynolds, καθώς και τις στρωτές ροές Blasius του οριακού στρώματος και την επίπεδο ροή Poiseuille, που είναι ασθενώς ασταθείς, στη τυρβώδη κατάσταση. Για το λόγο αυτό προτάθηκαν διάφορες μη γραμμικές διαδικασίες οι οποίες θα μπορούσαν να οδηγήσουν τη τη στρωτή ροή στη τυρβώδη κατάσταση (Bayly et al. 1988, Benney 1960, Orszag and Patera 1980). Από τις μη γραμμικές διαδικασίες που έχουν προταθεί ξεχωρίζουμε το μη γραμμικό σενάριο μετάβασης των λοξών κυμάτων σύμφωνα με το οποίο αρχικές διαταραχές στη μορφή λοξών κυμάτων αλληλεπιδρούν σχηματίζοντας προσαύξηση της ροής μαζί με στρόβιλο που οδηγούν τη ροή στην τυρβώδη κατάσταση (Benney 1960). Ανάκαμψη της γραμμικής θεωρίας επήλθε όταν συνειδητοποιήθηκε η σημασία της μη κανονικότητας του γραμμικού τελεστή της ροής στην μελέτη της αστάθειας υδροδυναμικών ροών, η οποία καθιστά τις ιδιοκαταστάσεις του ακατάλληλες για τον χαρακτηρισμό της σταθερότητας της ροής (Butler and Farrell 1992, Farrell 1988, Farrell and Ioannou 1993, Reddy and Henningson 1993, Trefethen et al. 1993). Η σημασία της μη κανονικότητας έγκειται στην δυνατότητα σύνθεσης διαταραχών με προσωρινή υψηλή αποδοτικότητα ενέργειας, οι οποίες δύνανται παρότι η ροή είναι υδροδυναμικά ευσταθής να μεταλλάξουν ικανά και να ενεργοποιήσουν τις μη γραμμικές αλληλεπιδράσεις για να επιτευχθεί τελικά η μετάβαση.

Στην περίπτωση μιας διατμητικής ροής με ιξώδες, η γενικευμένη γραμμική ανάλυση του μη-κανονικού τελεστή που διέπει τη δυναμική μικρών διαταραχών της στρωτής ροής εντόπισε τις αρχικές διαταραχές

που οδηγούν στη μέγιστη μεγέθυνση της ενέργειας σε κάποιο χρόνο. Αυτές οι διαταραχές που οδηγούν στη μεγαλύτερη μεγέθυνση της ενέργειας σύμφωνα με τη γραμμική δυναμική ονομάστηκαν βέλτιστες διαταραχές (ΒΔ) (optimals) (Farrell 1988). Οι ΒΔ για χρόνους τάξης $O(Re)$ είναι στρόβιλοι δύο διαστάσεων που περιορίζονται στο επίπεδο κάθετο στη ροή ενώ οι διαταραχές που οδηγούν σε μεγιστοποίηση της ενέργειας σε χρόνους χαρακτηριστικούς της μεταφοράς της μέσης ροής είναι λοξά κύματα που χρησιμοποιούν το γραμμικό μηχανισμό Orr (Butler and Farrell 1992, Farrell and Ioannou 1993, Reddy and Henningson 1993, Trefethen et al. 1993). Ο εντοπισμός των ΒΔ προσφέρει γραμμικό μηχανισμό που μπορεί να ενεργοποιήσει τελικά τις μη γραμμικές διαδικασίες για να επιτευχθεί η μετάβαση ενώ συγχρόνως δίνει δυναμική ερμηνεία της καθολικής εμφάνισης δισδιαστάτων στροβίλων και προσανυξήσεων κατά τη μετάβαση. Προσομοιώσεις όμως έδειξαν ότι το ζεύγος λοξών κυμάτων ενεργοποιεί τάχιστα μη γραμμικές διαδικασίες οι οποίες οδηγούν σε μετάβαση με αρχική ενέργεια που είναι μια τάξη μεγέθους μικρότερη από αυτήν που οδηγεί σε μετάβαση με αρχικές συνθήκες τη βέλτιστη δομή των δισδιαστάτων στροβίλων (Lundbladh et al. 1994). Αυτή η παρατήρηση οδήγησε σε αμφισβήτηση της σημασίας των ΒΔ και οδήγησε στην προσπάθεια εντοπισμού των βελτίστων διαταραχών της μη γραμμικής δυναμικής (ΜΓΒΔ) (Monokrousos et al. 2011, Pringle et al. 2012). Οι ΜΓΒΔ εντοπίζουν τις μικρότερης ενέργειας διαταραχές που μπορεί να οδηγήσουν σε μετάβαση, επιλύουν το πρόβλημα του προσδιορισμού της ελάχιστης διαταραχής που οδηγεί στη τυρβώδη κατάσταση (η πυκνότητα ενεργειας που απαιτείται για μετάβαση είναι της τάξης 0.03 % της πυκνότητας ενέργειας της στρωτής ροής για αριθμό Reynolds, $Re = 400$, σε ροή Couette) και προσδιορίζουν τη συμβολή των γραμμικών και μη γραμμικών διαδικασιών κατά τη μετάβαση. Ανάλυση της εξέλιξης των ΜΓΒΔ αποκάλυψε ότι χρησιμοποιούν μία δαιδαλώδη και εντυπωσιακή αλληλουχία γραμμικών και μη γραμμικών διαδικασιών για να επιτύχουν τη μετάβαση (Pringle et al. 2012; 2015).

Όλες αυτές οι αναλύσεις όμως υποθέτουν ότι η διαδικασία μετάβασης συμβαίνει σε ιδανικό περιβάλλον στο οποίο απουσιάζει περιβαλλοντικός θόρυβος (τύρβη ελεύθερης ροής-TEP, free-stream turbulence). Υποθέτουν ότι ο θόρυβος δεν έχει ενεργητική συνεισφορά στη δυναμική της μετάβασης, απλώς συνεισφέρει παθητικά διαταραχές στη στρωτή ροή και οι ΜΓΒΔ εξ' αυτών αναπτύσσονται χωρίς να επηρεάζονται από τον θόρυβο. Αυτή η υπόθεση εξετάστηκε και έγινε αντιληπτό από νωρίς ότι ο θόρυβος έχει κάποια συνεισφορά στη δυναμική: φάνηκε μάλιστα ότι σε ορισμένα πειράματα οδηγεί στο σχηματισμό κάποιας ασταθούς δομής, που έχει διαφορετική δυναμική εξέλιξη από τα ΒΔ (ή ακόμα τα ΜΓΒΔ) (Westin et al. 1994). Περαιτέρω όμως εξέταση αριθμητικών προσομοιώσεων του οριακού στρώματος υπό την επίδραση TEP οδήγησε στο συμπέρασμα ότι οι στρόβιλοι που οδηγούν στη μετάβαση συσχετίζονται κατ' ουσίαν με τη βέλτιστη γραμμική απόκριση του οριακού στρώματος παρότι οι μη γραμμικές αλληλεπιδράσεις λοξών κυμάτων θα μπορούσαν να οδηγήσουν αποδοτικότερα σε μετάβαση (Andersson et al. 1999, Brandt et al. 2004). Το συμπέρασμα αυτό για τη σημασία του θορύβου ήταν υπό μία έννοια αναμενόμενο διότι δεν υπήρχε θεωρητικό υπόβαθρο το οποίο επέτρεπε άλλο δυναμικό ρόλο στο θόρυβο από τη συνεχή συνεισφορά ΜΓΒΔ στη ροή. Πρόσφατη όμως ανάλυση της στατιστικής δυναμικής των διατμητικών ροών σε εργαστηριακούς σωλήνες αποκάλυψε ότι ο θόρυβος έχει καταλυτική δυναμική σημασία διότι στατιστικά παρουσιάζει ενισχυτική αναδραστική δράση στο σχηματισμό των στροβίλων που οδηγεί σε εκθετική αστάθεια των στροβίλων και των προσανυξήσεων της ροής (Farrell and Ioannou 2012). Συνεπώς μια διαφορετική διαδικασία μετάβασης, η οποία είναι οπωσδήποτε μη-γραμμική, μπορεί να υλοποιηθεί με την στατιστική εκθετική αστάθεια της μέσης ροής λόγω της παρουσίας περιβαλλοντικού θορύβου (Farrell et al. 2016). Αυτή βεβαίως η μετάβαση απαιτεί ενέργεια του υποβάθρου του θορύβου μεγαλύτερη από αυτήν του ΜΓΒΔ (περί τα 0.5% για $Re = 400$ σε ροή Couette).

Εγείρεται λοιπόν το ερώτημα: υπό ποιές προϋποθέσεις τα ΜΓΒΔ ευθύνονται για τη μετάβαση στη τυρβώδη κατάσταση και πότε η μετάβαση γίνεται μέσω της νέας στατιστικής αστάθειας που αποκαλύφθηκε πρόσφατα. Σκοπός της εργασίας μας είναι να απαντήσουμε στα δύο αυτά ερωτήματα.

2. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΜΓΒΔ

Η δυναμική της παράλληλης ροής Couette περιγράφεται από τις εξισώσεις Navier-Stokes(NS) για το πεδίο ταχυτήτων $\vec{u} = (u, v, w)$, με συνοριακές συνθήκες μη-ολίσθησης στα τοιχώματα $y = \pm 1$:

$$\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\vec{\nabla} P + \frac{1}{Re} \Delta \vec{u} \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (2)$$

$$\vec{u}_{y=\pm 1} = (\pm 1, 0, 0) \quad (3)$$

Το μήκος του αγωγού κατά την διεύθυνση της ροής, x , είναι $2\pi/a$ και το πλάτος του στη διεύθυνση, z , είναι $2\pi/b$. Θεωρούμε περιοδικές συνοριακές συνθήκες και στις 2 αυτές διευθύνσεις.

Θέλουμε να εντοπίσουμε τις βέλτιστες αρχικές διαταραχές του πεδίου ταχύτητας $\vec{u}' = \vec{u} - \vec{U}$, όπου $\vec{U} = y\hat{x}$ η ροή Couette και \hat{x} το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση τη ροής, οι οποίες οδηγούν στην μεγιστοποίηση της ενέργειας σε χρόνο T . Ορίζουμε την ενέργεια E των διαταραχών σε χρόνο T :

$$E(T) = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi/a} \int_0^{2\pi/b} \frac{1}{2} \vec{u}'(\vec{x}, T) \cdot \vec{u}'(\vec{x}, T) dz dx dy \quad (4)$$

και τον λόγο G της αρχικής προς την τελική ενέργεια

$$\tilde{G}(\vec{u}'(\vec{x}, T), \vec{u}'(\vec{x}, 0)) = \frac{E(T)}{E(0)}. \quad (5)$$

Προσθέτουμε με την χρήση πολλαπλασιαστών Lagrange τους περιορισμούς της εξέλιξης της ταχύτητας με βάση την ασυμπίεστη δυναμική των NS (έχοντας κάνει την αντικατάσταση $\vec{u} = y\hat{x} + \vec{u}'$) και της αρχικής ενέργειας E_0 της διαταραχής. Το επαυξημένο συναρτησοειδές τελικά γράφεται ως εξής:

$$G(\vec{u}', \vec{\lambda}, q, c) = \tilde{G} - \int_0^T dt \int_{-1}^1 dy \int_0^{2\pi/a} dx \int_0^{2\pi/b} dz q(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}') - c(E(0) - E_0) - \int_0^T dt \int_{-1}^1 dy \int_0^{2\pi/a} dx \int_0^{2\pi/b} dz \vec{\lambda} \left[\partial_t \vec{u}' + U \partial_x \vec{u}' + v' \partial_y U \hat{x} + (\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}' + \vec{\nabla} p' - \frac{1}{Re} \Delta \vec{u}' \right]$$

Η έκφραση αυτή υπόκειται σε βελτιστοποίηση μέσω της επαναληπτικής μεθόδου της απότομης ανόδου (Monokrousos et al. 2011, Pringle et al. 2012). Σε αυτή την μέθοδο προσδιορίζουμε τις προσαρτημένες εξισώσεις και τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες μέσω των συναρτησιακών παραγώγων ως προς τις μεταβολές της τροχιάς ($\vec{u}'(0)$, $\vec{u}'(t)$, $\vec{u}'(T)$) και της πίεσης p' .

$$\vec{\lambda}(\vec{x}, T) = 2 \frac{\vec{u}'(\vec{x}, T)}{E_0} \quad (6)$$

$$\partial_t \vec{\lambda} = -U \partial_x \vec{\lambda} + \lambda_1 \partial_y U \hat{y} - (\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{\lambda} - u'_i \vec{\nabla} \lambda_i - \frac{1}{Re} \Delta \vec{\lambda} - \vec{\nabla} q \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \vec{\lambda} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \vec{u}'(\vec{x}, 0)} = \vec{\lambda}(\vec{x}, 0) - c \vec{u}'(\vec{x}, 0) \quad (9)$$

Ο μηδενισμός των συναρτησιακών παραγώγων είναι η αναγκαία συνθήκη για να εντοπιστεί κάποιο μέγιστο (ή ελάχιστο) του G . Η συναρτησιακή παράγωγος (8) δεν μηδενίζεται άμεσα και άρα ορίζει την διεύθυνση στην οποία πρέπει να μεταβάλουμε την αρχική συνθήκη $u(\vec{x}, 0)$ έτσι ώστε οι μεταβολές $\delta G = \frac{\partial G}{\partial \vec{u}'(\vec{x}, 0)} \delta \vec{u}'(\vec{x}, 0)$ να είναι θετικές. Η διαδικασία που ακολουθούμε ξεκινάει από σχετικά μεγάλη ενέργεια διαταραχών, την οποία στη συνέχεια μειώνουμε χρησιμοποιώντας ως αρχική συνθήκη το τελικό αποτέλεσμα της προηγούμενης βελτιστοποίησης.

Στις προσομοιώσεις μας αναφερόμαστε στην παράλληλη ροή Couette αριθμού $Re = 400$ σε χωρίο διαστάσεων $[L_x \times L_y \times L_z] = [1.75\pi \times 2 \times 1.2\pi]$. Για αυτή την ανάλυση χρησιμοποιήσαμε $[N_x \times N_y \times N_z] = [24 \times 43 \times 24]$ σημεία. Οι αρμονικές που διατηρούμε μετά το de-aliasing είναι 15 σε κάθε περιοδική διεύθυνση. Το χρονικό βήμα σε όλες τις προσομοιώσεις είναι $t = 0.04$. Στην περίπτωση του στοχαστικού θορύβου, για κάθε αρμονική που χρησιμοποιούμε εισάγουμε ένα τυχαίο διάνυσμα $\begin{pmatrix} \hat{v}(y) \\ \hat{\eta}(y) \end{pmatrix}_{k_x k_z}$ κάθε χρονική στιγμή από το οποίο κατασκευάζουμε το πεδίο του θορύβου στο φυσικό χώρο μέσω των σχέσεων ((2),(10)) και το προσθέτουμε στο υπολογισμένο πεδίο ταχυτήτων.

Ο αριθμητικός κώδικας που αναπτύξαμε επιλύει το σύστημα των εξισώσεων για την χρονική εξέλιξη της Λαπλασιανής της εγκάρσιας ταχύτητας v και της εγκάρσιας στροβιλότητας η , τις οποίες υπολογίζουμε με απαλοιφή της πίεσης P από την εξ.1 χρησιμοποιώντας την σχέση (2) και την σχέση της εγκάρσιας στροβιλότητας η με τα πεδία ταχυτήτων u, w

$$\eta = \partial_z u - \partial_x w. \quad (10)$$

Επίσης υπολογίζουμε και τις μέσες ροές $U(y) = [u], W(y) = [w]$, όπου η αγκύλη συμβολίζει την μέση τιμή ως προς τις x, z διευθύνσεις, $[\cdot] = 1/L_x L_z \int_0^{L_x} dx \int_0^{L_z} dz$. Οι εξισώσεις γράφονται ως εξής:

$$\partial_t \Delta v + (\partial_{xx} + \partial_{zz})(\vec{u} \cdot \nabla)v = \partial_y(\partial_x(\vec{u} \cdot \nabla)u + \partial_z(\vec{u} \cdot \nabla)w) + \frac{1}{Re} \Delta \Delta v \quad (11)$$

$$\partial_t \eta + (\vec{u} \cdot \nabla)\eta = \frac{1}{Re} \Delta \eta \quad (12)$$

$$\partial_t U + \partial_y [uv] = \frac{1}{Re} \partial_{yy} U \quad (13)$$

$$\partial_t W + \partial_y [wv] = \frac{1}{Re} \partial_{yy} W \quad (14)$$

με τις συνοριακές συνθήκες να αλλάζουν αντίστοιχα σε $\eta_{y=\pm 1} = 0, v_{y=\pm 1} = \partial_y v_{y=\pm 1} = 0, U_{y=\pm 1} = \pm 1, W_{y=\pm 1} = 0$ (Kim et al. 1987).

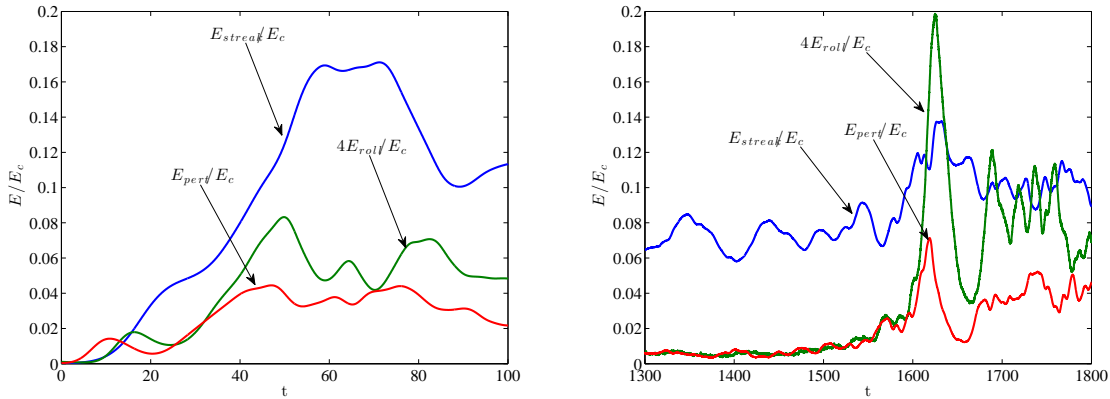
Η αριθμητική επίλυση ανάγεται στον διαχωρισμό των πεδίων κατά Fourier στο x, z και τον προσδιορισμό της χωρικής εξάρτησης των συντελεστών Fourier $\hat{v}_{k_x k_z}(t, y), \hat{\eta}_{k_x k_z}(t, y)$. Διακριτοποιούμε την κάθετη διεύθυνση με βάση την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Αντίστοιχα οι διευθύνσεις που υπόκεινται στον μετασχηματισμό Fourier ορίζονται σε ένα ισαπέχων πλέγμα στον φυσικό χώρο. Οι μη γραμμικοί όροι υπολογίζονται επίσης στον φυσικό χώρο, ενώ η εκτίμησή τους γίνεται μέσω παρεκβολής Adams-Bashforth (AB) 2ης τάξης. Ο αλγόριθμος υπολογισμού των $\hat{v}_{k_x k_z}(t, y), \hat{\eta}_{k_x k_z}(t, y)$ είναι ένα ημί-πεπλεγμένο σχήμα Crank-Nicolson με βάση τους όρους ιξώδους, το οποίο συμβολικά μπορεί να παρασταθεί ως εξής:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\delta t} = \frac{1}{2} \frac{\Delta}{Re} (u^{n+1} + u^n) + \frac{3}{2} f^n - \frac{1}{2} f^{n-1} \quad (15)$$

Στον υπολογισμό της επόμενης κατάστασης $n + 1$ χρειαζόμαστε εκτός από την κατάσταση n και τους όρους μεταφοράς που αντιστοιχούν στην $n - 1$. Για το πρώτο βήμα αντικαθιστούμε την προσέγγιση AB $\frac{3}{2} f^n - \frac{1}{2} f^{n-1}$ με την προσέγγιση Euler f^n .

3. ΒΕΛΤΙΣΤΕΣ ΔΙΑΤΑΡΑΧΕΣ

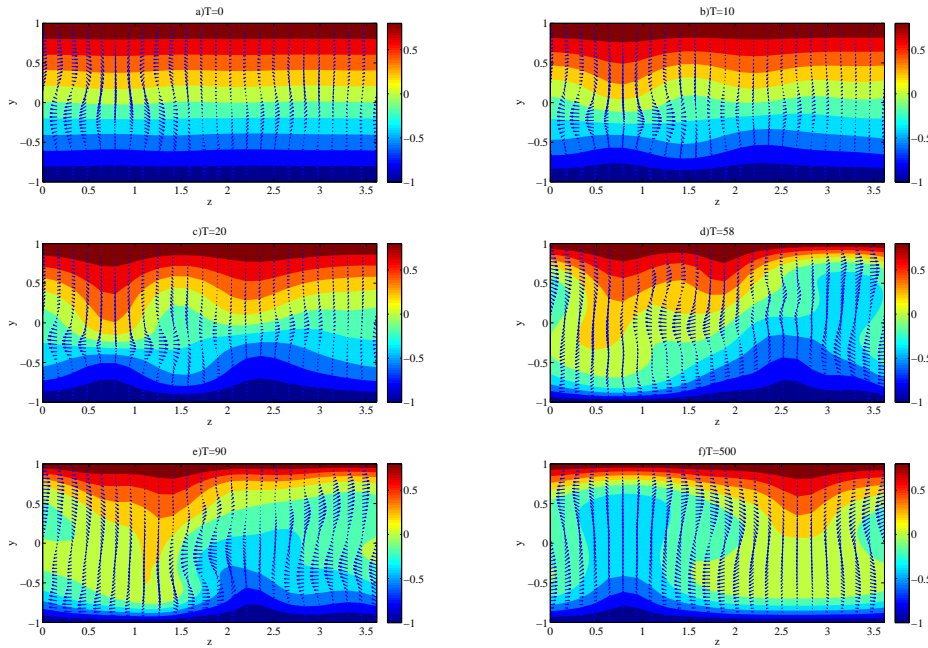
Οι βέλτιστες διαταραχές (ΒΔ) αποτελούν μια κατηγορία αρχικών συνθηκών ειδικά υπολογισμένων έτσι ώστε να επιτυγχάνουν την καλύτερη δυνατή μεγέθυνση της αρχικής τους ενέργειας σε κάποιον καθορισμένο χρόνο T . Όταν υπολογίζουμε ΒΔ μέσω της δυναμικής των γραμμικών εξισώσεων, η διαταραχή θα περιορίζεται σε ένα μόνο ζεύγος κυματαριθμών (k_x, k_z) . Οι δυο διαφορετικοί μηχανισμοί αύξησης της ενέργειας που παρατηρούνται αντιστοιχούν είτε σε $k_x = 0$ οπότε έχουμε τους στροβίλους 2 διαστάσεων



Σχήμα 1: Αριστερά: Εξέλιξη της ενέργειας των επιμέρους πεδίων ταχυτήτων (μπλε-προσαυξήσεις, πράσινο-στρόβιλοι κατά μήκος της ροής, κόκκινο-διαταραχές) για την ΜΓΒΔ. Δεξιά: Αντίστοιχη εξέλιξη των πεδίων ταχυτήτων σε στοχαστική εξέλιξη με την ένταση του πεδίου διαταραχών να αντιστοιχεί στο 22% της τυρβώδους έντασης.

να μεταφέρουν ορμή από την μέση ροή στις προσαυξήσεις ή σε $k_x \neq 0$ στις οποίες η αύξηση οφείλεται στο μηχανισμό Orit που προκύπτει από κατάλληλη γραμμική επαλληλία των ιδιοκαταστάσεων του μη-κανονικού γραμμικού τελεστή της δυναμικής. Σε πειράματα μετάβασης με ΒΔ σημαντικότερες έχουν αναδειχθεί οι διαταραχές που αποτελούνται από ζεύγη λοξών κυμάτων (επαλληλία ΒΔ αρνητικού και θετικού κυματάρθμου k_z και $k_x \neq 0$) υπό την προϋπόθεση ότι έχουν το κατάλληλο πλάτος για να ενεργοποιηθούν οι μη γραμμικές διαδικασίες. Οι ΜΓΒΔ αξιοποιούν το σύνολο των γραμμικών μηχανισμών αύξησης ενέργειας που εντοπίζονται στις ΒΔ καθώς επίσης και μη γραμμικές διαδικασίες.

Με την διαδικασία βελτιστοποίησης προσδιορίζουμε την ΜΓΒΔ χρόνου $T = 50$ με αρχική ενέργεια $E_0 = 5 \times 10^{-4} E_c$, όπου E_c η ολική κινητική ενέργεια της ροής Couette σε όλο τον αγωγό. Η αρχική σύσταση της ΜΓΒΔ περιέχει δισδιάστατους στροβίλους σε επαλληλία με ζεύγη λοξών κυμάτων. Τα λοξά κύματα χαρακτηρίζονται από γρήγορη αύξηση της ενέργειας, με το πρώτο μέγιστο των διαταραχών (το πεδίο των διαταραχών ορίζεται εδώ ως το πεδίο ταχυτήτων αποτελούμενο από όλες τις αρμονικές με $k_x \neq 0$, δηλαδή οι διαταραχές από τη ροή Couette με $k_x = 0$ δεν συμπεριλαμβάνονται) να εντοπίζεται σε χρόνο $t = 11$ (βλ. Σχ. 1 αριστερά). Η αύξηση της ενέργειας των λοξών κυμάτων επιτελείται με το γραμμικό μηχανισμό Orit των ΒΔ που οδηγούν σε βελτιστοποίηση σε μικρούς χρόνους. Συγχρόνως αναπτύσσονται περαιτέρω οι δισδιάστατοι στρόβιλοι (διαταραχές με $k_x = 0$ και ταχύτητες V, W στη κάθετη στα τοιχώματα και στη κατά πλάτος διεύθυνση του αγωγού αντίστοιχα) από τις ροπές που προκαλούνται από την απόκλιση των τάσεων Reynolds των διαταραχών. Η ανάπτυξη των δισδιάστατων στροβίλων αποτυπώνεται στην ενέργεια τους $E_{roll} = \int dy \int dz (V^2 + W^2)/2$. Ας σημειωθεί ότι η ενέργεια των δισδιάστατων στροβίλων αυξάνεται μόνο λόγω των μη γραμμικών διαδικασιών (στην γραμμική δυναμική η ενέργεια των στροβίλων φθίνει εκθετικά με χαρακτηριστικό χρόνο ανάλογο του αριθμού Reynolds). Οι στρόβιλοι μεταφέρουν την μέση ορμή και προκαλούν αργές και γρήγορες προσαυξήσεις του μέσου πεδίου ταχυτήτων, $U_{streak} = U(y, z, t) - [U(y, z, t)]_z$, όπου $U(y, z, t)$ η μέση ροή στη διεύθυνση x και $[\cdot]_z$ συμβολίζει τη μέση τιμή στη διεύθυνση, z . Από τις εικόνες του πεδίου ροής στο Σχ. 2 βλέπουμε ότι οι αργές προσαυξήσεις συμπίπτουν με τις περιοχές όπου η V ταχύτητα είναι θετική όποτε έχουμε μεταφορά από το τοίχωμα που κινείται με αρνητική ταχύτητα, ενώ όταν η V είναι αρνητική έχουμε μεταφορά από το γρήγορα κινούμενο τοίχωμα. Κατά την διάρκεια αυτής της διαδικασίας βλέπουμε σημαντική αύξηση στην ενέργεια των προσαυξήσεων, $E_{streak} = \int dy \int dz U_{streak}^2/2$. Στη ροή οι προσαυξήσεις, U_{streak} , αναγνωρίζονται ως εντοπισμένες περιοχές που κινούνται σε ευθείες γραμμές. Διακρίνουμε 4 περιοχές αργών και 4 περιοχές γρήγορων προσαυξήσεων (Σχ. 2 (b),(c)). Η αστάθεια των προσαυξήσεων εμφανίζεται στο πεδίο ροής ως μια ημιτονοειδής παραμόρφωσή περί το χρόνο $t = 20$. Αυτή η αστάθεια οδηγεί σε απότομη αύξηση της ενέργειας των διαταραχών ($20 < t < 50$), ενώ οι τάσεις Reynolds των διατα-



Σχήμα 2: Στιγμιότυπα της μέσης ροής από προσομοίωση της εξέλιξης της ΜΓΒΔ χρόνου $T = 50$ σε αρχική ενέργεια $E_0 = 5 \times 10^{-4} E_c$. Οι προσαυξήσεις που εμφανίζονται σε κάθε τοίχωμα δεν ισαπέχουν. Καθώς εξελίσσεται η διαταραχή οι προσαυξήσεις και στα 2 τοιχώματα συγκλίνουν και τελικά συγχωνεύονται.

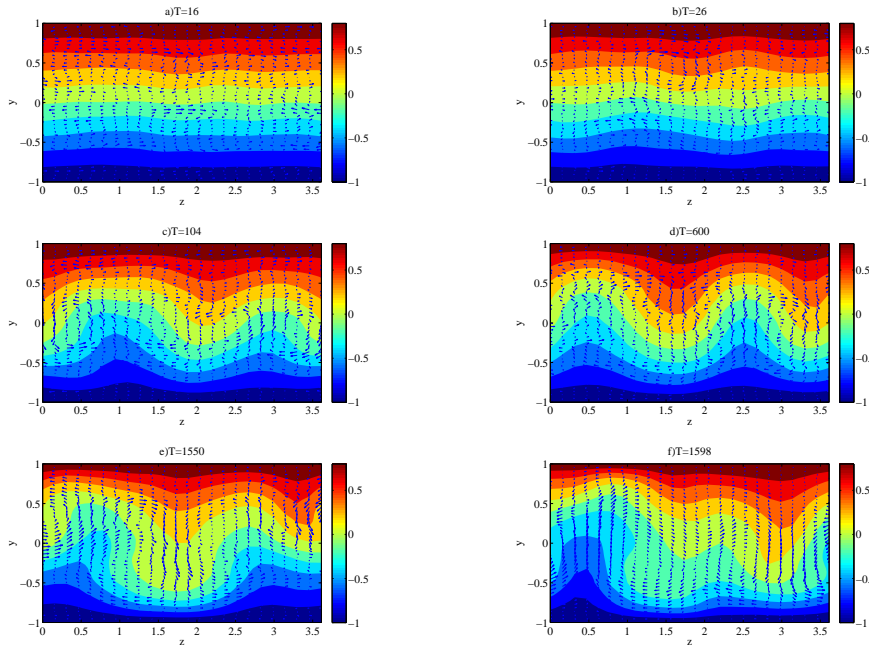
ραχών επιταχύνουν εκ νέου τους δισδιάστατους στροβίλους, οι οποίοι ενισχύουν περαιτέρω το U_{streak} , το οποίο αλλάζει δομή, με τις προσαυξήσεις να γίνονται ένα ζευγάρι ($t = 50$). Στο σημείο αυτό η νέα διάταξη των προσαυξήσεων δεν τροφοδοτεί τις διαταραχές οι οποίες μειώνονται λόγω αυξημένης ανάλωσης, ενώ οι διαταραχές συνεχίζουν να συντηρούν τους στροβίλους οι οποίοι ενισχύουν περαιτέρω τις προσαυξήσεις. Μετά την αλληλουχία αυτών των μηχανισμών ενεργοποιείται ο αναγεννητικός κύκλος, ο οποίος συντηρεί την ροή σε τυρβώδη κατάσταση (Hamilton et al. 1995, Jiménez and Moin 1991).

Οι μηχανισμοί που οδήγησαν σε μετάβαση την ΜΓΒΔ δεν διαφέρουν σημαντικά από αυτούς που ακολουθούνται όταν οι αρχικές συνθήκες είναι απλώς ένα ζεύγος μονοχρωματικών λοξών κυμάτων, πέραν της καλύτερης απόδοσης που παρατηρούμε στην ΜΓΒΔ και την προσπάθεια της ΜΓΒΔ να συγκεντρωθεί στο μισό πλάτος του χωρίου. Η αλληλουχία των μηχανισμών που συναντάμε στην εξέλιξη της ΜΓΒΔ παραπέμπει στον αναγεννητικό κύκλο της τύρβης.

4. ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΜΕΤΑΒΑΣΗ

Μια διαφορετική διαδικασία συναντάται όταν εφαρμόσουμε στοχαστική διέγερση στην ροή για να περιγράψουμε την επίδραση θορύβου και τις ατέλειες της διάταξης στη δυναμική. Θεωρητική μελέτη της στατιστικής δυναμικής των NS προβλέπει τον σχηματισμό στροβίλων και προσαυξήσεων μέσω μιας εκθετικής αστάθειας η οποία εμφανίζεται όταν ο θόρυβος έχει επαρκή ένταση.

Για να μελετήσουμε την μετάβαση σε αυτή την περίπτωση εφαρμόζουμε τον στοχαστικό θόρυβο στην αδιατάρακτη ροή Couette. Αρχικά εξελίσσεται το πεδίο των διαταραχών και συγκεκριμένα οι αρμονικές που διεγείρονται άμεσα από τον στοχαστικό θόρυβο. Όταν το πλάτος της εξωτερικής διέγερσης είναι χαμηλό, το σύστημα μεταβαίνει σε μια στατιστική ισορροπία συμβατή με την γραμμική απόκριση της ροής Couette σε στοχαστικό θόρυβο. Καθώς αυξάνεται το πλάτος του θορύβου, αντίστοιχη αύξηση παρατηρείται και στην ένταση του πεδίου διαταραχών. Η αυξημένη ένταση του πεδίου διαταραχών ενεργοποιεί την



Σχήμα 3: Στιγμιότυπα της μέσης ροής από προσομοίωση με παρουσία TEP. Η ροή οργανώνεται σε τέσσερις εναλλασόμενες προσανυξήσεις και παραμένει σε αυτή την κατάσταση για μεγάλο χρονικό διάστημα μέχρι την συγχώνευση τους.

στοχαστική αστάθεια των στροβίλων και προσανυξήσεων σύμφωνα με τις θεωρητικές προβλέψεις. Αυτό φαίνεται από τον χαρακτηριστικό σχηματισμό διπλού ζεύγους στροβίλων που εκτείνονται σε όλο το ύψος του καναλιού (βλ. Σχ. 3 c,d και έχουν την δομή της πλέον ασταθούς ιδιοκατάστασης της στατιστικής αστάθειας η οποία φαίνεται καθαρά στο Σχ. 3 d (Farrell et al. 2016). Η δομή αυτή είναι διαφορετική από το γραμμικό βέλτιστο και οφείλεται στην συνεχή ενίσχυσή της από το πεδίο διαταραχών, στο οποίο περιμένουμε να αποκατασταθεί μια ισορροπία με βάση τον ρυθμό απωλειών της κάθε δομής. Στις προσανυξήσεις που δημιουργούνται από την διπλή δομή των στροβίλων, η μετάβαση λειτουργεί και πάλι με την μορφή της ημιτονοειδούς αστάθειας της U_{streak} . Αυτή η στοχαστική μετάβαση χαρακτηρίζεται από την ταυτόχρονη αύξηση της ενέργειας των διαταραχών, των στροβίλων και των προσανυξήσεων σε αντίθεση με τη διαδοχική αλληλουχία αυξήσεων ενέργειας των τριών αυτών δυναμικών στοιχείων κατά τη μετάβαση της ΜΓΒΔ. Η περίπτωση που παρουσιάζουμε στο δεξί πάνελ του Σχ. 1 αντιστοιχεί σε θόρυβο έντασης 0.22ϵ ($\epsilon = \langle E_p \rangle_{turb} / E_c = 0.023$ είναι η τιμή που σταθεροποιείται ο λόγος της μέσης τιμής της ενέργειας του πεδίου διαταραχών στην τυρβώδη κατάσταση, $\langle E_p \rangle_{turb}$, ως προς την ενέργεια της στρωτής ροής E_c). Η τιμή αυτή του θορύβου αντιστοιχεί στη κρίσιμη τιμή ενέργειας η οποία οδηγεί στη μετάβαση. Για αυτό το λόγο η μετάβαση αργεί. Για επίπεδο θορύβου 0.57ϵ η μετάβαση επιτυγχάνεται στους χρόνους 60 – 100.

Θελούμε να εξακριβώσουμε κατά πόσο η αλληλουχία των μηχανισμών της ΜΓΒΔ παραμένει ανεπηρέαστη από την προσθήκη της στοχαστικής διέγερσης στη δυναμική. Κατασκευάζουμε ένα στιγμιότυπο θορύβου, στο οποίο προσθέτουμε την ΜΓΒΔ και συγκρίνουμε την εξέλιξή της με την ιδανική περίπτωση. Στο Σχ. 4 (αριστερά) αντιπαραβάλλουμε την εξέλιξη της ΜΓΒΔ σε περιβάλλον θορύβου έντασης 0.57ϵ με την εξέλιξη της ΜΓΒΔ άνευ θορύβου. Ο μηχανισμός Orr ο οποίος οδηγεί στην πρώτη αύξηση των διαταραχών (περί το $t = 11$) παρουσιάζεται και στις δύο περιπτώσεις και δεν επηρεάζεται από αυτό το επίπεδο θορύβου, καθώς επίσης και η αρχική ενίσχυση των στροβίλων από τις ροπές που προκαλούνται από τις τάσεις Reynolds των διαταραχών. Όμως η ύπαρξη του θορύβου απόσυγχρονίζει το πεδίο διαταραχών από τις προσανυξήσεις, και η δεύτερη κορυφή της ενέργειάς τους που εντοπίζεται στην εξέλιξη

της ΜΓΒΔ δεν παρατηρείται. Το μειωμένο πλάτος του πεδίου διαταραχών δεν μπορεί να δημιουργήσει επιπλέον επιτάχυνση των στροβίλων, με συνέπεια να μεταφέρεται σημαντικά χαμηλότερη ενέργεια στις προσαυξήσεις. Η μετάβαση επιτυγχάνεται τελικά σε χρόνο $t = 80$ αφού προηγουμένως έχει εμφανισθεί η χαρακτηριστικής ιδιοκατάσταση της στατιστικής αστάθειας. Μετάβαση σε παρόμοια χρονική στιγμή συμβαίνει όταν δεν εισάγεται αρχικά στην ροή το ΜΓΒΔ και η μετάβαση διενεργείται με την εμφάνιση της στατιστικά ασταθούς ιδιοκατάστασης. Στην περίπτωση που παρουσιάζουμε στο Σχ. 4 (δεξιά) έχει επιλεγεί ο θόρυβος να είναι ακριβώς ο ίδιος με αυτόν που οδήγησε σε μετάβαση με αρχική συνθήκη το ΜΓΒΔ. Παρατηρήστε στο Σχ. 4 (δεξιά) ότι απουσιάζει η αρχική μεταβατική αύξηση Opp . Από την μορφολογία της μετάβασης είναι σαφές ότι αυτή οφείλεται στη στοχαστική αστάθεια και ότι δεν οφείλεται στην παρουσία του ΜΓΒΔ στο πεδίο του θορύβου με ικανή ενέργεια ώστε να οδηγήσει σε μετάβαση. Υπολογίζουμε ότι η πιθανότητα εμφάνισης ΜΓΒΔ σε θόρυβο έντασης $0.57\epsilon = 0.014E_c$ με ενέργεια μεγαλύτερη από αυτή που μπορεί να οδηγήσει το ΜΓΒΔ σε μετάβαση είναι μικρότερη του $1/1000$ (βλ. Σχ. 5), που σημαίνει ότι είναι απίθανο να έχει υπάρξει ΜΓΒΔ με ικανή ενέργεια για να οδηγήσει στη μετάβαση. Επίσης έχουμε δείξει κατευθείαν ότι για αυτά τα επίπεδα ενέργειας θορύβου η δυναμική του ΜΓΒΔ αποσυντονίζεται από τον θόρυβο.

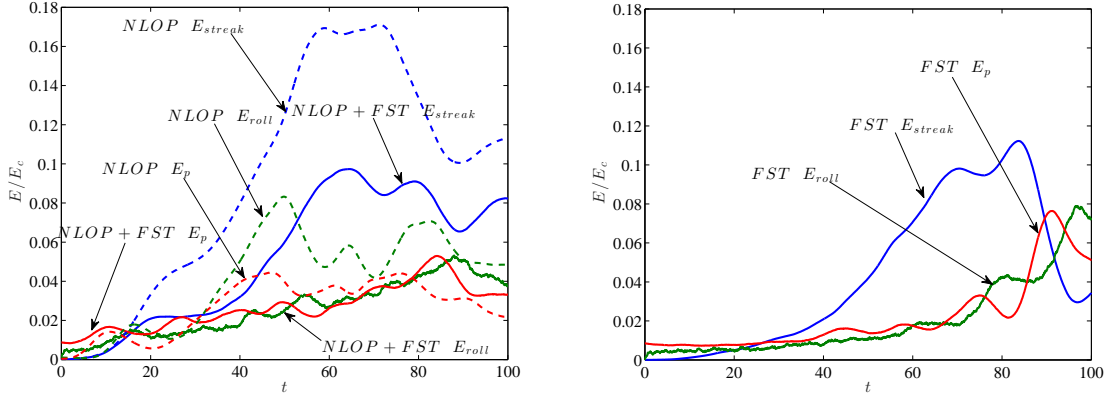
Για να ποσοτικοποιήσουμε την συνεισφορά της ΜΓΒΔ θα υπολογίσουμε την μέγιστη προβολή της για κάθε χρονική στιγμή σε μια ροή Couette με θόρυβο έντασης ($0.55\epsilon - 0.9\epsilon$) και στη συνέχεια θα προσδιορίσουμε την αθροιστική πιθανότητα εμφάνισης βέλτιστων διαταραχών με ενέργειες μεταξύ ($10^{-4}E_c - 5 \times 10^{-4}E_c$). Η ελάχιστη ενέργεια που απαιτείται για την μετάβαση της $T = 50$ ΜΓΒΔ είναι $E_{trans} = 3.5 \times 10^{-4}E_c$. Η αθροιστική πιθανότητα σχεδιάζεται στο Σχ. 5, με τις οριζόντιες γραμμές να δείχνουν την ελάχιστη τιμή 0.22ϵ της έντασης θορύβου που απαιτείται για την στοχαστική μετάβαση (κόκκινη διακεκομμένη) και την τιμή ϵ της τυρβώδους κατάστασης (μαύρη διακεκομμένη). Η παρουσία της ΜΓΒΔ στα παραγόμενα πεδία διαταραχών είναι μηδενική για την ενέργεια που παρουσιάσαμε ($5 \times 10^{-4}E_c$). Η πιθανότητα εμφάνισης ΜΓΒΔ για τον θόρυβο 0.57ϵ του παραδείγματος στο Σχ. 4 παραπάνω είναι αμελητέα ακόμα και για τιμές χαμηλότερες από την E_{trans} , $P(NLOP > 0.6E_{trans}) = 0.5 \times 10^{-3}$. Γενικότερα, δεν παρατηρούμε σημαντικά μεγάλη πιθανότητα εμφάνισης ΜΓΒΔ ακόμα και όταν η ένταση του θορύβου είναι κοντά στην ϵ . Δεδομένης της μικρής προβολής της ΜΓΒΔ που εντοπίζουμε καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η στοχαστική μετάβαση δεν συνδέεται με την εμφάνιση ΜΓΒΔ στο πεδίο ροής.

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

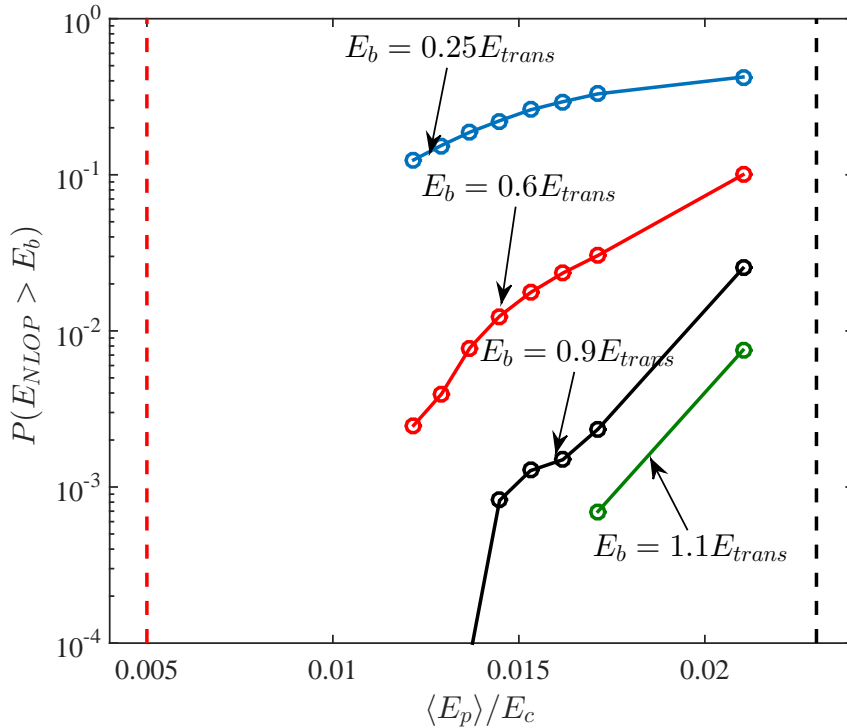
Αν και η ΜΓΒΔ προσφέρει μια άρτια οργανωμένη διαδικασία μετάβασης, η πιθανότητα εμφάνισης της σε μια στοχαστική μετάβαση αποδεικνύεται ότι είναι περιορισμένη. Επιπλέον, η ύπαρξη του θορύβου αποδεικνύεται επιβλαβής για την ΜΓΒΔ καθώς μπορεί να αποδιοργανώσει την αλληλουχία των μηχανισμών της. Όπως βλέπουμε και στο παράδειγμα του Σχ. 1 μετάβαση επιτυγχάνεται ακόμα και όταν η ένταση του θορύβου αντιστοιχεί σε μηδενική πιθανότητα εμφάνισης ΜΓΒΔ. Το συμπέρασμα που εξάγεται είναι ότι σε περιβάλλον ελεύθερης τύρβης η μετάβαση σε τυρβώδη κατάσταση πραγματοποιείται μέσω της νέας στατιστικής αστάθειας η οποία πρόσφατα εντοπίστηκε από ανάλυση της στατιστικής δυναμικής των εξισώσεων Navier-Stokes για ροές πλησίον τοιχωμάτων.

Αναφορές

- Andersson, P., M. Berggren, and D. S. Henningson (1999) Optimal disturbances and bypass transition in boundary layers. *Phys. Fluids*, **11**, 134–150.
- Bayly, B., S. Orszag, and T. Herbert (1988) Instability mechanisms in shear-flow transition. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **20**, 359–391.
- Benney, D. J. (1960) A non-linear theory for oscillations in a parallel flow. *J. Fluid Mech.*, **10** (02), 209–236.
- Brandt, L., P. Schlatter, and D. S. Henningson (2004) Transition in boundary layers subject to free-stream turbulence. *J. Fluid Mech.*, **517**, 167–198.



Σχήμα 4: Αριστερά: Εξέλιξη της ενέργειας των επιμέρους πεδίων ταχυτήτων (όπως στο Σχ.1) για την ΜΓΒΔ+ΤΕΡ(συνεχείς γραμμές) και αντιπαραβολή με την εξέλιξη της ΜΓΒΔ (διακεκομμένη γραμμή). Δεξιά: Αντίστοιχη εξέλιξη της ενέργειας των πεδίων ταχυτήτων για την ΤΕΡ. Και στις 2 περιπτώσεις εφαρμόζουμε τον ίδιο θόρυβο έντασης 0.57ϵ .



Σχήμα 5: Πιθανότητα εντοπισμού στις διαταραχές της ελεύθερης τύρβης της $T = 50$ ΜΓΒΔ με ενέργεια $E_{NLOP} > E_b$ συναρτήσει της μέσης ενέργειας της ελεύθερης τύρβης $\langle E_p \rangle / E_c$, όπου E_c η ενέργεια της ροής Couette, για τις περιπτώσεις $E_b = 0.25 E_{trans}$ (μπλε γραμμή), $E_b = 0.6 E_{trans}$ (κόκκινη γραμμή), $E_b = 0.9 E_{trans}$ (μαύρη γραμμή) και $E_b = 1.1 E_{trans}$ (πράσινη γραμμή), όπου E_{trans} η ελάχιστη ενέργεια του $T = 50$ ΜΓΒΔ που οδηγεί σε μετάβαση στη τυρβώδη κατάσταση. Το διάγραμμα αυτό δείχνει ότι όταν η ελεύθερη τύρβη έχει μέση ενέργεια μικρότερη από $0.014 E_c$ η πιθανότητα να υπάρχει στη τύρβη ΜΓΒΔ διαταραχή με ενέργεια ικανή για να οδηγήσει τη ροή στη τυρβώδη κατάσταση, αν απουσιάζει ο θόρυβος, είναι αμελητέα. Η διακεκομμένη μαύρη γραμμή σημειώνει τη μέση ενέργεια των διαταραχών, που υπολογίζεται σε $0.023 E_c$, όταν η ροή έχει μεταβεί στη τυρβώδη κατάσταση. Η διακεκομμένη κόκκινη γραμμή σημειώνει τη μέση ενέργεια της ελεύθερης τύρβης, που εκτιμάται σε $0.005 E_c$, που οδηγεί την ροή Couette σε μετάβαση στην τυρβώδη κατάσταση μέσω της στατιστικής αστάθειας. Για την περίπτωση ροής Couette σε κανάλι ελάχιστης γεωμετρίας με $Re = 400$.

- Butler, K. M. and B. F. Farrell (1992) Three-dimensional optimal perturbations in viscous shear flows. *Phys. Fluids*, **4**, 1637–1650.
- Farrell, B. F. (1988) Optimal excitation of perturbations in viscous shear flow. *Phys. Fluids*, **31**, 2093–2102.
- Farrell, B. F. and P. J. Ioannou (1993) Optimal excitation of three-dimensional perturbations in viscous constant shear flow. *Phys. Fluids A*, **5**, 1390–1400.
- Farrell, B. F. and P. J. Ioannou (2012) Dynamics of streamwise rolls and streaks in turbulent wall-bounded shear flow. *J. Fluid Mech.*, **708**, 149–196.
- Farrell, B. F., P. J. Ioannou, and M.-A. Nikolaidis (2016) Instability of the roll/streak structure induced by free-stream turbulence in pre-transitional Couette flow. *Phys. Rev. Fluids*, (submitted, arXiv:1607.05018).
- Hamilton, K., J. Kim, and F. Waleffe (1995) Regeneration mechanisms of near-wall turbulence structures. *J. Fluid Mech.*, **287**, 317–348.
- Jiménez, J. and P. Moin (1991) The minimal flow unit in near-wall turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, **225**, 213–240.
- Kim, J., P. Moin, and R. Moser (1987) Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, **177**, 133–166.
- Lundbladh, A., D. S. Henningson, and S. C. Reddy (1994) *Threshold Amplitudes for Transition in Channel Flows*, 309–318. Springer Netherlands.
- Monokrousos, A., A. Bottaro, L. Brandt, A. Di Vita, and D. S. Henningson (2011) Non-equilibrium thermodynamics and the optimal path to turbulence in shear flows. *Phys. Rev. Lett.*, **106**, 134 502.
- Orszag, S. A. and A. T. Patera (1980) Subcritical transition to turbulence in plane channel flows. *Phys. Rev. Lett.*, **45**, 989–993.
- Pringle, C. C. T., A. P. Willis, and R. R. Kerswell (2012) Minimal seeds for shear flow turbulence: using nonlinear transient growth to touch the edge of chaos. *J. Fluid Mech.*, doi:10.1017/jfm.2012.192.
- Pringle, C. C. T., A. P. Willis, and R. R. Kerswell (2015) Fully localised nonlinear energy growth optimals in pipe flow. *Phys. Fluids*, doi:10.1063/1.4922183.
- Reddy, S. C. and D. S. Henningson (1993) Energy growth in viscous channel flows. *J. Fluid Mech.*, **252**, 209–238.
- Trefethen, L. N., A. E. Trefethen, S. C. Reddy, and T. A. Driscoll (1993) Hydrodynamic stability without eigenvalues. *Science*, **261**, 578–584.
- Westin, K. J. A., A. V. Boiko, B. G. B. Klingmann, V. V. Kozlov, and P. H. Alfredsson (1994) Experiments in a boundary layer subjected to free stream turbulence. Part 1. Boundary layer structure and receptivity. *J. Fluid Mech.*, **281**, 193–218.

Study of transition to turbulence in Couette flow with nonlinear optimal initial conditions and under the influence of free-stream turbulence

Marios-Andreas Nikolaidis* και Petros J. Ioannou

Physics Department, National & Kapodistrian University of Athens, Athens

* e-mail: mnikolaidis@phys.uoa.gr

Abstract

The study of the evolution of the nonlinear optimal perturbations (NLOP) of wall-bounded flows unveil the mechanisms that lead to transition to turbulence under ideal conditions and the absence of free-stream turbulence. However, free-stream turbulence may play an important role in the transition process. In this work we determine the NLOP in a minimal channel in a Couette flow and investigate the contribution of the NLOPs in the transition process in the presence of free-stream turbulence.

Keywords: turbulent flow, transition, nonlinear optimization, stochastic forcing