ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Εαρινό εξάμηνο 2012-2013

Θέμα 1: Πλήρως εξελιγμένο χάος

Βρίσκοντας ασταθή σταθερά σημεία μιάς απεικόνισης από την κατανομή των σημείων επαναφοράς μίας τροχιάς

Θεωρείστε ένα δυναμικό σύστημα που περιγράφεται από μία μονοδιάστατη απεικόνιση $f_r(x)$ που περιέχει μία παράμετρο ελέγχου r. Για κάποια τιμή της παραμέτρου $r = r_h$ το σύστημα παρουσιάζει εργοδική συμπεριφορά (δηλ. μία τροχιά του συστήματος καλύπτει όλο τον διαθέσιμο φασικό χώρο) ενώ ταυτόχρονα είναι και υπερβολικό (δηλ. όλες οι υπάρχουσες περιοδικές τροχιές είναι ασταθείς). Σε αυτή την περίπτωση η εύρεση των περιοδικών τροχιών του συστήματος είναι δύσκολη (γιατί;). Στην εργασία που παρατίθεται ως βιβλιογραφία δείχνεται ότι είναι δυνατή η εύρεση των σταθερών σημείων της απεικόνισης (όταν η αντίστοιχη δυναμική είναι εργοδική και υπερβολική) χρησιμοποιώντας μία και μόνο τροχιά του συστήματος και προσδιορίζοντας τις ασυνέχειες της πυκνότητας των αντίστοιχων σημείων επαναφοράς (turning points). Προτείνεται η μελέτη της παρατιθέμενης εργασίας και η εφαρμογή της μεθόδου των σημείων επαναφοράς σε διάφορες $1-D$ απεικονίσεις. Μπορεί η μέθοδος να οδηγήσει και στον προσδιορισμό ασταθών περιοδικών τροχιών περιόδου p με $p > 1$;

Βιβλιογραφία: Turning point properties as a method for the characterization of the ergodic dynamics of one-dimensional iterative maps, F. K. Diakonos and P. Schmelcher, Chaos 7, 239 (1997).

Θέμα 2: Το αντίστροφο πρόβλημα Frobenius-Perron

Κατασκευάζοντας δυναμικά συστήματα με επιθυμητές στατιστικές ιδιότητες

Φανταστείτε ότι έχετε παρατηρήσει μία χρονοσειρά τιμών του μεγέθους A που χαρακτηρίζει την χρονική εξέλιξη ενός πολύπλοκου δυναμικού συστήματος. Στην εργασία που παρατίθεται ως βιβλιογραφία δείχνεται ότι από την πυκνότητα $\rho(A)$ των τιμών του A και θεωρώντας ότι το υπό μελέτη δυναμικό σύστημα είναι εργοδικό μπορεί να κατασκευαστεί $1 - D$ απεικόνιση $A_{n+1} = f(A_n)$ που προσομοιώνει τις στατιστικές ιδιότητες του συστήματος επιλύοντας το λεγόμενο αντίστροφο πρόβλημα Frobenius-Perron. Προτείνεται η μελέτη της παρατιθέμενης εργασίας και η εφαρμογή της για την κατασκευή απεικόνισης που έχει σαν αναλοίωτη πυκνότητα την κατανομή Gauss.

Βιβλιογραφία: Theory and examples of the inverse Frobenius-Perron problem for complete chaotic maps, D. Pingel, P. Schmelcher and F. K. Diakonos, Chaos 9, 357 (1999).

Θέμα 3: Ανακατασκευή του φασικού χώρου

Βρίσκοντας ελκυστές σε πειραματικά δεδομένα

Σε πολλές περιπτώσεις οι μετρήσεις σε ένα πολύπλοκο σύστημα αφορούν την χρονική εξέλιξη ενός μέγεθους A που αποτελεί μία μονοδιάστατη προβολή του φασικού χώρου του συστήματος. Είναι δυνατόν από μία τέτοια μέτρηση να βρει κανείς πληροφορίες για τη συνολική δυναμική του συστήματος όπως π.χ. τη διάσταση του αντίστοιχου φασικού χώρου; Η απάντηση έχει δοθεί από τους N. Packard, J. Crutchfield, J. D. Farmer και R. Shaw στο άρθρο: Exploiting chaos to predict the future and reduce noise, Physical Review Letters 45, 712 (1980) καθώς και τον F. Takens στο άρθρο: Detecting strange attractors in turbulence, Lecture Notes in Mathematics 898, Berlin:Springer-Verlag (1981). Προτείνεται η μελέτη της ανασκόπησης J.-P. Eckmann, D. Ruelle, "Ergodic theory of chaos and strange attractors", Reviews of Modern Physics 57, 617 (1985) και η παρουσίαση της μεθόδου ανακατασκευής του χώρου φάσεων.

Θέμα 4: Χαμιλτονιανό χάος με απεικονίσεις

Το θεώρημα KAM

Προτείνεται η μελέτη του $2-D$ φασικού χώρου της καθιερωμένης απεικόνισης (standard map) για διάφορες τιμές της παραμέτρου ελέγχου K. Να διατυπωθεί χρησιμοποιώντας σαν παράδειγμα την απεικόνιση αυτή το θεώρημα KAM και να εξηγηθούν οι έννοιες των ευσταθών και ασταθών πολλαπλοτήτων καθώς και των ομοκλινικών και ετεροκλινικών τροχιών.

Βιβλιογραφία: A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman: "Regular and Chaotic Dynamics". Springer, Berlin (1992).

Θέμα 5: Σωματιδιακές ιδιότητες των σολιτονίων της NLS

Αδιαβατική προσέγγιση στη θεωρία διαταραχών για σολιτόνια

Θεωρείστε την εξίσωση NLS που περιλαμβάνει ένα εξωτερικό δυναμικό $V(x)$:

$$i\psi_t + \frac{1}{2}\psi_{xx} + |\psi|^2\psi = U(x)\psi, \quad U(x) = \varepsilon V(x), \tag{1}$$

όπου $0 < \varepsilon \ll 1$. Η Εξ. (1) έχει πολλές εφαρμογές, με το εξωτερικό δυναμικό να περιγράφει ατέλειες σε κρυστάλλους στη φυσική στερεάς κατάστασης, δυναμικά παγίδευσης σε πλάσμα ή σε ατομικά συμπυκνώματα Bose-Einstein, μεταβαλλόμενο δείκτη διάθλασης στη μη γραμμική οπτική, κλπ.

Αν $\varepsilon = 0$, είναι γνωστό ότι η NLS επιδέχεται λύσεις 'φωτεινών' σολιτονίων. Στην περίπτωση που $\varepsilon \neq 0$, και αν το εξωτερικό δυναμικό μεταβάλεται αργά στην κλίμακα του σολιτονίου (δηλ. η χωρική κλίμακα l του $U(x)$ είναι $l \gg \eta^{-1}$), μπορεί κανείς να εφαρμόσει την αδιαβατική προσέγγιση στη θεωρία διαταραχών για σολιτόνια. Σύμφωνα με αυτήν, το σολιτόνιο θα εξελίσσεται στο πλαίσιο της (1) έτσι ώστε να μην αλλάζει σχήμα, αλλά με τα χαρακτηριστικά του να γίνονται χρονικά μεταβαλλόμενες συναρτήσεις λόγω της διαταραχής $\varepsilon V(x)$.

Χρησιμοποιώντας τα ολοκληρώματα κίνησης της NLS, να δείξετε ότι το κέντρο $x_0(t)$ του σολιτονίου εξελίσσεται σύμφωνα με την εξίσωση

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x_0}, \tag{2}$$

δηλ. ότι το σολιτόνιο συμπεριφέρεται ως κλασσικό Νευτώνιο σωματίδιο παρουσία του εξωτερικού δυναμικού. Το αποτέλεσμα να επαληθευθεί και αριθμητικά, για την περίπτωση του παραβολικού δυναμικού $U(x) = (1/2)\Omega^2x^2$ (με αρκούντως μικρή συχνότητα Ω).

Αναφορές: A. M. Kosevich, Physica D **41**, 253 (1990). Δ. Ι. Φραντζεσκάκης, 'Τάξη και Χάος στα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα', σελ. 163-184, Τόμος 6 (Εκδ. Τ. Μπούντης και Σπ. Πνευματικός), Εκδόσεις Γ. Α. Πνευματικός, 2000.

Θέμα 6: Τα μοντέλα ϕ^4 και sine-Gordon (sG)

Τοπολογικά και μη τοπολογικά σολιτόνια

Θεωρείστε μια αλυσίδα από συζευγμένα στροφικά εκκρεμή (που στρέφονται γύρω από ένα κοινό άξονα περιστροφής). Το σύστημα αυτό, περιγράφεται από τη Χαμιλτονιανή:

$$H = \sum_n \frac{I}{2}\dot{\phi}_n^2 + \frac{C}{2}(\phi_n - \phi_{n-1})^2 + mg\ell(1 - cos\phi_n), \tag{3}$$

όπου ϕ_n είναι η γωνία περιστροφής του n-οστού εκκρεμούς, I η ροπή αδρανείας, C η σταθερά των ελατηρίων και ℓ το μήκος των εκκρεμών.

Από τις εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν σε αυτό το διακριτό πλέγμα, να εξάγετε – στο συνεχές όριο – τα λεγόμενα μοντέλα ϕ^4 (στο όριο μικρών γωνιών περιστροφής) και sine-Gordon (sG) (για αυθαίρετες γωνίες περιστροφής).

Να βρείτε στατικές λύσεις σολιτονίων στα μοντέλα αυτά, χρησιμοποιώντας την τεχνική του φασικού χώρου. Από τις στατικές αυτές λύσεις να κατασκευάσετε οδεύοντες λύσεις σολιτονίων, χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Lorentz (και τα δύο μοντέλα είναι αναλλοίωτα στο μετασχηματισμό αυτό).

Να βρείτε και να συζητήσετε συνοπτικά διάφορες εφαρμογές των μοντέλων αυτών και των τοπολογικών (ή μη) σολιτονίων που υποστηρίζουν.

Αναφορές: R. K. Dodd, J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, and H. C. Morris, "Solitons and Nonlinear Wave Equations", Academic Press, 1982. M. Remoissenet, "Waves called Solitons", Springer, 1999. T. Dauxois and M. Peyrard, "Physics of Solitons", Cambridge University Press, 2006.

Θέμα 7: Κύματα Langmuir σε πλάσμα

Η εξίσωση NLS ως μοντέλο για τις ταλαντώσεις ηλεκτρονίων

Σε αντίθεση με την περίπτωση που συζητήθηκε στο μάθημα (όπου θεωρήθηκαν 'μακρά' κύματα στην πυκνότητα ιόντων), μπορεί κανείς να θεωρήσει τα ιόντα ως 'παγωμένα' και να μελετήσει τη δυναμική των ηλεκτρονίων. Τότε, είναι δυνατόν να καταστρώσει κανείς ένα σύστημα τριών μη γραμμικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους για την πυκνότητα των ηλεκτρονίων, την ταχύτητά τους, και το ηλεκτροστατικό δυναμικό. Το σύστημα αυτό, να επιλυθεί προσεγγιστικά με μια θεωρία διαταραχών πολλαπλών κλιμάκων (ανάλογη με αυτή που χρησιμοποιείται σε μη γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις). Εφαρμογή αυτής της θεωρίας διαταραχών οδηγεί σε μια εξίσωση NLS, που μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μοντέλο για τις ταλαντώσεις της πυκνότητας ηλεκτρονίων στο πλάσμα (γνωστές ως ταλαντώσεις Langmuir). Έτσι, μπορεί να προβλέψει κανείς και την ύπαρξη 'σολιτονίων Langmuir' στο πλάσμα. Να βρεθούν τα σολιτόνια αυτά και να συζητηθεί το κατά πόσον υπάρχει κάποια πειραματική επιβεβαίωση.

Αναφορές: R. K. Dodd, J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, and H. C. Morris, "Solitons and Nonlinear Wave Equations", Academic Press, 1982.

Θέμα 8: Κύματα πίεσης στο αίμα

Διάδοση σολιτονίων της KdV σε αρτηρίες

Μια περίπτωση που η εξίσωση KdV βρίσκει εφαρμογές στη βιοφυσική, είναι η εξής. Χρησιμοποιώντας ένα σχετικά απλό μοντέλο για τις αρτηρίες, είναι δυνατόν –σε μια απλή, πρώτη προσέγγιση– να καταστρώσει κανείς ένα σύστημα τριών μη γραμμικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους για τη διατομή της αρτηρίας (που μεταβάλλεται λόγω της ροής του αίματος), την ταχύτητα του αίματος, και την πίεση. Από αυτές τις εξισώσεις, εφαρμόζοντας μια θεωρία διαταραχών, να εξάγετε μια εξίσωση KdV για την πίεση στο αίμα. Είναι δυνατόν η λύση σολιτονίου της KdV να χρησιμοποιηθεί για να απαντήσει κανείς μια απλή ερώτηση: πως είναι δυνατόν να γίνεται αντιληπτή η πίεση του αίματος στον καρπό του χεριού?

Αναφορές: J.-F. Paquerot and M. Remoissenet, Phys. Lett. A **194**, 77 (1994). T. Dauxois and M. Peyrard, “Physics of Solitons”, Cambridge University Press, 2006.