2η Σειρά Ασκήσεων
26 Μαρτίου 2013

1. Προσδιορίστε πως πρέπει να διαταράξτε το ταλαντωτή

$$\ddot{x} + x = \epsilon \dot{x} \phi(x)$$

έτσι ώστε να έχει τρείς οριακούς κύκλους που είνα κατα βούληση ευσταθείς ή ασταθείς. Π.χ. όταν επιλέξαμε $\phi(x) = 1 - x^2$ είχαμε ένα μόνο ευσταθή οριακό κύκλο για $\epsilon > 0$ ο οποίος καθίστατο ασταθής αν $\epsilon < 0$.

2. Η κατάσταση ενός φυσικού συστήματος εξελίσσεται σύμφωνα με τη δυναμική:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 100 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x$$

Η ενέργεια της κατάστασης δίνεται απο το τετράγωνο του ευκλειδίου μέτρου: $E(t) = ||x||^2 = x^\dagger x$. Σχεδιάστε την εξέλιξη της ενέργειας αν αρχικά το σύστημα βρισκόταν στην ιδιοκατάσταση:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Προσδιορίστε τώρα την αρχική κατάσταση μοναδιαίας ενέργειας που διεγείρει μέγιστα την ιδιοκατάσταση που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή -1, και σχεδιάστε στο ίδιο γράφημα την εξέλιξη της ενέργειας αν αρχικά το σύστημα βρισκόταν σε αυτή την αρχική κατάσταση.

3. Το πεδίο $\phi(x, y, t)$ εξελίσσεται με τη δυναμική:

$$\partial_t \phi = \mu \phi - (\nabla^2 + 1)^2 \phi - \phi^3$$

στον τετραγωνικό χώρο $0 \leq x < 2\pi$, $0 \leq y < 2\pi$ με περιοδικές συνοριακές συνθήκες $\phi(x + 2\pi, y, t) = \phi(x, y + 2\pi, t) = \phi(x, y, t)$. Δείξτε ότι όταν $\mu > 0$ η κατάσταση κενού $\phi = 0$ είναι ασταθής σε αρμονικές διαταραχές της μορφής $\phi_k(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$. Προσδιορίστε τα $\vec{k} = (k_x, k_y)$ που προκαλούν την μεγαλύτερη αστάθεια.

Αν ορίσουμε το δυναμικό:

$$V[\phi] = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} dx dy \left(-\frac{\mu}{2} \phi^2 + \frac{1}{4} \phi^4 + \frac{1}{2} \left[(\nabla^2 + 1) \phi \right]^2 \right) ,$$

δείξτε οτι η δυναμική εξέλιξης του πεδίου $\phi(x, y, t)$ ικανοποιεί την

$$\partial_t \phi = -\frac{\delta V}{\delta \phi}$$

όπου $\delta V / \delta \phi$ είναι η συναρτησειακή παράγωγος του δυναμικού, και αποτελεί γενίκευση της Νευτώνειας κίνησης σωματιδίου σε δυναμικό.

Δείξτε επίσης ότι όπως το ϕ εξελίσσεται με την παραπάνω δυναμική το δυναμικό μειούται μονότονα ικανοποιώντας την:

$$\frac{dV}{dt} = -\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} dxdy(\partial_t\phi)^2 \leq 0 \ .$$

Επειδή δε για κάθε ϕ:

$$V[\phi] \geq \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} dxdy\left(-\frac{\mu}{2}\phi^2 + \frac{1}{4}\phi^4\right) \geq -\pi\mu^2 \ ,$$

το σύστημα δεν μπορεί να μειώνει συνεχώς τη δυναμική του ενέργεια και καταλήγει στα στάσιμα σημεία του συναρτησοειδούς $V[\phi]$ (η τελευταία ανισότητα προκύπτει απο την ανισότητα $-\mu x + x^2/2 \geq -\mu^2/2$ που ισχύει για κάθε x) .