Ασκήσεις στη Μη Γραμμική Δυναμική - Σειρά Δ

Πρόβλημα Α. Θεωρήστε τον χρονοεξαρτώμενο περιοδικό πίνακα

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 + \epsilon \cos t & 0 \end{pmatrix} .$$

και το δυναμικό σύστημα

$$\dot{\xi} = \mathbf{A}(t)\xi .$$

1. Κατασκευάστε τον διαδότη μίας περιόδου όταν $\omega = 1$ και $\epsilon = 0.1$, δηλαδή τον γραμμικό μετασχηματισμό:
$$\Phi(2\pi) : \xi(0) \to \xi(2\pi) ,$$
διαιρώντας το χρονικό διάστημα σε 10, 20, 30, 40, κ.λ.π. ίσα διαστήματα. Πόσα σημεία πρέπει να λάβετε ούτως ώστε να πετύχετε ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων στον διαδότη;

2. Σχεδιάστε τον εκθέτη Lyapunov $\lambda(\omega, \epsilon)$ του συστήματος συναρτήσει του $0 \leq \omega \leq 2$ για $\epsilon = 0.1,\ 0.25,\ 0.50,\ 0.75$. Πόσες γλώσσες του Arnold μπορείτε να εντωπίσετε;

Πρόβλημα Β. Θεωρήστε τον σταθερό πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 100 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} ,$$

και το δυναμικό σύστημα

$$\dot{\xi} = \mathbf{A}(t)\xi .$$

Σχεδιάστε το πλάτος της διαταραχής $|\xi(t)|$ συναρτήσει του χρόνου αν αρχικά $|\xi(0)| = 1$ και εάν η

1. $\xi(0)$ είναι η ιδιοκατάσταση του $\mathbf{A}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή με το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος.

2. $\xi(0)$ είναι η ιδιοκατάσταση του $\mathbf{A}^\dagger$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή με το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος.

3. $\xi(0)$ είναι η ιδιοκατάσταση του $\mathbf{A} + \mathbf{A}^\dagger$ που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη ιδιοτιμή.

4. Σχεδιάστε τέλος και τις τρείς αυτές ιδιοκαταστάσεις. Ποία η φυσική σημασία της καθεμίας από αυτές (τι ιδιότητα έχει δηλαδή).

Πρόβλημα Γ. Θεωρήστε μία κοινωνία η οποία αποτελείται από δύο άτομα την 1 και τον 2 και έστω x_1 και x_2 η περιουσία εκάστου (πραγματικές συνεχείς και διαφορίσιμες μεταβλητές, μπορεί και αρνητικές). Το κάθε άτομο ανάλογα με την "τύχη" του μεγαλώνει ή μειώνει την περιουσία του, όπως περιγράφεται από τις διαφορετικές εξισώσεις:

$$\dot{x}_1 = \alpha_1(t)x_1 \quad , \quad \dot{x}_2 = \alpha_2(t)x_2 ,$$

όπου ας θεωρήσουμε ότι κατά μέσο όρο δεν υπάρχει συστηματική τύχη στη ζωή και η χρονική μέση τιμή των

$$\lim_{t\to\infty} \overline{\alpha_i(t)} = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \alpha_i(s)ds = 0 ,$$

για $i = 1, 2$, είναι μηδενική. Κάτω από αυτές τις συνθήκες, χωρίς καμμία αλληλεπίδραση μεταξύ τους, θα είναι

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = \lim_{t\to\infty} \left(\exp\left(\int_0^t a_i(s)ds \right) \ x_i(0) \right) = x_i(0) ,$$

οπότε ασυμπτωτικά μετά την πάροδο πολλού χρόνου ο καθένας καταλήγει να έχει όσα είχε αρχικά και η τελική ολική περιουσία των ισούται με την αρχική ολική περιουσία των. Αυτήν την οικονομία ας την ονομάσουμε ακράτως ατομικιστική και είναι εμφανές ότι με τους όρους που επιβάλαμε σε αυτή την κοινωνία ο ρυθμός ανάπτυξης είναι μηδενικός. Με ρυθμό ανάπτυξης εννοούμε τον χαρακτηριστικό αριθμό Lyapunov του δυναμικού συστήματος:

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln\sqrt{x_1^2(t)+x_2^2(t)}}{t}$$

Τι κριτική θα κάνατε σε αυτό τον ορισμό;

Υπάρχει και ένας άλλος τρόπος οικονομικής αλληλεπίδρασης αυτών των δύο ατόμων: να μοιράζονται αυτά που έχει ο καθένας (ως διάχυση θερμοκρασίας) σύμφωνα με τον διακριτό τελεστή της διάχυσης:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2D\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Δείξτε ότι και σε αυτή την οικονομία ο ρυθμός ανάπτυξης είναι μηδενικός και ότι οι περιουσίες των δύο ατόμων θα εξισωθεί συν των χρόνω, χωρίς να αλλάξει η αρχική συνολική περιουσία.

Θεωρήστε τώρα τη μικτή συμπεριφορά:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) & 0 \\ 0 & \alpha_2(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 2D\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

δηλαδή ο καθένας ακολουθεί την τύχη του μοιράζεται με τον άλλον όμως, στο βαθμό που δίνεται από το D, την περιουσία που έκαστος απέκτησε. Δείξτε με υπολογισμό ότι για κάθε $\infty > D > 0$ ο ρυθμός ανάπτυξης είναι θέτικος $\lambda > 0$. Προς τούτο σχεδιάστε το $\lambda(D)$ συναρτήσει του συντελεστή αλτρουϊσμού D και προσδιορίστε τον βαθμό αλτρουϊσμού για τον οποίο υπάρχει μεγίστη ανάπτυξη. Για τον υπολογισμό θεωρήστε ένα βήμα ολοκλήρωσης $\delta = 0.1$ και σε κάθε βήμα να λαμβάνετε διαφορετικά α_i τυχαία από μία κανονική κατανομή με διασπορά σ (που μπορείτε να το πετύχετε σε κάθε βήμα με την εντολή randn(1). Τον χαρακτηριστικό αριθμό Lyapunov μπορείτε να τον υπολογίσετε με τον τρόπο του προγραμματος altruism.m.