Ασκήσεις στη Μη Γραμμική Δυναμική - Σειρά Δ

Πρόβλημα A. Θεωρήστε τον αρμονικά διεγερμένο ταλαντωτή Van der Pol

$$\ddot{x} + x + \epsilon\dot{x}(x^2 - 1) = a(1 - \omega^2)\cos\omega t$$

με $0 < \epsilon << 1$ και $\omega \neq 1$ τέτοιο ώστε το $|\omega - 1|$ να μην είναι τάξης ϵ . Θεωρώντας τον δεύτερο χρόνο $T = \epsilon t$ προσδιορίστε μία αναλυτική προσέγγιση στην ακριβή λύση $x(t) \approx x_0(t, T)$ η οποία να προσεγγίζει τη συμπεριφορά του συστήματος ακόμα και για χρόνους $t = O(1/\epsilon)$ και μελετήστε τη συμπεριφορά του ταλαντωτή συναρτήσει του πλάτους της διέγερσης a. Αν αρχικά $x(0) = 1$ και $\dot{x}(0) = 0$ σχεδιάστε την λύση που προκύπτει από ακριβή αριθμητική ολοκλήρωση με την αναλυτική προσέγγιση για $a = 1$ και $a = 2$ και $\epsilon = 0.1$. Για πόσο χρόνο έχει ισχύ η προσέγγιση σας;

Πρόβλημα B Θεωρήστε τον διεγερμένο μη γραμμικό αρμονικό ταλαντωτή:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \epsilon\left(\gamma\cos\omega t - \delta\dot{x} - \alpha x^3\right) ,$$

με τις τιμές των παραμέτρων $\omega = 1$, $\epsilon\gamma = 2.5$, και $\epsilon\delta = 0.2$. Δεδομένου ότι ήδη γνωρίζετε ότι η εξωτερική διέγερση είναι πλέον επικίνδυνη όταν $\omega \approx \omega_0$ γράφουμε $\omega_0^2 = \omega^2 + \epsilon\Omega$, με Ω μία παράμετρο, οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \epsilon\left(\gamma\cos\omega t - \Omega x - \delta\dot{x} - \alpha x^3\right) .$$

1. Θεωρήστε πρώτα το γραμμικό πρόβλημα με $\alpha = 0$. Σχεδιάστε την αναλυτική εκφραση για το πλάτος της ταλάντωσης στη σταθερή κατάσταση που προκύπτει ασυμπτωτικά συναρτήσει της φυσικής συχνότητας του ταλαντωτή ω_0 (θεωρήστε τιμές $-0.8 < \epsilon\Omega < 1$). Ολοκληρώστε τώρα την γραμμική εξίσωση με αριθμητική ολοκλήρωση και επιβεβαιώστε ότι το πλάτος της ταλάντωσης συμπίπτει με αυτό που σχεδιάσατε από την αναλυτική έκφραση.

2. Ακόμη για το γραμμικό πρόβλημα: $\alpha = 0$. Χρησιμοποιήστε την μέθοδο των δύο χρόνων με $T = \epsilon t$ για να προσδιορίσετε ασυμπτωτική προσέγγιση $x = x_0(t, T) + \cdots$, που να ισχύει μέχρι και σε χρόνους $t = O(1/\epsilon)$ και υπολογίστε με τον τρόπο αυτό το ασυμπτωτικό πλάτος της ταλάντωσης και συγκρίνατέ το με την αναλυτική έκφραση στην οποία καταλήξατε στο προηγούμενο εδάφιο.

3. Θεωρήστε τώρα μη γραμμικούς όρους διαδοχικά με πλάτος: $\epsilon\alpha = 10^{-4}$, 10^{-3}, 2×10^{-3}, 5×10^{-3} και 10^{-2}. Ολοκληρώστε την εξίσωση αριθμητικά και σχεδιάστε για κάθε τιμή του α το πλάτος της ταλάντωσης στη σταθερή κατάσταση που προκύπτει ασυμπτωτικά συναρτήσει της φυσικής συχνότητας του ταλαντωτή ω_0. Σε κάποια κρίσιμη συχνότητα ω_c θα πρέπει να παρατηρήσετε ασυνέχεια στην απόκριση του ταλαντωτή. Σκοπός του προβλήματος είναι να εξηγήσετε αυτή τη συμπεριφορά.

4. Χρησιμοποιήστε και πάλι τη μέθοδο των δύο χρόνων για να προσδιορίσετε τις δύο διαφορικές εξισώσεις που διέπουν το πραγματικό και μιγαδικό μέρος του πλάτους $A(T)$ της ταλάντωσης (θα βρείτε ότι η $x_0(t, T) = A(T)e^{it} + c.c.$). Δείξτε ότι αυτές οι εξισώσεις δεν μπορούν να καταλήξουν σε οριακό κύκλο (χρησιμοποιήστε το κριτήριο Dulac-φάνηκε κάπου χρήσιμο τελικά) και ότι καταλήγουν σύμφωνα με τον Poincare-Bendixson σε σημείο ισορροπίας το οποίο να προσδιορίσετε με αριθμητική ολοκλήρωση των εξισώσεων αυτών. Το πλάτος της ταλάντωσης στη σταθερή κατάσταση είναι $2\,|A(\infty)|$. Σχεδιάστε το πλάτος της ταλάντωσης $2\,|A(\infty)|$ συναρτήσει της φυσικής συχνότητας ω_0 για τις τιμές μη γραμμικότητας α του προηγουμένου εδαφίου νκαι συγκρίνατε την απόκριση που υπολογίσατε με αυτή που προκύπτει από την αριθμητική ολοκλήρωση.

5. Αναλύστε τα σημεία ισορροπίας του απλουστευμένου συστήματος που κατασκευάσατε στο προηγούμενο εδάφιο. Κρατήστε σταθερό τον συντελεστή ανάλωσης δ και το πλάτος διέγερσης γ και σχεδιάστε το πλάτος της ταλάντωσης συναρτήσει του Ω για διαφορετικές τιμές της μη γραμμικότητας α. Δείξτε ότι ανάλογα με την τιμή του α μπορεί να υπάρχουν ένα η πολλά σταθερά σημεία. Δείξτε ότι για $\alpha > \alpha_c$ υπάρχουν πολλαπλά σημεία ισορροπίας, και προσδιορίστε μία αναλυτική έκφραση για το κρίσιμο αυτό α_c.