

Ασκήσεις στη Μη Γραμμική Δυναμική - Σειρά Γ

1. Σε ένα νησί x είναι ο αριθμός των λαγών και y ο αριθμός των αρνιών. Και τα δύο είδη ανταγωνίζονται για την ίδια τροφή και εξελίσσονται βάσει λογιστικών εξισώσεων. Τα πρόδατα εξελίσσονται με τον εξής τρόπο:

$$\dot{y} = y(2 - x - y),$$

ενώ οι λαγοί με ένα από τους παρακάτω νόμους α) $\dot{x} = x(3 - x - y)$, β) $\dot{x} = x(3 - 2x - y)$, γ) $\dot{x} = x(3 - x - 2y)$ ή δ) $\dot{x} = x(3 - 2x - 2y)$.

Σε κάθε περίπτωση σχεδιάστε τα σημεία ισορροπίας, προσδιορίστε το είδος τους και προσπαθήστε να προσδιορίσετε την γενική εικόνα. Ποία η συμπεριφορά του συστήματος; Ποίος θα επιζήσει; Αναφερθείτε με συντομία αν πιστευέτε ότι μπορεί να υπάρξει ειρηνική συνύπαρξη πληθυσμών;

2. Σχεδιάστε τη συμπεριφορά του συστήματος που σε πολικές συντεταγμένες εξελίσσεται σύμφωνα με τις εξισώσεις: $\dot{r} = r$ και $\dot{\theta} = 1 - r^2$.
3. Το παρακάτω πρόβλημα είναι σημαντικό για τον έλεγχο της σύνθεσης πρωτεϊνών. Δείξτε ότι το παρακάτω δυναμικό σύστημα για $x > 0$ και $y > 0$ δεν μπορεί να έχει οριακό κύκλο:

$$\dot{x} = \frac{k}{1 + \alpha y} - b_1 x, \quad \dot{y} = gx - b_2 y,$$

με όλες τις σταθερές k, b_i, g και α θετικές.

4. Κατασκευάστε ένα γραμμικό δυναμικό σύστημα που διέπεται από ένα 2×2 πίνακα \mathbf{A} (ο πίνακας \mathbf{A} είναι ο γεννήτωρ της δυναμικής) που έχει ιδιοτιμές με αρνητικό πραγματικό μέρος και για τον οποίον η $V = x^T x$ δεν είναι συνάρτηση Lyapunov. Μπορείτε να προσδιορίσετε συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί ο \mathbf{A} ώστε η παραπάνω συνάρτηση να είναι συνάρτηση Lyapunov;
5. Αν αυξήσουμε τη τριβή σε ένα ευσταθές γραμμικό δυναμικό σύστημα αυξάνεται ο εκθετικός ρυθμός μείωσης των διαταραχών;
Στο γραμμικό δυναμικό σύστημα με πραγματικούς συντελεστές

$$\dot{x} = \mathbf{A}x,$$

του οποίου οι ιδιοτιμές του \mathbf{A} έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος προσθέτουμε λίγο τριβή και έχουμε το νέο δυναμικό σύστημα

$$\dot{x} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})x$$

όπου ο πίνακας \mathbf{B} είναι συμμετρικός και αρνητικός.

Είτε αποδείξτε ότι το νέο σύστημα είναι αναγκαστικά ευσταθές ή βρέστε ένα αντιπαράδειγμα.