Ασκήσεις στη Μη Γραμμική Δυναμική - Σειρά Β

1. Θεωρήστε το μη γραμμικό δυναμικό σύστημα

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{x}{2} - y - \frac{x}{2}(x^2+y^2)\\ \dot{y} &= \frac{y}{2} + x - \frac{y}{2}(x^2+y^2)\ ,\end{aligned}$$

που έχει, όπως συζητήσαμε στη τάξη, ένα οριακό κύκλο. Δεν γνωρίζουμε που ακριβώς βρισκόμαστε αρχικά αλλά έχουμε μετρήσεις που εντοπίζουν το σύστημα σε ένα κύκλο ακτίνας 0.1 περι το σημείο $[3/2, 3/2]$, σχεδιάστε πως εξελίσσεται η αρχική αβεβαιότητα μετά την πάροδο $t = 1$, $t = 2$, $t = 5$, $t = 10$ και $t = 20$ χρονικών μονάδων. Σχεδιάστε και μία τροχιά.

2. Αν ολοκληρωθεί το γραμμικό δυναμικό σύστημα

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y\\ \dot{y} &= -x\ ,\end{aligned}$$

με τη μέθοδο Euler με χρονικό βήμα δ, προσεγγίζουμε το δυναμικό σύστημα με την αναδρομική σχέση:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + y_n\delta\\ y_{n+1} &= y_n - x_n\delta\ ,\end{aligned}$$

όπου

$$x_n \equiv x(n\delta)\ \ ,\ \ y_n \equiv y(n\delta)$$

οι καταστάσεις του συστήματος στους χρόνους $n\delta$. Την αναδρομική σχέση την γράφουμε ισοδυνάμως με τη χρήση πινάκων ως

$$\xi_{n+1} = \Phi\xi_n$$

όπου $\xi_n = [x_n, y_n]^T$ και

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ -\delta & 1 \end{pmatrix}\ .$$

Αν αρχικά $\xi_1 = [x_0, y_0]^T$ προσδιορίστε το ξ_n και δείξτε ότι για n αρκούντως μεγάλο

$$|\xi_n| \approx |g|^n$$

όπου $|g|$ το μέτρο της ιδιοτιμής του Φ με το μέγιστο μέτρο. Αν γραψουμε το μέτρο αυτής της ιδιοτιμής ως

$$|g| = e^{\lambda\delta}$$

τότε ισοδύναμα βρίσκουμε ότι όπως $n \to \infty$ η κατάσταση του συστήματπς αυξάνει εκθετικά ως

$$|\xi(n\delta)| \approx e^{\lambda n\delta}$$

με ρυθμό εκθετικής αύξησης τον χαρακτηριστικό αριθμό Lyapunov του συστήματος:

$$\lambda = \lim_{t\to\infty}\frac{|\xi(t)|}{t} = \lim_{n\to\infty}\frac{|\xi(n\delta)|}{n\delta} = \frac{\ln|g|}{\delta}\ .$$

Σχεδιάστε το $\lambda(\delta)$. Τι μαθαίνετε από αυτή την καμπύλη;

3. (Με τη συνεργασία του συμμαθητή σας Μάριου Νικολαΐδη)

Δείξτε ότι η ολοκλήρωση του γραμμικού δυναμικού συστήματος

$$\frac{d\xi}{dt} = \mathbf{A}\xi$$

όπου $\mathbf{A}$ ένας $n \times n$ πίνακας με τη μέθοδο Runge-Kutta βήματος δ ισοδυναμεί με εξέλιξη του συστήματος σύμφωνα με την αναδρομική σχέση:

$$\xi_{n+1} = \Phi\xi_n$$

όπου ο διαδότης έχει προσεγγισθεί από τον πίνακα:

$$\Phi = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}\delta + \mathbf{A}^2\frac{\delta^2}{2!} + \mathbf{A}^3\frac{\delta^3}{3!} + \mathbf{A}^4\frac{\delta^4}{4!}\right)\xi_n \ .$$

Οπως βλέπετε η ακριβής και χωρίς καμμία προσέγγιση δυναμική

$$\xi_{n+1} = e^{\mathbf{A}\delta}\xi_n$$

έχει αντικατασταθεί με το να προσεγγίσουμε το διαδότη χρόνου δ με τους πρώτους τέσσερεις όρους της δυναμοσειράς της εκθετικής συνάρτησης (η μέθοδος Euler που συζητήσαμε στο δεύτερο πρόβλημα ισοδυναμεί με την προσέγγιση του διαδότη: $e^{\mathbf{A}\delta} \approx \mathbf{I} + \mathbf{A}\delta$).

Για το γραμμικό σύστημα του προηγουμένου προβλήματος 2 που περιγράφει τη δυναμική ενός αρμονικού ταλαντωτή να δειχθεί ότι υπάρχει χρονικό βήμα δ_0 τέτοιο ώστε για βήματα $\delta < \delta_0$ η λύση φθείνει τελικά προς το μηδέν, δηλαδή $\lim_{n\to\infty} |\xi_n|^2 = 0$, για βήματα ίσα με το δ_0 το μέτρο της κατάστασης του δυναμικού συστήματος $|\xi_n|^2$ παραμένει σταθερό, ενώ για βήματα $\delta > \delta_0$ η λύση αποκλίνει: $\lim_{n\to\infty} |\xi_n|^2 = \infty$. Προσδιορίστε το δ_0 και σχεδιάστε την καμπύλη του χαρακτηριστικού αριθμού Lyapunov

$$\lambda(\delta) = \lim_{n\to\infty} \frac{|\xi(n\delta)|}{n\delta} = \frac{\ln|g|}{\delta} \ ,$$

όπου $|g|$ το μέτρο της ιδιοτιμής του Φ με το μέγιστο μέτρο συναρτήσει του δ, όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα. Σχεδιάστε την τροχιά που προκύπτει όταν το βήμα είναι δ_0, επί αρκετό χρονικό διάστημα (μεχρι χρόνο 5000). Τα καταφέρατε;

4. Η Άννα, η συμμαθήτριά σας, στο χρονοεξαρτώμενο κλιματικό πρόβλημα της πρώτης σειράς σχεδιάσε την απεικόνιση Poincare για κάποιο ϵ και για το αντίθετο του. Βρήκε ότι οι καμπύλες ήταν διαφορετικές. Το ερώτημα είναι: είναι λογικό οι καμπύλες να διαφέρουν; παρότι διαφέρουν οι καμπύλες που προκύπτουν για διαφορετικές φάσεις ϕ της ηλιακής σταθεράς $Q_0(1 + \epsilon\sin(2\pi t + \phi))$ προβλέπεται συμπεριφορά του κλίματος που εξαρτάται από το τα (Q_0, ϵ, ϕ) ή απλώς από τα (Q_0, ϵ); Τα διαφορετικά σημεία που χαρακτηρίζουν τις περιοδικές τροχιές τι είναι; Ανήκουν στην ίδια τροχιά ή σε διαφορετικές; Τι θα λέγατε συνεπώς στην Άννα;