

Μη γραμμική Δυναμική

Παράδοση (αυστηρά) 7 Ιουνίου 2011, ώρα 3μμ. Δεν θα γίνει δεκτό τίποτε μετά από αυτή την ώρα.

Μία χώρα αποτελείται από δύο μόνο οικογένειες. Την οικογένεια Α και την οικογένεια Β. Στη χώρα αυτή έχει θεσμοθετηθεί το εξής σύστημα οικονομίας που αφορά τη κινητή περιουσία της κάθε οικογένειας (η ακίνητη θεωρείται ότι είναι η ίδια). Η κινητή περιουσία υπολογίζεται χρηματικά και θεωρείται πραγματικός αριθμός x_i που ικανοποιεί όλα τα γνωστά θεωρήματα συνέχειας της πραγματικής ευθείας. Ο ρυθμός μεταβολής της περιουσίας κάθε οικογένειας κάθε χρόνο που είναι περιττός αριθμός (π.χ. 2011) είναι

$$\dot{x}_1 = rx_1 - \alpha \frac{x_1 - x_2}{2}, \quad \dot{x}_2 = -rx_2 + \alpha \frac{x_1 - x_2}{2}$$

με $r > 0$, ενώ τον επόμενο χρόνο

$$\dot{x}_1 = -rx_1 - \alpha \frac{x_1 - x_2}{2}, \quad \dot{x}_2 = rx_2 + \alpha \frac{x_1 - x_2}{2}.$$

Δηλαδή οι περιττοί χρόνοι είναι τυχεροί για την οικογένεια Α, ενώ είναι άτυχοι για την Β, και το αντίθετο τους άρτιους χρόνους και όσο τυχερή είναι μία οικογένεια μία χρονιά τόσο άτυχη είναι την επόμενη, έτσι ώστε τελικά κάθε οικογένεια να είναι ούτε τυχερή ούτε άτυχη. Λαμβάνουμε το r ίδιο υποθέτοντας ότι η Β έχει την ίδια τύχη/ατυχία με την Α (θα εξετάσουμε αργότερα αν αυτή η παραδοχή έχει σημασία ή όχι). Ο δεύτερος όρος στις δυναμικές εξισώσεις της οικονομίας είναι η θεσμοθέτηση μεταφοράς πλούτου από τον πλουσιότερο ανα πάσα στιγμή στον στιγμαία φτωχότερο με σκοπό την άμβλυνση των ανισοτήτων. Πράγματι η μέση περιουσία κάποια χρονική στιγμή είναι $(x_1 + x_2)/2$ και, αν υποθέσουμε ότι $x_1 > x_2$, η οικογένεια Α τότε μεταφέρει με ρυθμό α (που έχει μονάδες 1/χρόνο) το πλεονάσματός της

$$x_1 - \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{x_1 - x_2}{2}$$

στην οικογένεια Β. Η τιμή του α μετρά το βαθμό αλτρουϊσμού της χώρας αυτής που κυμαίνεται από $\alpha = 0$ σε $\alpha = \infty$.

Θέλουμε να εξετάσουμε την εξάρτηση του συνολικού πλούτου της οικονομίας $x_1 + x_2$ στο όριο $t \rightarrow \infty$ από τον βαθμό αλτρουϊσμού α .

1. Προσδιορίστε τον διαδότη μίας περιόδου στη περίπτωση $\alpha = 0$. Που καταλήγει αυτή η οικονομία;
2. Προσδιορίστε τον διαδότη μίας περιόδου στη περίπτωση $\alpha \gg 1$ προσεγγιστικά αμελώντας το πρώτο όρο στο δεξί μέλος των διαφορικών εξισώσεων (θέτοντας δηλαδή $r = 0$). Που καταλήγει αυτή η οικονομία;

3. Αντιμετατίθενται οι πίνακες που περιγράφουν την δυναμική κάθε χρόνου στη γενική περίπτωση; Προσδιορίστε τώρα τον διαδότη μίας περιόδου για $r = 0.1$ και υπολογίστε τον αριθμό Lyapunov $\lambda(\alpha, r)$ για διαφορετικές τιμές του α . Τι παρατηρείτε; Υπάρχει ποιοτική διαφορά στα αποτελέσματα; (Μπορείτε να κάνετε τους υπολογισμούς αριθμητικά).
4. Προσδιορίστε την εξάρτηση του μέγιστου ως προς τα α , $\lambda_{max}(r)$, από το συντελεστή r . Ποία η εξάρτηση του βέλτιστου συντελεστή αλτροϋσμού από τον συντελεστή τύχης;
5. Τα συμπεράσματα σας θα ήταν ποιοτικά διαφορετικά αν ο συντελεστής τύχης r ήταν διαφορετικός για τις δύο οικογένειες;