



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής
Μη Γραμμική Δυναμική
23 Ιουνίου 2014

Δεύτερος κατ'οίκον διαγωνισμός
Παράδοση 30 Ιουνίου 2014, 14:00

Άσκηση 1

- α) Να σχεδιάσετε ποιοτικά τα διαγράμματα φάσεων για τα δισδιάστατα δυναμικά συστήματα $\dot{\mathbf{x}} = A \mathbf{x}$, όπου ο A είναι ο:

i. $\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$, ii. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, iii. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, iv. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Για να το κάνετε αυτό υπολογίστε τις καμπύλες στις οποίες $\dot{x} = 0$ και $\dot{y} = 0$ και σκεφθείτε ποιά θα είναι η κατεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητας $\dot{\mathbf{x}}$ πάνω στους άξονες. Επίσης υπολογίστε τις ιδιοκατευθύνσεις του κάθε συστήματος και τις αντίστοιχες ιδιοτιμές του και στην περίπτωση που οι ιδιοκατευθύνσεις είναι πραγματικές τότε σχεδιάστε και τις τροχιές που αντιστοιχούν σε αυτές. Έχοντας τα αυτά συμπληρώστε τα βέλη στον υπόλοιπο χώρο.

- β) Σχεδιάστε τα αντίστοιχα διαγράμματα φάσεων του α) με τη βοήθεια του Matlab.

Άσκηση 2

- α) Σχεδιάστε το διάγραμμα φάσης του μη-γραμμικού συστήματος:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + e^{-y}, \\ \dot{y} &= -y.\end{aligned}$$

Για να το κάνετε αυτό ελέγξτε αρχικά για την ύπαρξη σημείων ισορροπίας. Έπειτα σχεδιάστε τις καμπύλες στις οποίες όταν περνούν οι τροχιές η ταχύτητα θα είναι κατακόρυφη ($\dot{x} = 0$) ή οριζόντια ($\dot{y} = 0$). Μπορείτε να σχεδιάσετε περίπου πώς θα είναι το διάγραμμα φάσεων τώρα; Γραμμικοποιήστε το σύστημα γύρω από το/τα σημεία ισορροπίας. Προσδιορίστε τις ιδιοτιμές των αντίστοιχων γραμμικών συστημάτων και τις ιδιοκατευθύνσεις.

- β) Σχεδιάστε το διάγραμμα φάσεων με τη βοήθεια του Matlab και επίσης σχεδιάστε τις ιδιοκατευθύνσεις των αντίστοιχων γραμμικών συστημάτων γύρω από τα σημεία ισορροπίας. Πόσο μακριά από το σημείο ισορροπίας οι τροχιές αρχίζουν να αποκλίνουν από τη γραμμική προσέγγιση;

Ασκηση 3

- α) Σε ένα νησί υπάρχουν λαγοί (x είναι ο αριθμός των λαγών) και αρνιά (y ο αριθμός των αρνιών). Και τα δύο είδη ανταγωνίζονται για την ίδια τροφή, γρασίδι. Κάθε είδος εν τη απουσία του άλλου, θα εξελισσόταν βάση κάποιας λογιστικής εξίσωσης, π.χ.

$$\dot{N} = rN(1 - N/k) ,$$

φτάνοντας σε κάποιον φέρον πληθυσμό, k . Οι λαγοί ως γνωστόν πολλαπλασιάζονται πολύ πιο γρήγορα, οπότε θα αντιστοιχούσε σε αυτούς ένας μεγαλύτερος ρυθμός αύξησης r . Όταν όμως οι λαγοί και τα αρνιά συνυπάρχουν τότε τα αρνιά μπορούν να διώξουν τους λαγούς από το γρασίδι και να αρχίσουν να βόσκουν αυτά. Αυτές οι διαμάχες συμβαίνουν σε ρυθμό ανάλογο με το μέγεθος του κάθε πληθυσμού. Επιπλέον, αυτές οι διαμάχες μεταξύ των ειδών θα υποθέσουμε ότι θα μειώσουν τον ρυθμό αύξησης τους και ότι η επίπτωση αυτή είναι πιο μεγάλη προς τους λαγούς παρά προς τα πρόβατα. Ένα μοντέλο που περιλαμβάνει όλες αυτές τις παραδοχές για την εξέλιξη του κάθε είδους είναι:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(3 - x - 2y) , \\ \dot{y} &= y(2 - x - y) , \\ x(t), y(t) &> 0 .\end{aligned}$$

Σχεδιάστε τα σημεία ισορροπίας, προσδιορίστε την ευστάθειά τους μέσω του χαρακτηρισμού του αντίστοιχου γραμμικού συστήματος γύρω από αυτά και προσπαθείστε να προσδιορίσετε τη γενική εικόνα στο διάγραμμα (x, y) . Αναφερθείτε με συντομία αν πιστεύετε ότι μπορεί να υπάρξει ειρηνική συνύπαρξη μεταξύ λαγών και αρνιών.

- α) Επαναλάβετε τα βήματα στην περίπτωση που οι λαγοί εξελίσσονται με:

$$\text{i. } \dot{x} = x(3 - x - y) , \text{ ii. } \dot{x} = x(3 - 2x - y) , \text{ iii. } \dot{x} = x(3 - 2x - 2y) .$$