



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής
Μη Γραμμική Δυναμική
12 Ιουνίου 2014

Πρώτος κατ'οίκον διαγωνισμός
Παράδοση 20 Ιουνίου 2014, 09:00

Άσκηση 1 (Βασισμένη στην Ασκ. Strogatz 3.6.6 p. 87-88) Θεωρήστε την εξίσωση

$$\dot{x} = h + \epsilon x - gx^3 - x^5 \quad (1)$$

- α. Κατασκευάστε το διάγραμμα της διακλάδωσης ως προς ϵ όταν $h = 0$ για τις τρεις περιπτώσεις $g < 0, g = 0, g > 0$.
- β. Πως τροποποιούνται τα παραπάνω διαγράμματα όταν $h > 0$.

Άσκηση 2 (Βασισμένη στην Ασκ. 3.7.4 Strogatz p. 90) Ένας πληθυσμός N αλιευόμενος εξελίσσεται σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\dot{N} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - H \frac{N}{A + N}, \quad (2)$$

με $H > 0$ και $A > 0$.

- α. Σχεδιάστε το ρυθμό αλίευσης και αντιληφθείτε τη σημασία του πληθυσμού A .
- β. Γράψτε την παραπάνω εξίσωση στην αδιάστατη μορφή:

$$\dot{x} = x(1-x) - \epsilon \frac{x}{\alpha + x}, \quad (3)$$

μετά απο κατάλληλη επιλογή του αδιάστατου χρόνου τ και πληθυσμού x . Ποιές είναι οι παράμετροι $\epsilon > 0$ και $\alpha > 0$;

- γ. Δείξτε ότι ανάλογα με τις τιμές των α και ϵ μπορεί να έχουμε καταστάσεις με 1, 2 ή 3 σημεία ισορροπίας. Χαρακτηρίστε την ευστάθειά των σημείων ισορροπίας ανάλογα με την κατάσταση που βρισκόμαστε.
- δ. Για δεδομένο α δείξτε ότι γίνεται διακλάδωση ως προς ϵ όταν $\epsilon = \alpha$ στο σημείο ισορροπίας $x = 0$. Προσδιορίστε το είδος της διακλάδωσης και δείξτε με ένα διάγραμμα τι συμβαίνει τότε.
- ε. Για δεδομένο α δείξτε ότι γίνεται διακλάδωση ως προς ϵ όταν $\epsilon = (1 + \alpha)^2/4$ εφόσον $\alpha < \alpha_c$. Τι είδος διακλάδωσης γίνεται; Ποιό το κρίσιμο α_c . Τι γίνεται όταν $\alpha > \alpha_c$.
- στ. Σχεδιάστε τα σημεία ισορροπίας στο χώρο α, ϵ . Μπορούν να παρουσιαστούν υστερητικά φαινόμενα στην εξέλιξη του πληθυσμού των ψαριών;