

# Μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωσης

## Runge-Kutta

12 Μαΐου 2014

### 1 Μέθοδοι αριθμητικής ολοκλήρωσης

Οι δύο πιο σύνηθεις μέθοδοι αριθμητικής ολοκλήρωσης είναι η μέθοδος Euler και η μέθοδος Runge-Kutta. Εάν έχουμε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\dot{y} = f(y, t), y(t_0) = y_0. \quad (1)$$

τότε μπορούμε να προσεγγίσουμε τη λύση του στους χρόνους  $t_0 + n\delta$ , όπου  $n$  ακέραιος και  $\delta$  το βήμα της ολοκλήρωσης, ως:

**Μέθοδος Euler:**

$$y(t_0 + \delta) = y(t_0) + \delta f(y_0, t_0), \quad (2)$$

ή

**Μέθοδος Runge-Kutta**

$$y(t_0 + \delta) = y(t_0) + \delta \left( \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} \right), \quad (3)$$

όπου

$$k_1 = f(y_0, t_0)$$

$$k_2 = f(y_0 + k_1\delta/2, t_0 + \delta/2)$$

$$k_3 = f(y_0 + k_2\delta/2, t_0 + \delta/2)$$

$$k_4 = f(y_0 + k_3\delta, t_0 + \delta).$$

### 2 Πόσο λάθος κάνουμε;

Σκοπός μας είναι να μελετήσουμε την μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης Runge-Kutta, και να την συγκρίνουμε με τη μέθοδο Euler. Για το σκοπό αυτό θα ολοκληρώσουμε τη λογιστική

εξίσωση:

$$\dot{y} = ry \left(1 - \frac{y}{k}\right) \quad (4)$$

Θέλουμε να δούμε πόσο «λάθος» μπορεί να αποφέρει η κάθε μέθοδος ολοκλήρωσης. Στη συγκεκριμένη περίπτωση γνωρίζουμε και την ακριβή αναλυτική λύση η οποία είναι:

$$y_{\text{theor.}}(t) = k \frac{e^{rt}}{e^{rt} - 1 + k/y(0)} \quad (5)$$

(ελέξετε ότι πράγματι ικανοποιεί την (4))

Για να συγκρίνουμε τις δύο μεθόδους θα ολοκληρώσουμε και με τις δύο την εξίσωση μέχρι μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή,  $t = T$ , και έπειτα θα συγκρίνουμε πόσο διαφορετικά αποτελέσματα μας δίνει η κάθε μέθοδος σε σχέση με την ακριβή αναλυτική λύση που έχουμε στη διάθεσή μας.

Χωρίζουμε το διάστημα  $[0, T]$  σε διαστήματα. Έτσι έχουμε τη διακριτοποίηση του συνεχούς διαστήματος  $[0, T]$  σε:

$$[0, T] \rightarrow 0 = t_1, t_2, \dots, t_N, t_{N+1} = T$$

Ολοκληρώνουμε την εξίσωση (4) με τις μεθόδους Euler και Runge-Kutta και έτσι υπολογίζουμε τις τιμές  $y_{\text{Euler}}(T)$  και  $y_{\text{R-K}}(T)$

Κρατώντας σταθερή την τελική χρονική στιγμή  $T$  μεταβάλλουμε τον αριθμό των σημείων  $N$ , και άρα επομένως και το μήκος των διαστημάτων, και κάθε φορά υπολογίζουμε τις διαφορές:

$$Er_1(N) = |y_{\text{theor.}}(T) - y_{\text{Euler}}(T)|$$

$$Er_2(N) = |y_{\text{theor.}}(T) - y_{\text{R.K.}}(T)|$$

Το μήκος των διαστημάτων  $\delta$  σχετίζεται με τον αριθμό των σημείων μέσω της σχέσης:

$$\delta = \frac{T}{N+1} \quad (6)$$

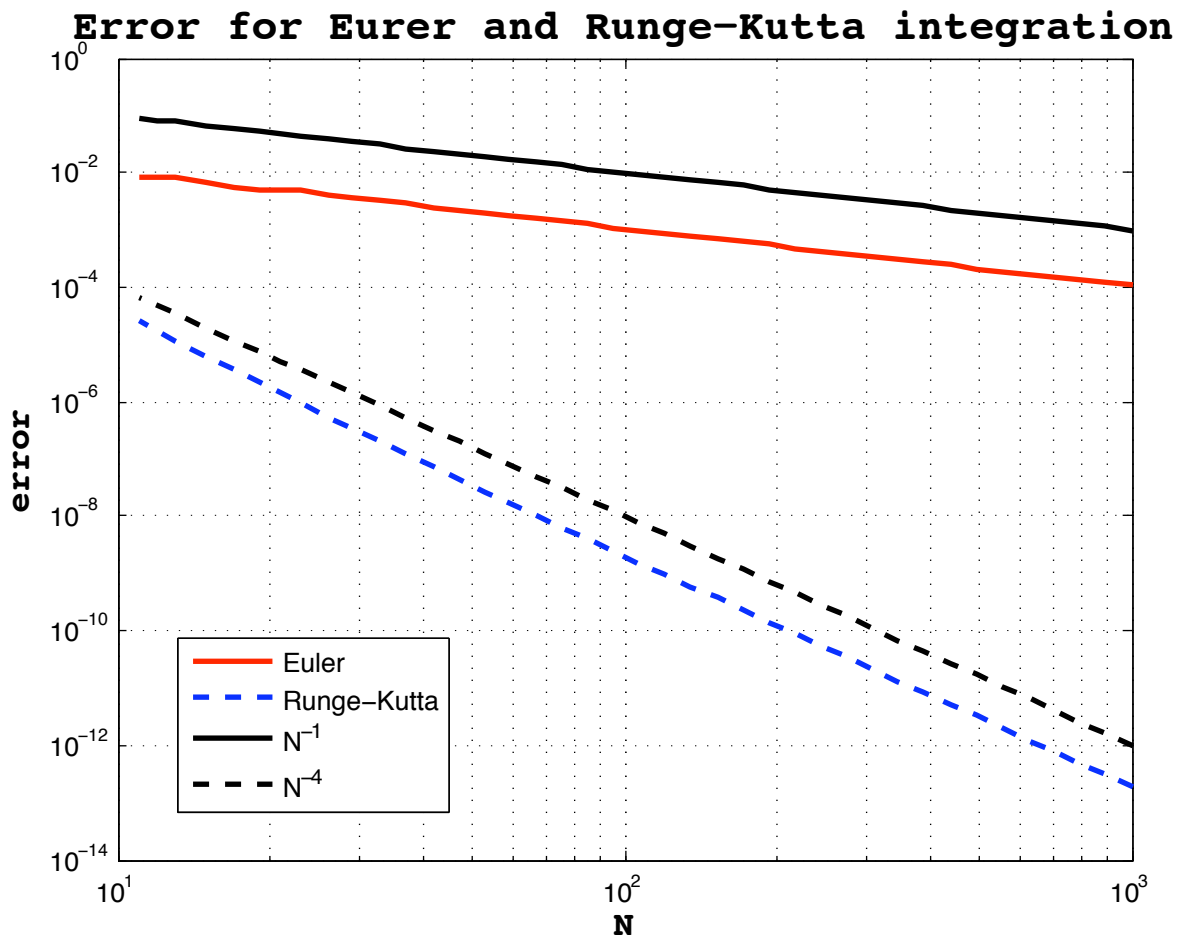
Παίρνουμε τιμές του  $N$  από 10 έως  $10^3$  (ακέραιες) και σχεδιάζουμε σε λογαριθμική κλίμακα, στο γράφημα (1), τις γραφικές παραστάσεις  $Er_1(N)$ ,  $Er_2(N)$ ,  $N^{-1}$  και  $N^{-4}$  συναρτήσεων του  $N$ . Φαίνεται καθαρότητα με το γράφημα αυτό ότι το λάθος της μεθόδου Euler πάει σαν  $N^{-1}$  ενώ της Runge-Kutta σαν  $N^{-4}$ .

Μπορούμε τις ίδιες σχέσεις να τις σχεδιάσουμε συναρτήσεων του διαστήματος  $\delta$ . Σχεδιάζουμε λοιπόν στο γράφημα (2) πάλι σε λογαριθμική κλίμακα τις γραφικές παραστάσεις  $Er_1(\delta)$ ,  $Er_2(\delta)$ ,  $\delta$  και  $\delta^4$  συναρτήσεων του  $\delta$ . Είναι ολοκάθαρο πλέον αυτό που ισχυριστήκαμε στην τάξη ότι η μέθοδος Euler συγκλίνει σαν  $\delta$  ενώ η Runge-Kutta σαν  $\delta^4$ .

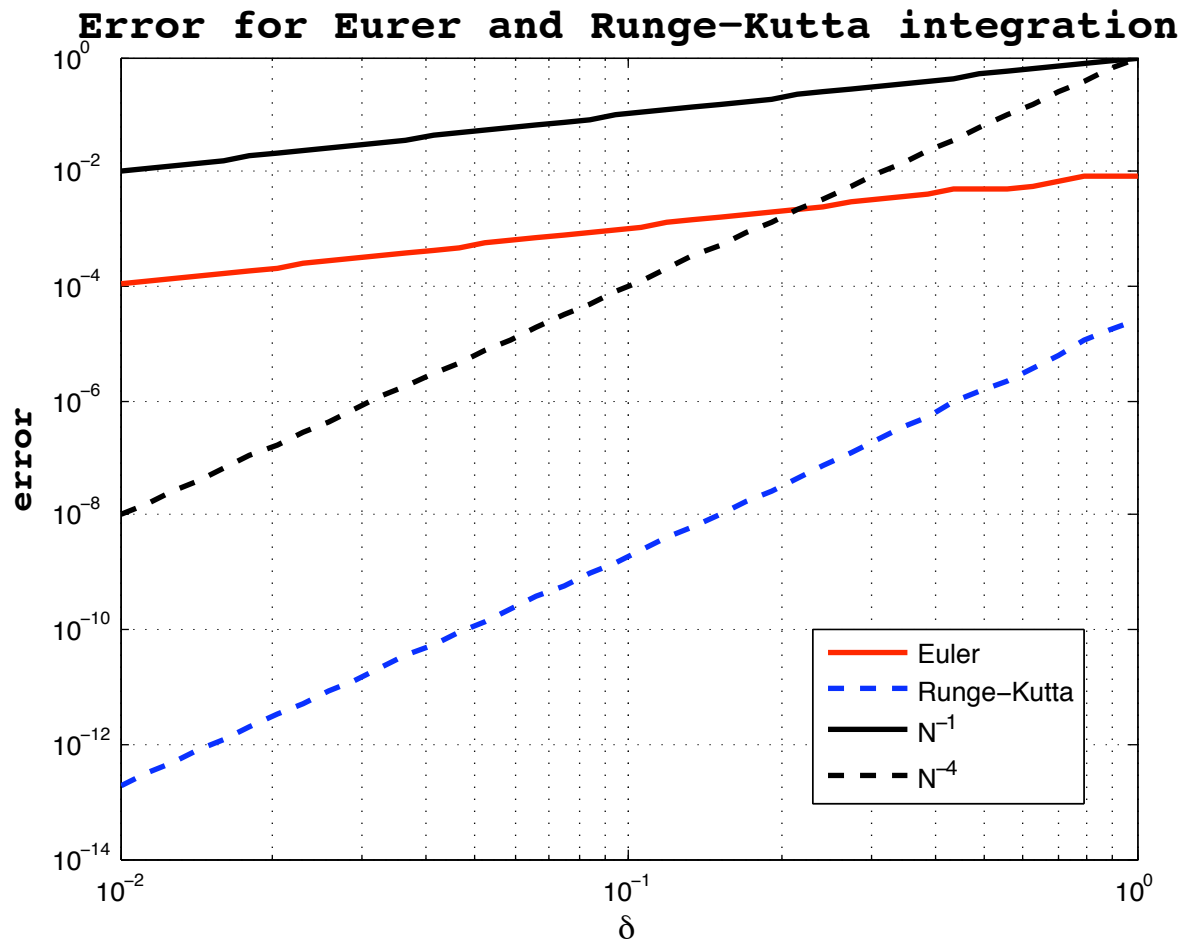
**Σημείωση** Συνηθίζεται να λέμε ότι η μέθοδος ολοκλήρωσης Euler έχει ακρίβεια πρώτης τάξης ενώ η μέθοδος Runge-Kutta έχει ακρίβεια τετάρτης τάξης. Ουσιαστικά σε κάθε χρονικό βήμα,  $\delta$ , το λάθος που κάνουμε είναι τάξεως  $\delta^2$  ή  $\delta^5$  αντίστοιχα. Για να φτάσουμε όμως μέχρι τη χρονική στιγμή κάνουμε  $T/\delta$  βήματα άρα το ολικό λάθος είναι

$$\begin{aligned} \frac{T}{\delta} \times \delta^2 &\sim \mathcal{O}(\delta) \quad \text{για την Euler} \\ \frac{T}{\delta} \times \delta^5 &\sim \mathcal{O}(\delta^4) \quad \text{για την Runge-Kutta} \end{aligned}$$

**Άσκηση** Προσπαθήστε να αναπαραγάγετε μόνοι σας τα γραφήματα αυτά. Αν θέλετε μπορείτε αντί την λογιστική εξίσωση (1) να χρησιμοποιήσετε την  $\dot{y} = 1 + y^2$ ,  $y(0) = 0$ , η οποία έχει αναλυτική λύση  $y_{\text{theor.}}(t) = \tan t$  για  $t \in [0, \pi/2)$ .



Σχήμα 1: Γράφημα του λάθους των μεθόδων Euler και Runge-Kutta στην ολοκλήρωση της λογιστικής εξίσωσης με παραμέτρους  $r = 0.5$  και  $k = 5$  για τελικό χρόνο μέχρι  $T = 10$  σαν συνάρτηση του πλήθους των σημείων της ολοκλήρωσης,  $N$ .



Σχήμα 2: Γράφημα του λάθους των μεθόδων Euler και Runge-Kutta στην ολοκλήρωση της λογιστικής εξίσωσης με παραμέτρους  $r = 0.5$  και  $k = 5$  για τελικό χρόνο μέχρι  $t = 10$  σαν συνάρτηση του διαστήματος της ολοκλήρωσης,  $\delta$ .