Μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωρης

Runge-Kutta

1 Γενικά

Σκοπός μας είναι να μελετήσουμε την μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης Runge-Kutta. και να την συγκρίνουμε με τη μέθοδο Euler. Για το σκοπό αυτό θα ολοκληρώσουμε τη λογιστική εξίσωση:

$$\dot{y} = ry\left(1 - \frac{y}{k}\right) \tag{1}$$

Θέλουμε να δούμε πόσο «λάθος» μπορεί να αποφέρει η κάθε μέθοδος ολοκλήρωσης. Στη συγκεκριμένη περίπτωση γνωρίζουμε και την ακριβή αναλυτική λύση η οποία είναι:

$$y_{\text{theor.}}(t) = k\frac{e^{rt}}{e^{rt} - 1 + k/y(0)} \tag{2}$$

(ελέξετε αν θέλετε ότι πράγματι ικανοποιεί την (1))

Για να συγκρίνουμε τις δύο μεθόδους θα ολοκληρώσουμε και με τις δύο την εξίσωση μέχρι μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, $t = T$, και έπειτα θα συγκρίνουμε πόσο διαφορετικά αποτελέσματα μας δίνει η κάθε μέθοδος σε σχέση με την ακριβή αναλυτική λύση που έχουμε στη διάθεσή μας.

Χωρίζουμε το διάστημα $[0, T]$ σε διαστήματα. Έτσι έχουμε τη διακριτοποίηση του συνεχούς διαστήματος $[0, T]$ σε:

$$[0, T] \quad \rightarrow \quad 0 = t_1, t_2, \ldots, t_N, t_{N+1} = T$$

Ολοκληρώνουμε την εξίσωση (1) με τις μεθόδου Euler και Runge-Kutta και έτσι υπολογίζουμε τις τιμές $y_{\text{Euler}}(T)$ και $y_{\text{R-K}}(T)$

Κρατώντας σταθερή την τελική χρονική στιγμή T μεταβάλλουμε τον αριθμό των σημείων N, και άρα επομένως και το μήκος των διαστημάτων, και κάθε φορά υπολογίζουμε τις διαφορές:

$$\begin{aligned} Er_1(N) &= |y_{\text{theor.}}(T) - y_{\text{Euler}}(T)| \\ Er_2(N) &= |y_{\text{theor.}}(T) - y_{\text{R.K.}}(T)| \end{aligned}$$

Το μήκος των διαστημάτων δ σχετίζεται με τον αριθμό των σημείων μέσω της σχέσης:

$$\delta = \frac{T}{N+1} \tag{3}$$

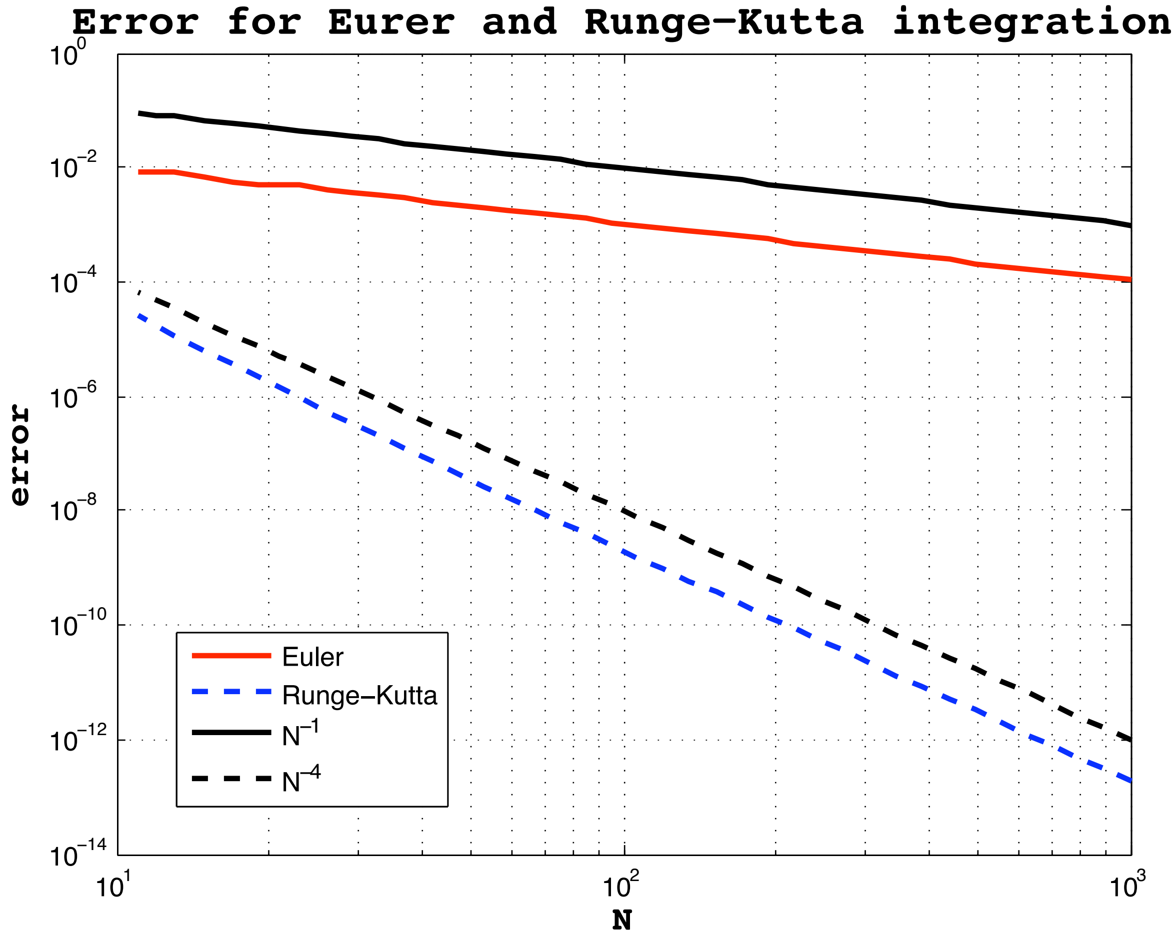
Παίρνουμε τιμές του N από 10 έως 10^3 και σχεδιάζουμε σε λογαριθμική κλίμακα, στο γράφημα (1), τις γραφικές παραστάσεις $Er_1(N)$, $Er_2(N)$, N^{-1} και N^{-4} συναρτήσει του N. Φαίνεται καθαρότατα με το γράφημα αυτό ότι το λάθος της μεθόδου Euler πάει σαν N^{-1} ενώ της Runge-Kutta σαν N^{-4}.

Μπορούμε τις ίδιες σχέσες να τις σχεδιάσουμε συναρτήσει του διαστήματος δ. Σχεδιάζουμε λοιπόν στο γράφημα (2) πάλι σε λογαριθμική κλίμακα τις γραφικές παραστάσεις $Er_1(\delta)$, $Er_2(\delta)$, δ και δ^4 συναρτήσει του δ. Είναι ολοκάθαρο πλέον αυτό που ισχυριστήκαμε στην τάξη ότι η μέθοδος Euler συγκλίνει σαν δ ενώ η Runge-Kutta σαν δ^4.

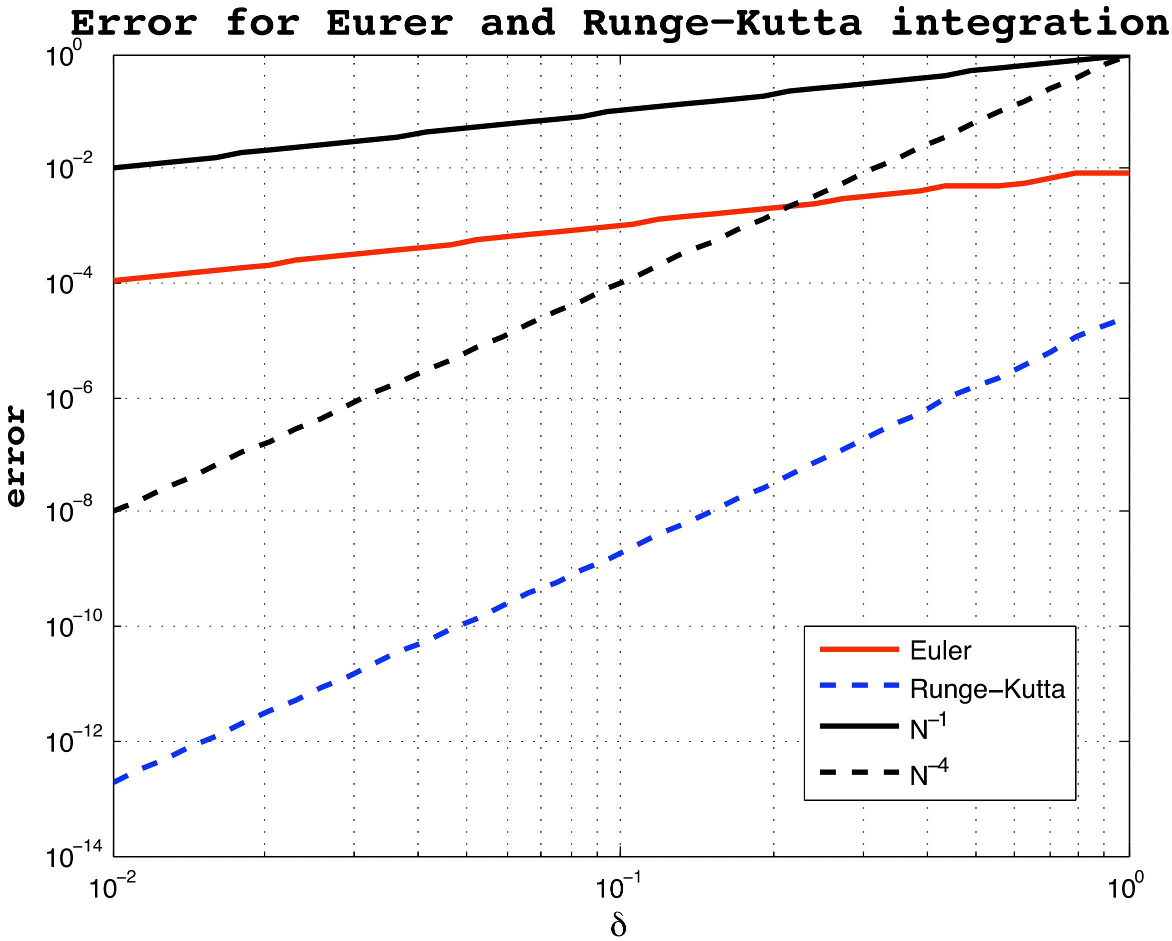
Σημείωση Συνηθίζεται να λέμε ότι η μέθοδος ολοκλήρωσης Euler έχει ακρίβεια *πρώτης τάξης* ενώ η μέθοδος Runge-Kutta έχει ακρίβεια *τετάρτης τάξης*. Ουσιαστικά σε κάθε χρόνικό βήμα, δ, το λάθος που κάνουμε είναι τάξεως δ^2 ή δ^5 αντίστοιχα. Για να φτάσουμε όμως μέχρι τη χρονική στιγμή κάνουμε T/δ βήματα άρα το ολικό λάθος είναι

$$\begin{aligned} &\frac{T}{\delta} \times \delta^2 \sim \mathcal{O}(\delta) \quad \text{για την Euler} \\ &\frac{T}{\delta} \times \delta^5 \sim \mathcal{O}(\delta^4) \quad \text{για την Runge-Kutta} \end{aligned}$$

Άσκηση Προσπαθήστε να αναπαραγάγετε μόνοι σας τα γραφήματα αυτά.



Σχήμα 1: Γράφημα του λάθους των μεθόδων Euler και Runge-Kutta στην ολοκλήρωση της λογιστικής εξίσωσης με παραμέτρους $r = 0.5$ και $k = 5$ για τελικό χρόνο μέχρι $T = 10$ σαν συνάρτηση του πλήθους των σημείων της ολοκλήρωσης, N.



Σχήμα 2: Γράφημα του λάθους των μεθόδων Euler και Runge-Kutta στην ολοκλήρωση της λογιστικής εξίσωσης με παραμέτρους $r = 0.5$ και $k = 5$ για τελικό χρόνο μέχρι $= 10$ σαν συνάρτηση του διαστήματος της ολοκλήρωσης, δ.