

Μη γραμμική Δυναμική
Παράδοση (αυστηρά) Τρίτη 25 Μαΐου 2010, ώρα 3μμ. Δεν θα γίνει δεκτό
τίποτε μετά από αυτή την ώρα.

1. Είδαμε ότι η χρονοεξάρτηση της συχνότητας οδηγεί ορισμένες φορές σε αστάθεια του δυναμικού συστήματος ακόμα και όταν το δυναμικό σύστημα είναι ευσταθές κάθε χρονική στιγμή. Αυτό το ανακαλύψατε όταν πρωτοκάνατε κούνια. Θα δείξετε τώρα ότι συμβαίνει και το αντίθετο, δηλαδή δυναμικά συστήματα που είναι κάθε στιγμή ασταθή μπορούν να γίνουν ευσταθή εισάγοντας χρονοεξάρτηση. Και αυτό βεβαίως το έχετε ανακαλύψει από νωρίς, αρκεί να θυμηθείτε τι κάνετε για να κρατήστε ένα ραβδί κατακόρυφα ισορροπώντας το πάνω στη παλάμη σας. Σκοπός της άσκησης είναι να δείξετε ότι ένας ασταθής ταλαντωτής μπορεί να σταθεροποιηθεί με χρονοεξάρτηση. Πάρτε ένα εκκρεμές μήκους l σε πεδίο βαρύτητας έντασης g το οποίο είναι ανεστραμμένο, βρίσκεται δηλαδή κοντά στη κατακόρυφη θέση κοντά στο σημείο ασταθούς ισορροπίας, και προσπαθήστε να το κρατήστε κατακόρυφο κουνώντας το σημείο ανάρτησης περιοδικά πάνω κάτω έτσι ώστε για διάστημα τ το σημείο ανάρτησης να έχει σταθερή επιτάχυνση προς τα πάνω $\gamma = 8a/\tau^2$, όπου a είναι η συνολική μετατόπιση, και μετά ακολουθεί σταθερή πάντα επιτάχυνση του σημείου ανάρτησης προς τα κάτω $\gamma = -8a/\tau^2$, και ούτε καθ' εξής μία πάνω, μία κάτω (η περίοδος της χρονοεξάρτησης αυτής είναι 2τ). Ο ασταθής ταλαντωτής μπορεί να γραφεί κατά προσέγγιση ως:

$$\ddot{x} = (\omega^2 \pm \epsilon^2)x,$$

με $\epsilon^2 = \gamma/l$ και εναλλαγή του προσήμου κάθε τ .

1. Προσδιορίστε τον διαδότη μίας περιόδου $\Phi(2\tau, \epsilon, \omega)$. Ποία συνθήκη πρέπει να ικανοποιείται για να σταθεροποιηθεί το εκκρεμές.
2. Δείξτε ότι για για αρκούντως μικρό τ ότι μπορείτε να σταθεροποιήσετε πάντα τον ταλαντωτή. Σχεδιάστε την καμπύλη σταθεροποίησης σε ένα διάγραμμα με άξονες $\omega\tau$ και $\omega\epsilon$.
3. Εάν το μήκος του εκκρεμούς είναι 1 m και το πλάτος της ταλάντωσης $a = 10\text{ cm}$ με τι συχνότητα πρέπει να κινούμε το σημείο ανάρτησης για να σταθεροποιηθεί το εκκρεμές;

2. Αγοράζουμε δύο μετοχές A και B. Η απόδοση των μετοχών είναι περιοδική με περίοδο 2 μονάδες χρόνου. Στην πρώτη μονάδα χρόνου η A πάντα διπλασιάζει την αξία της ενώ κατά την ίδια περίοδο η B καταλήγει στο 1/4 της αξίας της. Στην επόμενη μονάδα χρόνου η A χάνει το μισό της αξίας της ενώ η B τετραπλασιάζει την αξίας της. Πάντα μετά από κάθε μονάδα χρόνου ένα ποσοστό $0 \leq r \leq 1$ των

κερδών μας από την τυχερή μετοχή το μεταφέρουμε στη χαμένη. Εάν x είναι το κεφάλαιο στην A και y το κεφάλαιο στην B, υπολογίστε τον διαδότη της δυναμικής αυτής σε μία περίοδο (2 μονάδες χρόνου) και την αναμενόμενη απόδοση των κεφαλαίων σας συναρτήσει του r . Τι συμπεραίνετε; Τι κριτική κάνετε στο συμπέρασμα σας;