Ταλαντωτικές συμπεριφορές

Θα προσπαθήσουμε με απλά παραδείγματα να αναλύσουμε τη συμπεριφορά ταλαντωτών που η δυναμική τους έχει διαταραχθεί. Η διαταραχή θα εμφανίζεται πολλαπλιασιασμένη με μία μικρή παράμετρο ϵ, έτσι ώστε αν $\epsilon = 0$ να έχουμε τη συμπεριφορά ενός ταλαντωτή με ή χωρίς τριβή με ή χωρίς εξωτερική διέγερση. Ήδη έχουμε γνωρίσει τα φαινόμενα που χαρακτηρίζουν γραμμικές ταλαντώσεις τέτοιας μορφής, όπως το ισόχρονο της ταλάντωσης ενός ιδανικού ταλαντωτή, τα φαινόμενα απόσβεσης και της κρίσιμης ταλάντωσης όταν υπάρχει γραμμική τριβή, καθώς και το φαινόμενο του συντονισμού.

Αστάθεια σε ταλαντωτή με αρμονικά μεταβαλόμενη σταθερά ελατηρίου

Θεωρήστε τον ταλαντωτή:

$$\ddot{x} + (\delta + \epsilon \cos 2t)x = 0 \ , \tag{1}$$

ο οποίος όταν η μικρή παράμετρος ϵ είναι μηδεν ταλαντώνεται με συχνότητα $\sqrt{\delta}$ οταν $\delta > 0$. Αν $\delta < 0$ το σημείο ισορροπίας $x = 0$ είναι ασταθές. Εμείς θα λάβουμε $\delta > 0$ και θα λάβουμε το δ κοντά στο 1, και μάλιστα η διαφορά από το 1 να είναι της τάξης του ϵ, δηλαδή $|\delta - 1| = O(\epsilon)$ και θα δείξουμε όταν διαταράξουμε την συχνότητα με αρμονική διαταραχή στη διπλάσια συχνότητα τότε ο αρμονικός ταλαντωτής θα γίνει ασταθής. Θα διερευνήσουμε τη δυναμική κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις με τη διαταρακτική μέθοδο των μέσων τιμών (method of averaging) που εισήγαγε ο Bogoliubov.

Μέση τιμή μιας ποσότητας a ορίζεται ως:

$$\overline{a}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{t-\pi}^{t+\pi} a(s) ds \ .$$

Παρατηρείστε ότι η λήψη της μέσης τιμής αντιμετατίθεται με τη λήψη της χρονικής παραγώγου:

$$\dot{\overline{a}} = \overline{\dot{a}} \ .$$

Γράψτε τον ταλαντωτή στη γνώριμη μορφή:

$$\dot{x} = y \quad , \quad \dot{y} = -x - (\delta - 1 + \epsilon \cos 2t)x \ .$$

Ο λόγος που εμφανίζουμε τον όρο $\delta - 1$ μέσα στην παρένθεση, είναι επειδή όλη παρένθεση είναι τάξης ϵ. Μετατρέπουμε τώρα την δυναμική στις πολικές συντεταγμένες:

$$x = r \cos \theta \ , \ y = r \sin \theta$$

όπου επειδή:

$$\dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} \quad , \quad \dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2}$$

η δυναμική γίνεται

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\frac{r}{2}\sin 2\theta(\delta - 1 + \epsilon\cos 2t) \\ \dot{\theta} &= -1 - \cos^2\theta(\delta - 1 + \epsilon\cos 2t) \end{aligned}$$

Αλλάζοντας τη μεταβλητή της γωνίας σε

$$\theta = \phi - t$$

έχουμε

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\frac{r}{2}\sin(2\phi - 2t)(\delta - 1 + \epsilon\cos 2t) \\ \dot{\phi} &= -\cos^2(\phi - t)(\delta - 1 + \epsilon\cos 2t)\ , \end{aligned}$$

όπου τώρα ο ρυθμός μεταβολής και της r και της ϕ ειναι ϵ, οπότε σε μία περίοδο του ταλαντωτή 2π τα r και ϕ είναι κατα προσέγγιση σταθερά και ίσα με τις μέσες τιμές τους $\overline{r}$ και $\overline{\phi}$. Λαμβάνουμε τη μέση τιμή των δυναμικών εξισώσεων και κάνοντας τη προσέγγιση

$$\overline{f(r)g(\phi,t)} = f(\overline{r})\overline{g(\phi,t)}\ ,\ \ \overline{f(r,\phi)} = f(\overline{r},\overline{\phi})$$

για κάθε συνάρτηση f και g καταλήγουμε στην μέση δυναμική:

$$\begin{aligned} \dot{\overline{r}} &= -\frac{\overline{r}}{2}\overline{\sin(2\phi - 2t)(\delta - 1 + \epsilon\cos 2t)} \\ \dot{\overline{\phi}} &= -\overline{\cos^2(\phi - t)(\delta - 1 + \epsilon\cos 2t)}\ . \end{aligned}$$

Η μέση τιμή κάθε αρμονικής συνάρτησης της μορφής π.χ. $\overline{\cos(\phi - t)}$ προσεγγίζεται με μηδέν,

Υπολογίζουμε τις μέσες τιμές κάνοντας χρήση των

$$\overline{\sin(2\phi - 2t)\cos(2t)} = \frac{1}{2}\sin 2\overline{\phi}\ \ ,$$

και

$$\overline{\cos^2(\phi - t)} = \frac{1}{2}$$

καθώς και:

$$\begin{aligned}
\overline{\cos^2(\phi - t)\cos 2t} &= \frac{1}{2}\overline{\cos(2\phi - 2t)\cos(2t) + \cos(2t)} \\
&= \frac{1}{4}\overline{\cos(2\phi - 4t) + \cos(2\phi)} \\
&= \frac{1}{4}\cos(2\overline{\phi})
\end{aligned}$$

Συνεπώς η μέση δυναμική είναι:

$$\dot{\overline{r}} = -\epsilon\frac{\overline{r}}{4}\sin 2\overline{\phi} \tag{2}$$

$$\dot{\overline{\phi}} = -\frac{\delta - 1}{2} - \epsilon\frac{\cos 2\overline{\phi}}{4}\ . \tag{3}$$

Η μέση δυναμική είναι δυνατόν πλέον να αναλυθεί με σαφήνεια. Η εξίσωση για τις γωνίες έχει χωρίσει απο την εξίσωση για την ακτίνα και μπορεί να αναλυθεί από μόνη της. Η συμπεριφορά του συστήματος εξαρτάται απο το λόγο $|\delta - 1|/\epsilon$. Αν

$$\frac{|\delta - 1|}{\epsilon} < \frac{1}{2}$$

τότε όπως βλέπετε στο Σχ. 1 υπάρχει γωνία ευσταθούς ισορροπίας, η οποία όπως φαίνεται είναι στο διάστημα $\pi/2 < \phi_e < \pi$ ή στο $3\pi/2 < \phi_e < 2\pi$ (στο άνω όριο όταν ο λόγος $(\delta - 1)/\epsilon = -1/2$ και στο κάτω όριο όταν $(\delta - 1)/\epsilon = 1/2$) οπότε η εξίσωση για την ακτίνα γίνεται ασυμπτωτικά μετα από χρόνο $1/\epsilon$:

$$\dot{\overline{r}} = -\epsilon\frac{\overline{r}}{4}\sin 2\overline{\phi_e}$$

οπότε

$$\overline{r}(t) = e^{-\epsilon(\sin 2\phi_e/4)\ t}r(0)\ ,$$

που εκθετικά αυξάνει διότι $\sin 2\phi_e < 0$. Ο ασταθής θα είναι ασταθής αν η συχνότητα έχει συντονιστεί σε εύρος συχνοτήτων πλησίον της συχνότητας 1 που ικανοποιεί τη σχέση:

$$\frac{|\delta - 1|}{\epsilon} < \frac{1}{2}\ ,$$

και η θέση του ταλαντωτή αν αρχικά ήταν στη θέση 1 με μηδενική ταχύτητα θα είναι τελικά:

$$x(t) = ae^{-\epsilon(\sin 2\phi_e/4)\ t}\cos(t - \phi_e)\ .$$

Ο μέγιστος ρυθμός αύξησης συμβαίνει για $\delta = 1$ και είναι $\epsilon/4$, η δε γωνία $\phi_e = -\pi/4$, και σε αυτή τη περίπτωση η θέση του ταλαντωτή για μεγάλους χρόνους είναι:

$$x(t) = ae^{\epsilon t/4}\cos(t + \pi/4)\ , \tag{4}$$

με τη σταθερά a κατάλληλα επιλεγμένη. (Εδώ παραπάνω για τη κούνια)

Την ακρίβεια της μεθόδου των μέσων τιμών την εγγυάται θεώρημα (μπορείτε να βρείτε την απόδειξη αυτή είτε στις σημειώσεις της Μηχανικής του Μεταπτυχιακούς ή στη Κλασική Μηχανική του Arnold). Εδώ, για να πεισθήτε για την ακρίβεια συγκρίνουμε στο Σχ. 2 την ακριβή λύση (που προκύπτει απο αριθμητική ολοκλήρωση) με την διαταρακτική λύση για τη περίπτωση $\epsilon = 0.3$, $\delta = 1$ που αντιστοιχεί σε μία τιμή της παραμέτρου που δεν είναι και τόσο μικρή. Το σχετικό λάθος μεταξύτ των δύο λύσεων είναι 1.2%, και είναι ανεξάρτητο από το χρόνο, προσέξτε η ασυμπτωτική μορφή της λύσης με $a = 1$ ενώ προβλέπει τη φάση εξαιρετικά, υπερβαίνει του αποτελέσματος (γιατι;), αν θέσουμε όμως $a = 0.72$ τότε η ασυμπτωτική μορφή δίνει με ακρίβεια τη συμπεριφορά του ταλαντωτή σε μεγάλους χρόνους.

Αλλά το διαταρακτικό μέσο σύστημα (2, 3) είναι στη πραγματικότητα γραμμικό. Δεν είναι περίεργο αυτό, από γραμμικό σύστημα ξεκινήσαμε. Επανερχόμαστε στις καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$\xi = \overline{r}\cos\overline{\phi}\ ,\ \ \eta = \overline{r}\sin\overline{\phi}$$

και οι (2, 3) μετατρέπονται στις γραμμικές εξισώσεις

$$\dot{\xi} = \left(-\frac{\epsilon}{4} + \frac{\delta - 1}{2}\right)\eta \tag{5}$$

$$\dot{\eta} = \left(-\frac{\epsilon}{4} + \frac{\delta - 1}{2}\right)\xi \tag{6}$$

που επιδέχονται λύσεις της μορφής $e^{\lambda t}$ με

$$\lambda^2 = \left(\frac{\epsilon}{4}\right)^2 - \left(\frac{\delta - 1}{2}\right)^2\ .$$

Συνεπώς έχουμε αστάθεια για $|\delta - 1| < \epsilon/2$ και ευστάθεια άλλως. Παρατηρείστε ότι ο όγκος διατηρείται στο μέσο σύστημα όπως και στο αρχικό.

Εξαναγκασμένη κίνηση μη γραμμικού ταλαντωτή

Θεωρήστε τον ταλαντωτή

$$\ddot{x} + x = \epsilon(\gamma \cos t - \Omega x - \delta \dot{x} - \beta x^2 - \alpha x^3) \ .$$

Αυτός είναι ταλαντωτής μοναδιαίας συχνότητας τον οποίο έχουμε διαταράξει σε τάξη ϵ με αρμονική διέγερση σε συχνότητα συντονισμού, με μία παράμετρο αποσυντονισμού Ω, γραμμική τριβή και μη γραμμικότητα. Όλα εισάγονται σαν ίδιας τάξης διαταραχή του ταλαντωτή για να απλοποιηθεί η δυναμική. Η δυναμική τώρα είναι πολύπλοκη, και μπορεί να γίνει και χαοτική. Εμείς όμως θα πάρουμε τέτοιες παραμέτρους έτσι ώστε ο ταλαντωτής να καταλήγει σε κάποια σταθερού πλάτους ταλάντωση με την πάροδο του χρόνου.

Γράφουμε τον ταλαντωτή στη γνώριμη μορφή:

$$\dot{x} = y \quad , \quad \dot{y} = -x + \epsilon(\gamma \cos t - \Omega x - \delta y - \beta x^2 - \alpha x^3) \ .$$

και μετατρέπουμε όπως και προηγουμένως την δυναμική σε πολικές συντεταγμένες, και η δυναμική γίνεται

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \epsilon(\gamma \sin\theta \cos t - \Omega r \sin\theta\cos\theta - \delta r \sin^2\theta - \beta r^2 \cos^2\theta \sin\theta - \alpha r^3 \cos^3\theta \sin\theta), \\
\dot{\theta} &= -1 + \frac{\epsilon}{r}(\gamma \cos\theta \cos t - \Omega r \cos^2\theta - \delta r \cos\theta \sin\theta - \beta r^2 \cos^3\theta - \alpha r^3 \cos^4\theta) \ .
\end{aligned}$$

Αλλάζοντας τη μεταβλητή της γωνίας σε

$$\theta = \phi - t$$

έχουμε

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \epsilon(\gamma \sin(\phi - t) \cos t - \Omega r \sin(\phi - t) \cos(\phi - t) - \delta r \sin^2(\phi - t) - \\
&\quad -\beta r^2 \cos^2(\phi - t) \sin(\phi - t)) - \alpha r^3 \cos^3(\phi - t) \sin(\phi - t)) \ , \\
\dot{\phi} &= \frac{\epsilon}{r}(\gamma \cos(\phi - t) \cos t - \Omega r \cos^2(\phi - t) - \delta r \cos(\phi - t) \sin(\phi - t) - \\
&\quad -\beta r^2 \cos^3(\phi - t) - \alpha r^3 \cos^4(\phi - t)) \ \ ,
\end{aligned}$$

όπου τώρα ο ρυθμός μεταβολής και της r και της ϕ ειναι ϵ, οπότε σε μία περίοδο του ταλαντωτή 2π τα r και ϕ είναι κατα προσέγγιση σταθερά και ίσα με τις μέσες τιμές τους $\overline{r}$ και $\overline{\phi}$. Λαμβάνουμε τη μέση τιμή των δυναμικών εξισώσεων και καταλήγουμε στις προσεγγιστικές εξισώσεις μέσων τιμών:

$$\begin{aligned}
\dot{\overline{r}} &= \frac{\epsilon}{2}(\gamma \sin\overline{\phi} - \delta \overline{r}) \\
\dot{\overline{\phi}} &= \frac{\epsilon}{2\overline{r}}\left(\gamma \cos\overline{\phi} - \Omega \overline{r} - \frac{\alpha}{4}\overline{r}^3\right) \ \ .
\end{aligned}$$

Παρατηρείστε ότι η τετραγωνικής τάξης μη γραμμικότητα δεν έχει επίπτωση στην εξαναγκασμένη απόκριση του ταλαντωτή (το ίδιο θα ίσχυε για κάθε άρτιας τάξης μη γραμμικότητα).

Αν μετεταρέψουμε την μέση δυναμική σε καρτεσιανες συντεταγμένες

$$\xi = \overline{r}\cos\overline{\phi} \ \ , \ \ \eta = \overline{r}\sin\overline{\phi}$$

και ορίσουμε $\tau = \epsilon/2t$ καταλήγουμε στο δυναμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} &= -\delta\xi + \Omega\eta + \frac{\alpha}{4}\eta(\xi^2+\eta^2) \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= \gamma - \Omega\xi - \delta\eta - \frac{\alpha}{4}\xi(\xi^2+\eta^2) \end{aligned}$$

Αν υπολογίσουμε τώρα την απόκλιση του πεδίου των ταχυτήτων αυτής της δυναμικής στο χώρο (ξ, η). Βρίσκουμαι ότι η ροή έχει σταθερά αρνητική απόκλιση -2δ και συνεπώς ο όγκος των χωρίων εξελίσσεται σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\frac{dV}{dt} = -2\delta V \ .$$

Η μέση δυναμική είναι δισδιάστατη, και σύμφωνα με το θεώρημα Poincare-Bendixson τα σύνολα ω της δυναμικής (οι ελκυστές) θα είναι είτε σημεία ισορροπίας, είτε ομοκλινικές ή ετεροκλινικές τροχιές ή περιοδικές τροχιές (οριακοί κύκλοι). Παράξενοι ελκυστές αποκλείονται σε αυτή την απλουστευμένη δυναμική (παρότι το αρχικό πρόβλημα παρουσιάζει χαοτική συμπεριφορά). Μπορούμε να αποκλείσουμε και την ύπαρξη περιοδικών τροχιών διότι η δυναμική ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος Dulac, οπότε δεν μπορούν να υπάρξουν περιοδικές τροχιές, και το σύστημα κατ'ανάγκη θα καταλήξει στα σημεία ισορροπίας που ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\gamma\sin\overline{\phi}_e = \delta\overline{r}_e \ \ , \ \ \gamma\cos\overline{\phi}_e = \Omega\overline{r}_e + \frac{\alpha}{4}\overline{r}_e^3$$

και το τετραγωνικό πλάτος της ταλαντώσης $\rho = \overline{r}_e^2$ δίνεται στη κατάσταση ισορροπίας από τη σχέση:

$$\rho\left(\delta^2 + \left(\Omega + \frac{\alpha}{4}\rho\right)^2\right) = \gamma^2 \ . \qquad (7)$$

Το πλάτος που προβλέπεται είναι το πλάτος που αναμένεται από το γραμμικό πρόβλημα αν η συχνότητα αποσυντονισμού της ταλάντωσης θεωρηθεί ότι είναι $\Omega + \alpha\rho/4$ (βλ. Landau "Mechanics", σχέση 29.4).

Αν $\alpha = 0$ έχουμε το γραμμικό εξαναγκασμένο ταλαντωτή. Τότε τα σημεία ισορροπίας είναι

$$\rho(\Omega) = \frac{\gamma^2}{\delta^2 + \Omega^2} \ , \tan \overline{\phi}_e = \frac{\delta}{\Omega} \, , \tag{8}$$

και το τετράγωνο του πλάτους της ταλάντωσης, ρ, που είναι ανάλογο με την ενέργεια, εξαρτάται από τη συχνότητα αποσυντονισμού με τη γνωστή Lorentzian εξάρτηση. Προσέξτε ότι αυτή η λύση που προέκυψε απο το προσεγγιστικό σύστημα μέσων τιμών, είναι η ακριβής και χωρίς προσεγγίσεις λύση του γραμμικού προβλήματος:

$$x_\infty(\Omega) = \frac{\gamma}{\sqrt{\delta^2 + \Omega^2}} \cos(\phi_e - t) \ \ , \ \ \tan \phi_e = \frac{\delta}{\Omega} \, .$$

Επανερχόμαστε στην απόκριση όταν έχουμε μη γραμμικότητα τρίτης τάξης. Η (7) είναι μία κυβική εξίσωση για το ρ και οι πραγματικές (θετικές) ρίζες δίνουν το πλάτος της εξαναγκασμένης κίνησης. Ας εξετάσουμε την εξάρτηση του πλάτους αυτού από τη συχνότητα αποσυντονισμού Ω. Όταν το α είναι μικρό ο μη γραμμικός όρος είναι αμελητέος και το πλάτος ακολουθεί την Lorentzian (8) με τη συμμετρική εξάρτηση της απο την Ω και το μέγιστο στη συχνότητα συντονισμού που δίνει $\Omega = 0$. Για μεγαλύτερες τιμές της παραμέτρου α η συμμετρία σπάει, η καμπύλη συντονισμού αλλάζει σχήμα γέρνοντας προς το αριστερά αν $\alpha > 0$ (στα δεξιά άλλως) επιτυγχάνοντας πάντοτε τη μέγιστη απόκριση σε μία συχνότητα η οποία είναι μικρότερη αν $\alpha > 0$ (μεγαλύτερη άλλως) απο τη συχνότητα συντονισμού στη γραμμμική περίπτωση που είναι $\Omega = 0$. Για μικρές τιμές της α η (7) έχει μία μόνο πραγματική ρίζα, αλλά για $|\alpha| > \alpha_c$ η κυβική εξίσωση αποκτά τρείς πραγματικές θετικές ρίζες. Η καμπύλη της απόκρισης του ταλαντωτή έχει σχεδιαστεί για μία υποκρίσιμη τιμή και μία υπερκρίσιμη τιμή του α στο Σχ. 3. Παρατηρούμε ότι για υπερκρίσιμες τιμές $\alpha > \alpha_c$ σε ορισμένες συχνότητες ο ταλαντωτής προβέπεται ότι μπορεί να τρείς διαφορετικές αποκρίσεις. Αποδεικνύεται όμως ότι η ενδιάμεση απόκριση είναι ασταθής και μη πραγματοποιήσιμη, οπότε για μία περιοχή συχνοτήτων μπορούν να υπάρχουν δύο διαφορετικές αποκρίσεις, και το πλάτος του ταλαντωτή εξαρτάται από την ιστορία του συστήματος και παρουσιάζει υστερητική συμπεριφορά. Αν π.χ. αρχίζαμε να συντονίζουμε τον ταλαντωτή από μικρά Ω, από το σημείο Α και αυξάναμε σιγα το Ω το πλάτος θα μεγάλωνε και θα έφτανε στο Γ. Στο σημείο αυτό μικρή αύξηση της συχνότητας οδηγεί σε κατάρρευση του πλάτους στο Ε. Αν τώρα αρχίσουμε να μειώνουμε τη συχνότητα το πλάτος θα αυξηθεί ακολουθώντας τον κατώτερο κλάδο ΕΔ μέχρι η συχνότητα φτάσει πάλι στο σημείο Ε, οπότε μία περαιτέρω μείωση της συχνότητας θα οδηγήσει σε ασυνεχή και δραματική αύξηση του πλάτους της ταλάντωσης.

Όταν υπάρχουν τρείς πραγματικές ρίζες υπάρχουν σημεία όπως το Δ και το Ε στα οποία $d\rho/d\Omega = \infty$. Παραγωγίζοντας τώρα την (7) ως προς Ω έχουμε:

$$\frac{d\rho}{d\Omega} = \frac{-8\rho(4\Omega + \alpha\rho)}{16(\delta^2 + \Omega^2) + 16\alpha\Omega\rho + 3\alpha^2\rho^2} \; .$$

Παρατηρούμε ότι η μέγιστη απόκριση πραγματοποιείται όταν

$$4\Omega_{max} = -\alpha\rho_{max} \; ,$$

η οποία αντιστοιχεί σε μεγαλύτερη συχνότητα συντονισμού όταν $\alpha < 0$, όπως αναφέραμε, η δε μέγιστη τιμή της απόκρισης είναι (εισάγοντας το Ω_{max} στην (7)):

$$\rho_{max} = \frac{\gamma^2}{\delta^2} \; .$$

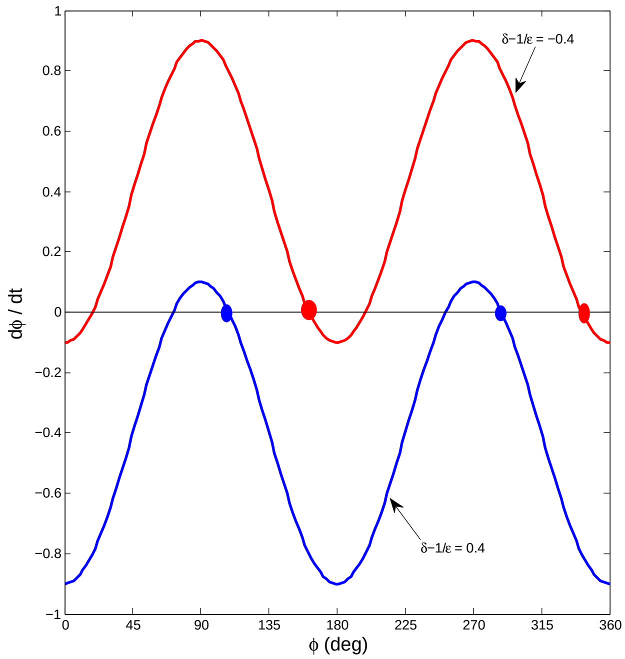
Δηλαδή η μέγιστη απόκριση δεν επηρρεάζεται από τη μη γραμμικότητα και είναι ίση με αυτή στο γραμμικό πρόβλημα.

Οι τιμές $\Omega(\alpha, \delta, \gamma)$ των σημείων Γ και Δ προκύπτουν ως οι κοινές ρίζες της $16(\delta^2 + \Omega^2) + 16\alpha\Omega\rho + 3\alpha^2\rho^2 = 0$ και της (7). Η δε κρίσιμη τιμή α_c προκύπτει όταν τα Γ και Δ συμπέσουν και έχουμε διπλή ρίζα. Επειδή οι συχνότητες που αντιστοιχούν στα Γ και Δ είναι ρίζες της

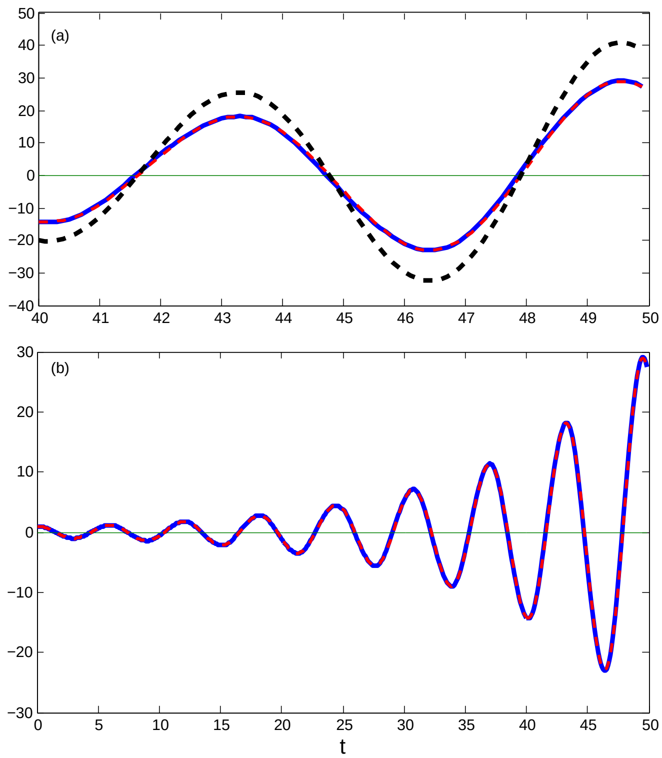
$$\Omega^2 + \alpha\rho\Omega + \frac{3}{16}\alpha^2\rho^2 + \delta^2$$

η διακρίνουσα θα μηδενίζεται όταν $\rho = 4\delta/|\alpha|$ και η αντιστοιχούσα διπλή ρίζα θα είναι $\Omega = -sgn(\alpha)2\delta$ όπου $sgn(\alpha) = \alpha/|\alpha|$ είναι το πρόσημο του α. Εισάγοντας τώρα αυτές τις τιμές στην (7) βρίσκουμε ότι η κρίσιμη τιμή του α_c είναι:

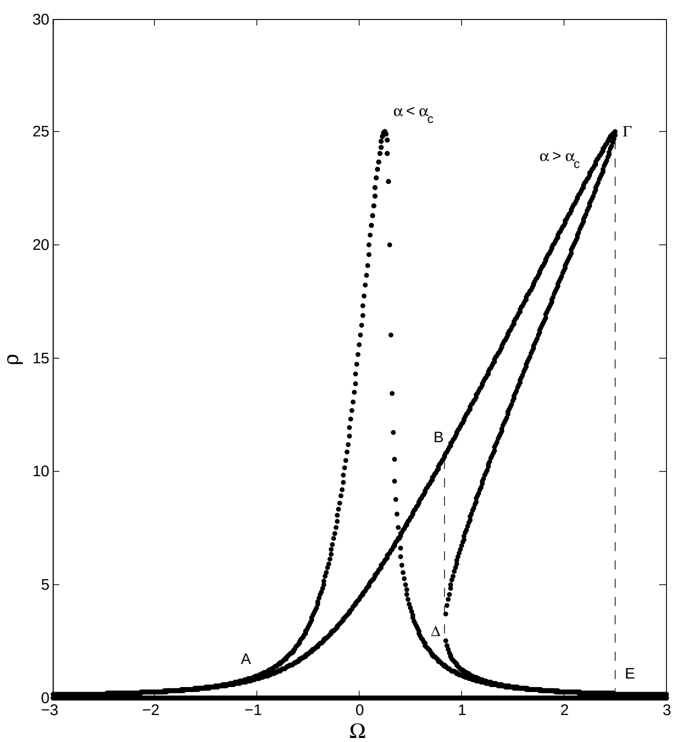
$$|\alpha_c| = \frac{8\delta^3}{\gamma^2} \; .$$



Σχήμα 1: Το $\dot{\phi}$ συναρτήσει του ϕ. Τα σημεία ισορροπίας είναι τα σημεία ϕ_e που μηδενίζεται η $\dot{\phi}$. Τα ευσταθή σημεία ισορροπίας σημειώνονται με κύκλους για τη περίπτωση $(\delta - 1)/\epsilon = -0.4$ και για $(\delta - 1)/\epsilon = -0.4$. Παρατηρείστε ότι τα ευσταθή σημεία ισοοροπίας βρίσκονται πάντα στο διάστημα $\pi/2 < \phi_e < \pi$ ή στο $3\pi/2 < \phi_e < 2\pi$ (στο άνω όριο όταν ο λόγος $(\delta - 1)/\epsilon = -1/2$ και στο κάτω όριο όταν $(\delta - 1)/\epsilon = 1/2$).



Σχήμα 2: Στο (β) Η χρονική εξέλιξη της θέσης του ταλαντωτή (1) υπολογισμένη αριθμητικά, και η θέση όπως προκύπτει απο αριθμητική ολοκλήρωση του διαταρακτικού μέσου δυναμικού συστήματος (2, 3) για $\epsilon = 0.3$ και $\delta = 1$. Οι τροχιές είναι δύσκολο να διακριθούν το σχετικό λάθος είναι 1.2%. Στο (α) παρουσιάζεται το τελικό τμήμα της τροχιάς και επίσησ σχεδιάζεται με διακεκομένη γραμμή και η ασυμπτωτική λύση (4) με $a = 1$. Εάν επιλέξουμε $a = 0.72$ και οι τρεις καμπύλες συμπίπτουν.



Σχήμα 3: Το πλάτος της ταλάντωσης συναρτήσει της συχνότητας αποσυντονισμού Ω για δύο τιμές της παραμέτρου μη γραμμικότητας μία μικρότερη της κρισιμής α_c για $\alpha = -0.04$ και η άλλη για την υπερκρίσιμη περίπτωση με $\alpha = -0.4$. Στην υπερκρίσιμη περίπτωση το τμήμα ΓΔ δεν πραγματοποιείται και παρατηρείται κατάρρευση του πλάτους όταν η συχνότητα υπερβεί αυτήν που αντιστοιχεί στην Γ, ενω παρατηρείται και φαινόμενο υστέρησης. Παρατηρείστε επίσης ότι το μέγιστο πλάτος δεν εξαρτάται από το α. Οι άλλες τιμές των παραμέτρων είναι $\delta = 0.2$ $\gamma = 1$. Για αυτές τις τιμές των παραμέτρων $|\alpha_c| = 0.064$.