ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Εξετάσεις Ιουνίου 2006

Απεικονίσεις

Άσκηση 1

Δίνεται ο δυναμικός νόμος:

$$x_{n+1} = ax_n + bx_n^3$$

(i) Για $b = 1$ βρείτε τη περιοχή τιμών (a_-, a_+) της παραμέτρου a για τις οποίες η αρχή των αξόνων είναι ευσταθές σταθερό σημείο της απεικόνισης. Κατόπιν διερευνείστε το είδος διακλάδωσης που προκύπτει για a_- και a_+ αντίστοιχα όταν το a αυξάνεται από $a_- - \epsilon$ έως $a_+ + \epsilon$ ($\epsilon > 0$).

(ii) Θεωρείστε τώρα τη περίπτωση $a = r$ και $b = -r$. Υπολογείστε αριθμητικά με τη βοήθεια κατάλληλου προγράμματος το διάγραμμα διακλαδώσεων της απεικόνισης για $r > 0$ χρησιμοποιώντας σαν αρχική συνθήκη $x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Επαναλάβατε τον υπολογισμό για $x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ και σχολιάστε τα αποτελέσματά σας. Προσδιορείστε αριθμητικά τη σταθερά βάθμισης a_F του Feigenbaum. Συγκρίνατε με τη τιμή της σταθεράς αυτής για την λογιστική απεικόνιση όπως καθορίζεται στη βιβλιογραφία.

(iii) Εφαρμόζοντας τώρα την μέθοδο ανακανονικοποίησης βρείτε μια αναλυτική προσέγγιση της σταθεράς βάθμισης a_F. Γενικεύσατε τους υπολογισμούς σας για απεικόνιση της μορφής:

$$x_{n+1} = b - |x_n|^z$$

Δείξτε ότι $a_F = a_F(z)$ και προσδιορείστε τη συνάρτηση αυτή.

(iv) Κατασκευάστε απεικόνιση $f(x, \mu)$, όπου το μ παίζει το ρόλο παραμέτρου ελέγχου, η οποία ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

$$f(0,0) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -1 \quad ; \quad 2\frac{\partial^2 f}{\partial \mu \partial x} + \frac{\partial f}{\partial \mu}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

Για αυτή την απεικόνιση προσδιορείστε τον αριθμό των σταθερών σημείων και των κύκλων περιόδου δύο στην περιοχή: $(x, \mu) = (0, 0)$. Σε τι διαφέρει η συμπεριφορά της f από αυτή της λογιστικής απεικόνισης στην παραμετρική περιοχή διακλαδώσεων διπλασιασμού περιόδου;

Υπόδειξη: Επιλέξτε την f περιττή συνάρτηση του x.

Άσκηση 2

Δίνεται η απεικόνιση $T_s : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ με:

$$T_s(x) = \begin{cases} sx & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ s(1-x) & x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

και $s \in (1, 2]$.

(i) Δείξτε ότι η T_s για $\sqrt{2} < s \leq 2$ έχει πέταλο και επομένως είναι χαοτική σύμφωνα με τον τοπολογικό ορισμό. Προσδιορείστε τα διαστήματα K_1 και K_2 που απαρτίζουν το πέταλο.

(ii) Δείξτε επίσης ότι για $1 < s \leq \sqrt{2}$ υπάρχουν διαστήματα J_1 και J_2 τέτοια ώστε $T_s(J_1) \subseteq J_2$, $T_s(J_2) \subseteq J_1$ και $T_s^2|J_i$ να είναι μετά από κατάλληλη βάθμιση T_{s^2}.

(iii) Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα δείξτε ότι η T_s έχει πέταλο (και επομένως τοπολογικά είναι χαοτική) για $1 < s \leq 2$.

(iv) Για τους πιο απαιτητικούς: Δείξτε ότι για $\sqrt{2} < s \leq 2$ δοθέντος οποιουδήποτε υποδιαστήματος J στο $A = [\frac{1}{2}s(2-s), \frac{1}{2}s]$ υπάρχει n τέτοιο ώστε $T_s^n(J) = A$.