1 Περιοχές ευστάθειας και αστάθειας εξίσωσης Mathieu

Διαβάστε το παρακάτω κείμενο και συμπληρώστε τα κενά κάνοντας και τους κατάλληλους υπολογισμούς όπου αυτό απαιτείται.

Θεωρούμε την εξίσωση Mathieu:

$$\ddot{x} + (\alpha + \epsilon \cos t)x = 0 \; , \tag{1}$$

η οποία ισοδύναμα γράφεται ως:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \mathbf{A}(t)\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$$

με τον γεννήτορα πίνακα της δυναμικής:

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha - \epsilon\cos t & 0 \end{pmatrix} .$$

Ο πίνακας $\mathbf{A}(t)$ έχει περίοδο 2π και όλη η δυναμική εμπεριέχεται στο διαδότη μίας περιόδου $\Phi(2\pi)$ που δίνεται από το χρονολογικά διατεταγμένο γινόμενο:

$$\Phi(2\pi) = \lim_{n\to\infty}\left(\exp(\mathbf{A}(n\tau)\tau)\exp(\mathbf{A}((n-1)\tau)\tau)\cdots\exp(\mathbf{A}(2\tau)\tau)\exp(\mathbf{A}(\tau)\tau)\right)$$

με $\tau = 2\pi/n$. Το γινόμενο αυτό είναι δύσκολο να υπολογισθεί επειδή τα διάφορα $\mathbf{A}(t)$ δεν αντιμετατίθενται (υπολογισμός τέτοιων γινομένων είναι δύσκολος, μπορεί να γίνει μόνο με διαταρακτικές μεθόδους ή να υπολογισθεί αριθμητικά). Παρόλα αυτά είναι δυνατόν να προκύψουν χρήσιμα συμπεράσματα για αυτό τον διαδότη χωρίς να τον υπολογίσουμε. Το κλειδί είναι στη παρατήρηση ότι ανά πάσα στιγμή το ίχνος του γεννήτορα της δυναμικής είναι μηδενικό, δηλαδή

$$\mathrm{trace}(\mathbf{A}(t)) = 0 \; ,$$

οπότε η ορίζουσα του διαδότη είναι μοναδιαία, δηλαδή:

$$\det(\Phi(t)) = \exp\left(\int_0^t \mathrm{trace}(\mathbf{A}(s))ds\right) = 1 \; ,$$

συνεπώς και $\det(\Phi(2\pi)) = 1$. Άρα, οι ιδιοτιμές του διαδότη μίας περιόδου $\Phi(2\pi)$, $\lambda(\alpha,\epsilon)$, ικανοποιούν το τριώνυμο:

$$\lambda^2 - \phi(\alpha,\epsilon)\lambda + 1 = 0 \; ,$$

όπου

$$\phi(\alpha,\epsilon) = \mathrm{trace}(\Phi(2\pi)) \; .$$

Επομένως, οι ιδιοτιμές έχουν γινόμενο 1 και είναι:

$$\lambda(\alpha,\epsilon) = \frac{\phi(\alpha,\epsilon)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\phi(\alpha,\epsilon)^2}{4} - 1\right)} \; .$$

Εάν το ίχνος του διαδότη είναι $|\phi(\alpha,\epsilon)| > 2$ τότε οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές και επειδή το γινόμενο τους είναι μονάδα μία εξ'αυτών θα είναι μεγαλύτερη του 1 και συνεπώς για αυτές τις τιμές των παραμέτρων α και ϵ ο ταλαντωτής είναι ασταθής και η $x(t)$ δεν είναι περιοδική συνάρτηση.

Εάν $|\phi(\alpha,\epsilon)| > 2$ τότε οι ιδιοτιμές είναι μιγαδικές, λ, λ^*, η μία συζυγής της άλλης, και το μέτρο των ιδιοτιμών είναι $|\lambda| = 1$. Για τις τιμές αυτές των παραμέτρων α και ϵ έχουμε ευστάθεια. Σε αυτή τη περίπτωση μόνο εάν η φάση της ιδιοτιμής είναι ρητό πολλαπλάσιο της περιόδου 2π έχουμε περιοδική κίνηση.

Το σύνορο μεταξύ ευστάθειας και αστάθειας προσδιορίζεται από τις τιμές των παραμέτρων α και ϵ για τις οποίες είναι $|\phi(\alpha,\epsilon)| = 2$. Εάν $\phi(\alpha,\epsilon) = 2$ τότε $\lambda = 1$ και η $x(t)$ είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π. Εάν $|\phi(\alpha,\epsilon)| = -2$ τότε $\lambda = -1$ και η $x(t)$ είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο 4π. Επομένως το σύνορο μεταξύ ευστάθειας και αστάθειας προσδιορίζεται από τη συνθήκη να υπάρχουν περιοδικές λύσεις με περίοδο 2π και 4π αντίστοιχα.

Θέλουμε τώρα να προσδιορίσουμε τις περιοχές ευστάθειας και αστάθειας στο επίπεδο (α,ϵ) . Προς τούτο είναι σημαντικό να παρατηρήσετε ότι ο διαδότης, $\Phi(2\pi)$, το ίχνος του, $\phi(\alpha,\epsilon)$, και συνεπώς οι ιδιοτιμές, $\lambda(\alpha,\epsilon)$, είναι συνεχείς συναρτήσεις των παραμέτρων α και ϵ. Θεωρήστε τώρα τον άξονα $\epsilon = 0$. Σε αυτή τη περίπτωση ο διαδότης είναι ο διαδότης ενός αρμονικού ταλαντωτή και είναι:

$$\Phi(2\pi) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\sqrt{\alpha}) & \sin(2\pi\sqrt{\alpha})/\sqrt{\alpha} \\ -\sqrt{\alpha}\sin(2\pi\sqrt{\alpha}) & \cos(2\pi\sqrt{\alpha}) \end{pmatrix} ,$$

με ίχνος

$$\phi(\alpha,0) = 2\cos(2\pi\sqrt{\alpha})$$

που είναι συνάρτηση μόνο της παραμέτρου α (δηλαδή του τετραγώνου της συχνότητας του ταλαντωτή). Για όλες τις τιμές του α το ίχνος είναι $|\phi(\alpha,0)| < 2$, οπότε ο ταλαντωτής είναι ευσταθής, εκτός από τις τιμές

$$\alpha = \frac{n^2}{4} \ , \ \ n = 0,1,2,\cdots \tag{2}$$

για τις οποίες το ίχνος ισούται με ± 2. Αυτά τα σημεία ανήκουν στο σύνορο μεταξύ ευστάθειας και αστάθειας. Λόγω όμως της συνέχειας του ίχνους, άστάθεια για μικρά ϵ μπορεί να υπάρξει μόνο γύρω από τα σημεία $n^2/4$. Αποκαλύπτεται, δηλαδή, ότι οι ασταθείς περιοχές μοιάζουν με γλώσσες που συγκλίνουν σε αυτά τα σημεία. Οπότε η ανάλυση μας για το προσδιορισμό των ασταθών περιοχών μπορεί να επικεντρωθεί περί αυτά τα σημεία.

Ας προσδιορίσουμε διαταρακτικά τις διαχωριστικές καμπύλες μεταξύ ευστάθειας και αστάθειας όταν το $\epsilon << 1$. Οι οικογένειες των καμπυλών αυτών $\alpha(\epsilon)$ ικανοποιούν τη σχέση $|\phi(\alpha,\epsilon)| = 2$ και σε αυτές που έχουν ως σημείο τους το $\alpha(0) = n^2/4$ με n άρτιο προκύπτουν περιοδικές λύσεις με ελάχιστη περίοδο 2π ενώ σε αυτές με n περιττό προκύπτουν περιοδικές λύσεις με ελάχιστη περίοδο 4π. Θεωρούμε ότι το $\alpha(\epsilon)$ έχει ανάπτυγμα περί το $\epsilon = 0$ της μορφής:

$$\alpha(\epsilon) = \alpha_0 + \epsilon\alpha_1 + \cdots$$

όπου το α_0 για κάθε οικογένεια ικανοποιεί την (2). Οι συντελεστές a_n προσδιορίζουν τις διαχωριστικές καμπύλες. Για να προσδιορίσουμε τους συντελεστές απαιτούμε να υπάρχουν περιοδικές λύσεις της μορφής:

$$x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \cdots$$

Εισάγοντας το ανάπτυγμα αυτό στην (1) προκύπτει ότι πρέπει να ικανοποιούνται οι

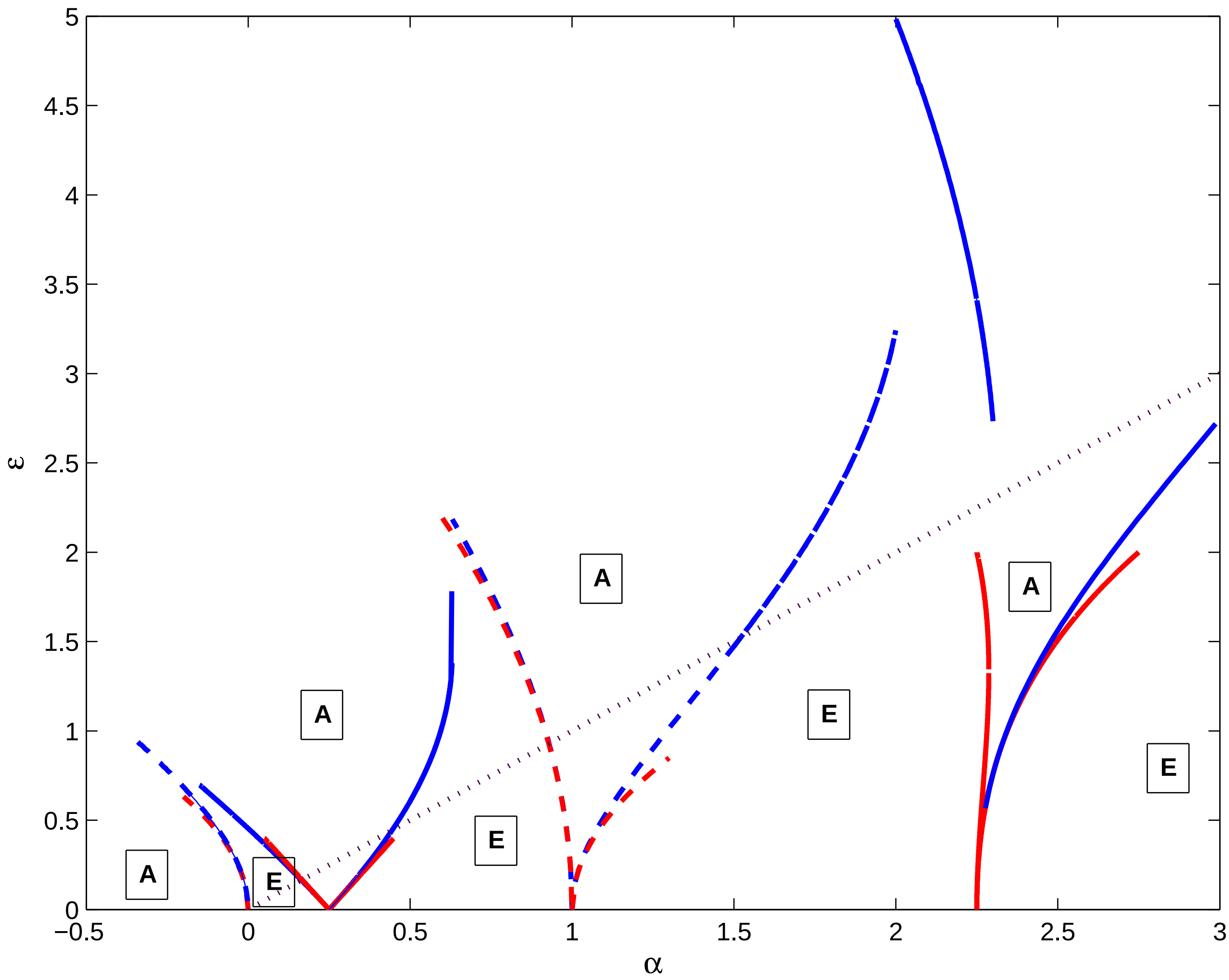
$$\ddot{x}_0 + \alpha_0 x_0 = 0 \, , \tag{3}$$
$$\ddot{x}_1 + \alpha_0 x_1 = -(\alpha_1 + \cos t)x_0 \, , \tag{4}$$
$$\ddot{x}_2 + \alpha_0 x_2 = -x_0\alpha_2 - (\alpha_1 + \cos t)x_1 \, , \tag{5}$$

κ.ο.κ., με κάθε $x_n(t)$ περιοδική συνάρτηση. Τι απαιτείται για τη περίοδο των $x_n(t)$;

1. Ας θεωρήσουμε πρώτα τη περίπτωση $n = 0$.

   Σε αυτή τη περίπτωση η $x(t)$ έχει ελάχιστη περίοδο 2π και $\alpha_0 = 0$. Η (3) εχει τη τετριμμένη περιοδική λύση $x_0(t) = k_0$, όπου k_0 κάποια σταθερά. Επομένως η πρώτης τάξης εξίσωση διορθωσης της τροχιάς, εξίσωση (4), λαμβάνει τη μορφή:

   $$\ddot{x}_1 = -(\alpha_1 + \cos t)k_0 \, ,$$



Σχήμα 1: Οι πρώτες περιοχές ευστάθειας (Ε) και αστάθειας (Α) στον ταλαντωτή Mathieu στο επίπεδο (α, ϵ). Οι ασταθείς γλώσσες τέμνουν τον άξονα $\epsilon = 0$ στα σημεία $\alpha = n^2/4$. Παρουσιάζονται οι ασταθείς περιοχές για $n = 0, 1, 2, 3$. Οι μπλε γραμμές είναι οι διαχωριστικές γραμμές μεταξύ ευστάθειας και αστάθειας, ενώ οι κόκκινες σημειώνουν τις διαχωριστικές γραμμές που προκύπτουν με τη διαταρακτική ανάλυση αυτού του σημειώματος. Διακεκομένες είναι οι διαχωριστικές γραμμές επί των οποίων η κίνηση έχει ελάχιστη περίοδο 2π, ενώ επί των συνεχών διαχωριστικών γραμμών η κίνηση είναι περιοδική με ελάχιστη περίοδο 4π. Η καμπύλες αστάθειας είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $\epsilon = 0$. Η διάστικτη μαύρη γραμμή $\alpha = \epsilon$ διαχωρίζει το χώρο στις περιπτώσεις που αν πάσα στιγμή η σταθερά του ελατηρίου, $\alpha + \epsilon \cos t$, είναι θετική, δηλαδή όταν $\alpha > \epsilon$, και στη περιοχή του χώρου όπου η σταθερά του ελατηρίου γίνεται και αρνητική.

η οποία επιδέχεται περιοδική λύση μόνο άν $\alpha_1 = 0$, και η πρώτης τάξης διόρθωση της τροχιάς είναι:

$$x_1(t) = k_0 \cos t + k_1 \ ,$$

όπου όπου k_1 μία άλλη σταθερά. Έτσι η εξίσωση δεύτερης διόρθωσης (5) γίνεται:

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_2 &= -k_0\alpha_2 - \cos t(k_0 \cos t + k_1) \\
&= -k_0\alpha_2 - k_1 \cos t - k_0 \cos^2 t \\
&= -k_0\alpha_2 - \frac{k_0}{2} - k_1 \cos t - \frac{k_0}{2} \cos 2t \ ,
\end{aligned}$$

η οποία επιδέχεται περιοδική λύση μόνο αν $k_0(\alpha_2 + 1/2) = 0$, που προσδιορίζει τη δεύτερη διόρθωση $\alpha_2 = -1/2$. Συνεπώς η διαχωριστική καμπύλη σε δεύτερης τάξης διόρθωση μεταξύ ευστάθειας και αστάθειας για $\epsilon << 1$ στη περιοχή κοντά στο $\alpha = 0$ είναι:

$$\alpha(\epsilon) \approx -\frac{\epsilon^2}{2} \ . \qquad (6)$$

2. Η περίπτωση $n = 1$. Στη περίπτωση αυτή θέλουμε να προσδιορίσουμε $x(t)$ με ελάχιστη περίοδο 4π και $\alpha_0 = 1/4$. Ακολουθώντας τα ίδια βήματα βρίσκουμε ότι

   $$x_0(t) = k_0 \cos(t/2) + m_0 \sin(t/2) \ ,$$

   και η η εξίσωση πρώτης διόρθωσης (4) γίνεται:

   $$\ddot{x}_1 + \frac{1}{4}x_1 = -k_0 \left(\alpha_1 + \frac{1}{2}\right) \cos\frac{t}{2} - m_0 \left(\alpha_1 - \frac{1}{2}\right) \sin\frac{t}{2} - \frac{k_0}{2} \cos\frac{3t}{2} - \frac{m_0}{2} \sin\frac{3t}{2} \ .$$

   Για να υπάρχει περιοδική λύση περιόδου πρέπει ή $k_0 = 0$ και $\alpha_1 = 1/2$ ή $m_0 = 0$ και $\alpha = -1/2$ (γιατί;). Συνεπώς η διαχωριστική γραμμμή είναι

   $$\alpha(\epsilon) \approx \frac{1}{4} \pm \frac{\epsilon}{2} \ . \qquad (7)$$

   Παρατηρείτε ότι σχηματίζεται μία σφήνα αστάθειας πάνω καί κάτω από τη συχνότητα $1/4$.

3. Η περίπτωση $n = 2$.

   Δείξτε ότι στη περίπτωση αυτή οι διαχωριστικές γραμμές είναι κατά προσέγγιση:

   $$\alpha(\epsilon) \approx 1 - \frac{\epsilon^2}{12} \ , \alpha(\epsilon) \approx 1 + \frac{5\epsilon^2}{12}. \qquad (8)$$

4. Η περίπτωση $n = 3$.

   Δείξτε ότι σε αυτή τη περίπτωση οι διαχωριστικές γραμμές είναι:

   $$\alpha(\epsilon) \approx \frac{9}{4} + \frac{\epsilon^2}{16} \pm \frac{\epsilon^3}{32} \ . \qquad (9)$$

Οι γλώσσες (που ονομάζονται και γλώσσες του Arnold) για $n \geq 3$ εφάπτονται η μία στην άλλη δημιουργόντας έτσι μία πολλή στενή περιοχή αστάθειας. (Η συγκεκριμένη μορφή των γλωσσών εξαρτάται από τη μορφή της περιοδικής συνάρτησης βλ. το απλό και ιδιαιτέρως διδακτικό παράδειγμα στο βιβλίο του Arnold σελ. 205). Με την συνημιτονοειδή μεταβολή της συχνότητας μόνο όταν η συχνότητα της μεταβολής είναι διπλάσια της συχνότητα του ταλαντωτή οι ασταθείς γλώσσες σχηματίζουν σφήνα μη μηδενικής γωνίας. Πειραματικά σε αυτή τη συχνότητα η αστάθεια εκδηλώνεται πιο ισχυρά και είναι πιο εύκολα παρατηρήσιμη (βλ. πειραματικό άρθρο που έβαλα στην ιστοσελίδα).

Ο ακριβής προσδιορισμός των διαχωριστικών γραμμών είναι τεχνικά δύσκολος. Μπορεί κανένας από σας να καταφέρει να τις προσδιορίσει;