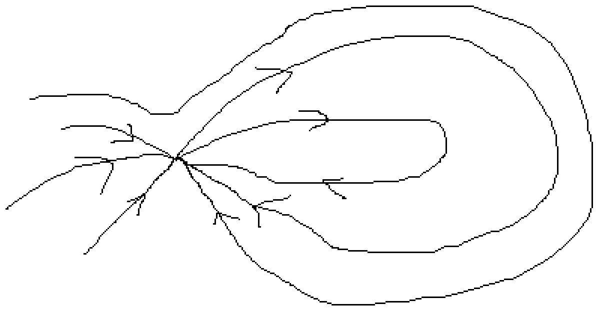


Σχήμα 1: Το σημείο ισορροπίας του σχήματος δεν είναι ευσταθές κατά Lyapunov παρόλο ότι όλες οι τροχιές καταλήγουν τελικά σε αυτό μετά την πάροδο αρκετού χρόνου.

Σημειώσεις μη γραμμικής δυναμικής

Σημεία ισορροπίας και η έννοια της ευστάθειας τροχιών.

Για ένα γενικό αυτόνομο δυναμικό σύστημα $\dot{x} = f(x)$ με $x \in \mathbb{R}^n$ τα σημεία x_e που μηδενίζουν την $f(x_e) = 0$ λέγονται σημεία ισορροπίας. Πράγματι αν αρχικά $x = x_e$ την χρονική στιγμή $t = 0$ τό σύστημα θα παραμείνει στο σημείο αυτό, διότι η τετριμμένη τροχιά $x(t) = x_e$ για $t > 0$ ικανοποιεί τις δυναμικές εξισώσεις και τις αρχικές συνθήκες και από την μοναδικότητα των λύσεων του δυναμικού συστήματος η τροχιά αυτή είναι η μόνη δυνατή τροχιά του δυναμικού συστήματος.

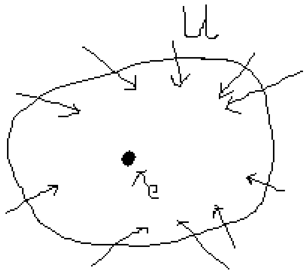
Ενδιαφέρει αν το σημείο είναι ευσταθές ή όχι. Το σημείο ισορροπίας θα θεωρείται ευσταθές αν στιγμιαία διαταράξουμε το σύστημα από το σημείο ισορροπίας, το σύστημα δεν απομακρυνεται από το σημείο ισορροπίας. Προσέξτε ότι η διαταραχή που διενεργείται είναι στιγμίαια και δεν είναι συνεχής. Το σύστημα θα λέγεται ασταθές όταν δεν είναι ευσταθές.

Επίσης είναι εμφανές ότι μπορεί να υπάρξουν διαφορετικοί ορισμοί της ευστάθειας. Στον πρόχειρο και διαισθητικό ορισμό που δώσαμε δεν διευκρινήσαμε αν το σύστημα τελικά, $t \to \infty$, συγκλίνει στο σημείο ισορροπίας, $x(t) \to x_e$. Επίσης δεν προσδιορίσαμε αν η τροχιά πρέπει να βρίσκεται πλησίον του σημείου ισορροπίας για όλους τους χρόνους. Για να γίνουμε σαφέστεροι ορίζουμε με προσοχή μερικές έννοιες ευστάθειας που είναι χρήσιμες.

Πριν όμως ορίσουμε την έννοια της ευστάθειας προϋποτίθεται ότι οι φυσικές καταστάσεις x του δυναμικού μας συστήματος έχουν εφοδιασθεί με την έννοια της απόστασης, δηλαδή του μέτρου. Έχοντας ορίσει το μέτρο $|x|$ μπορεί να προχωρήσουμε με ορισμούς της ευστάθειας. Εμείς θα υποθέτουμε ότι η μετρική μας είναι η κλασική ευκλείδια μετρική σύμφωνα με την οποία $|x|^2 = \sum_i^n x_i^2$, όπου x_i οι συντεταγμένες του x.

Ευστάθεια κατά Lyapunov. Το σημείο ισορροπίας x_e είναι ευσταθές κατά Lyapunov (ή απλώς ευσταθές) αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta(\epsilon)$ τέτοιο ώστε αν αρχικά $|x(0) - x_e| < \delta(\epsilon)$ η τροχιά ικανοποιεί $|x(t) - x_e| < \epsilon$ για όλους τους χρόνους $t > 0$.

Ασυμπτωτική ευστάθεια. Το σημείο ισορροπίας x_e είναι ασυμπτωτικά ευσταθές εάν είναι ευσταθές κατά Lyapunov και επιπλέον υπάρχει κάποια σταθερά β τέτοια ώστε αν αρχικά $|x(0) - x_e| < \beta$



Σχήμα 2: Το σημείο ισορροπίας x_e είναι ευσταθές όταν για κάθε περιοχή U του σημείου ισορροπίας το διάνυσμα της ταχύτητας $\dot{x}$ στρέφεται στο εσωτερικό του U.

τότε η τροχιά συγκλίνει στο σημείο ισορροπίας: $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_e$.

Παράδειγμα δυναμικού συστήματος που έχει σημείο ισορροπίας που είναι ευσταθές κατά Lyapunov είναι ο αρμονικός ταλαντωτής $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -\omega^2 x_1$. Το $x_e = 0$ είναι σημείο ισορροπίας και οι τροχιές είναι περιοδικές και δίδονται από τις καμπύλες $x_2^2 + \omega^2 x_1^2 =$ σταθερά. Εάν $\omega < 1$ Τότε αν αν επιλέξουμε $|x(0)| < \delta(\epsilon) = \epsilon\omega$ τότε $x(t) < \epsilon$ για όλους τους χρόνους. Το σύστημα αυτό είναι ευσταθές κατά Lyapunov αλλά δεν είναι όμως ασυμπτωτικά ευσταθές.

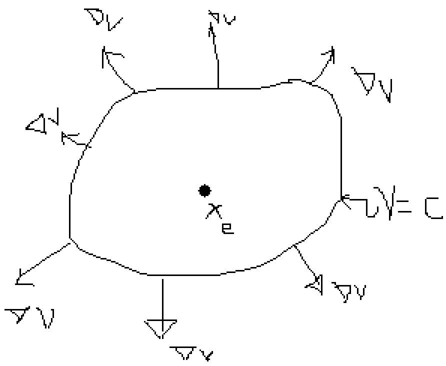
Στο ορισμό της ασυμπτωτικής ευστάθειας απαιτήθηκε πρώτα η ευστάθεια κατά Lyapunov. Θα νόμιζε κανείς ότι η ευστάθεια κατά Lyapunov επιβάλλεται όταν έχει απαιτηθεί η σύγκλιση της τροχιάς στο σημείο ισορροπίας. Αυτό όμως δεν ισχύει. Μπορεί να κατασκευάσει κανείς δυναμικά συστήματα που έχουν σημεία ισορροπίας τα οποία είναι ασταθή κατά Lyapunov, δηλαδή έχουν τροχιές που απομακρύνονται από το σημείο ισορροπίας, αλλά τελικά όλες οι τροχιές που αρχίζουν στην περιοχή του σημείο ισορροπίας συγκλίνουν τελικά σε αυτό (βλ. Σχ. 1). Τα συστήματα αυτά λέγονται οιωνεί ασυμπτωτικά ευσταθή (quasi-asymptotic stability). Προφανώς η ασυμπτωτική ευστάθεια προκύπτει όταν έχουμε ευστάθεια κατα Lyapunov και οιωνεί ασυμπτωτική ευστάθεια.

Το πρώτο και δεύτερο Θεώρημα του Lyapunov για την ευστάθεια σημείου ισορροπίας.

Η ευστάθεια μπορεί να κριθεί αναλύοντας το γραμμικό δυναμικό σύστημα που προκύπτει γραμμικοποιόντας περί το σημείο ισορροπίας. Αν το σημείο αυτό είναι υπερβολικό τότε η γραμμική ανάλυση περιγράφει τουλάχιστον στην περιοχή του σημείου ισορροπίας το είδος ευστάθειας του πλήρους μη γραμμικού συστήματος. Αν το σημείο είναι ελλειπτικό τότε η γραμμική ανάλυση δεν περιγράφει την ευστάθεια του σημείου και απαιτείται ανάλυση του μη γραμμικού συστήματος.

Για την ανάλυση της ευστάθειας γενικών μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων υπάρχουν μόνο τα θεωρήματα του Lyapunov. Η ιδέα του θεωρήματος είναι ως εξής. Το σημείο x_e είναι ευσταθές αν οποτεδήποτε επιλέγουμε μία περιοχή του U, τότε οι τροχιές που αρχίζουν στο U τον χρόνο $t = 0$ παραμένουν στο U για όλους τους χρόνους $t > 0$. Αυτό θα μπορούσε να αποδειχθεί αν το διάνυσμα της ταχύτητας $\dot{x}$ (βλ. Σχ. 2 όπου παρουσιάζεται η κατάσταση σε ένα δυναμικό σύστημα στο επίπεδο) εφάπτεται του συνόρου ή στρέφεται προς το εσωτερικό του U. Για να το βεβαιώσει αυτό ο Lyapunov κατασκευάζει μία συνάρτηση $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $V(x_e) = 0$ και $V(x) > 0$ (βλ. 3) αλλού, τότε αν

$$\nabla V \cdot \dot{x} \le 0$$



Σχήμα 3: οι ισοϋψεις της V κοντα στο σημείο ισορροπίας x_e είναι τέτοιες ώστε η βαθμίδα ∇V να στρέφεται προς τα έξω.

που σημαίνει ότι

$$\frac{dV}{dt} \leq 0 \, .$$

οι ισοϋψεις της V είναι τα κατάλληλα χωρία U με την ιδιότητα η ροή να στρεφεται στο εσωτερικό τους και αποδεικνύεται η ευστάθεια του σημείου ισορροπίας.

Το θεώρημα απαράλλαχτο και χωρίς καμμία τεχνική δυσκολία ισχύει και για συστήματα απείρων βαθμών ελευθερίας. Επειδή αυτό έχει σημασία στη φυσική θα παρουσιάσουμε το θεώρημα σε πλήρη γενικότητα.

΄Εστω το απείρων βαθμών ελευθερίας δυναμικό σύστημα $\dot{x} = f(x)$ με σημείο ισορροπίας το $x = 0$. Η συνάρτηση $V(x)$ που λαμβάνει πραγματικές τιμές και ικανοποιεί σε ένα ανοικτό σύνολο Δ εντός του οποίου παραμένουν πάντα οι τροχιές τις παρακάτω συνθήκες ονομάζεται συνάρτηση Lyapunov:

1. η $V(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση,

2. η $V(x)$ είναι κλειστή συνάρτηση [1],

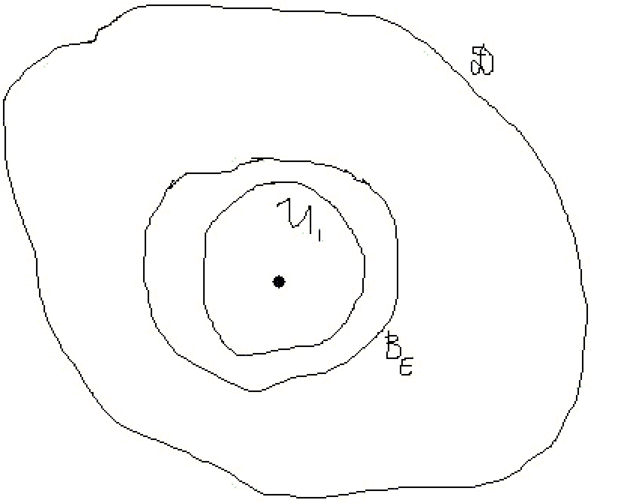
3. η $V(x)$ είναι θετική συνάρτηση που ικανοποιεί $V(0) = 0$ και $V(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta - 0$,

4. Επί κάθε τροχιάς του δυναμικού συστήματος $x(t)$ που αρχίζει από κάποιο αρχικό σημείο του Δ η $V(x(t))$ είναι φθίνουσα ισχύει δηλαδή: $V(x(t)) \leqq V(x(t_0))$ για κάθε $t \geqq t_0$.

Παρατήρηση: Δεν είναι αναγκαίο η $V(x)$ να είναι παραγωγίσιμη, απλώς συνεχής. Εάν ως συνήθως η $V(x)$ είναι παραγωγίσιμη τότε η τελευταία συνθήκη μπορεί να αντικατασταθεί με την $dV/dt < 0$ επί κάθε τροχιάς του συστήματος. Η απαίτηση το ανοικτό σύνολο Δ να είναι παγιδευτικό (trapping) δηλαδή οι τροχιές που αρχίζουν σε αυτό να μην φεύγουν από αυτό είναι σημαντική, όπως θα δούμε, για την ανάλυση χαμιλτονιανών συστημάτων.

Αεγ μπορούμε να παρουσιάσουμε το θεώρημα σε μία διάσταση, η απόδειξη γενικεύεται σε περισσότερες διαστάσεις με μόνο ασήμαντες λεκτικές παραλλαγές.

[1]Η κλειστότητα της $V(x)$ απαιτείται επειδή σε άπειρες διαστάσεις δεν είναι αναγκαίο μία συνεχής συνάρτηση να είναι και κλειστή. Για συνηθισμένα δυναμικά συστήματα σε πεπερασμένες διαστάσεις η συνθήκη αυτή είναι περιττή διότι η συνέχεια συνεπάγεται και τη κλειστότητα. Μία συνάρτηση $V(x)$, $V : F \rightarrow G$ ονομάζεται κλειστη αν για κάθε κλειστό υποσύνολο A του F το είδωλο του υποσυνόλου $V(A)$ είναι κλειστό υποσύνολο του G.



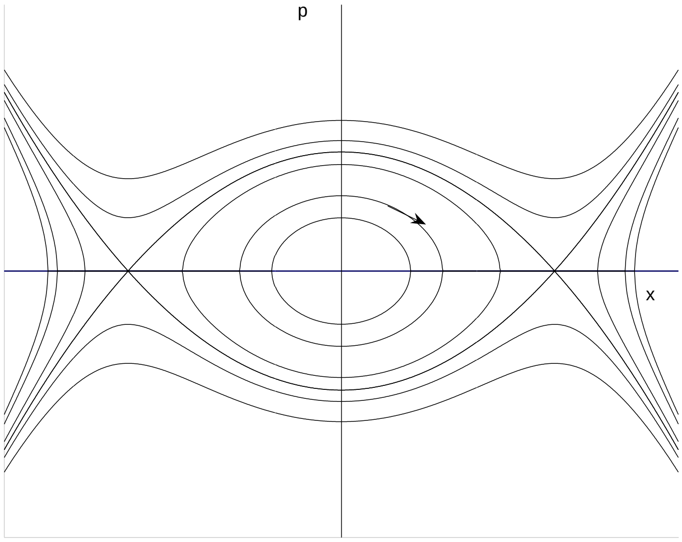
Σχήμα 4: Το ανοικτό σύνολο Δ στο οποίο ορίζεται η $V(x)$ και $B_\epsilon = \{x||x| \leq \epsilon\}$ είναι το κλειστό χωρίο και στο σύνορο η συνάρτηση $V(x)$ λαμβάνη την ελάχιστη θετική τιμή V_m. Ορίζουμε στη συνέχεια το σύνολο των σημείων $U = \{x \in B_\epsilon \mid V(x) < V_0\}$ για τα οποία η $V(x)$ λαμβάνει τιμές μικρότερες από το $V_0 > 0$ που είναι κάποιος αριθμός μικρότερος από τον V_m και στο σχήμα σχεδιάζουμε το $U_1 = U \bigcap B_\epsilon$ στο οποίο βρίσκεται και το σημείο ισορροπίας. Αποδεικνύεται στη συνέχεια ότι αν μία τροχιά ξεκινίσει από κάποιο σημείο $x_0 \in U_1$ τότε $x(t) \in B_\epsilon$. Επειδή το ϵ ήταν αυθαίρετο αποδεικνύεται έτσι η ευστάθεια του σημείου ισορροπίας.

Πρώτο Θεώρημα Lyapunov: Το $x = 0$ είναι ευσταθές αν υπάρχει συνάρτηση Lyapunov V.

Απόδειξη: Θεωρήστε την κλειστή περιοχή $B_\epsilon = \{x \mid |x| \leq \epsilon\}$ B_ϵ του σημείου ισορροπίας η οποία εμπεριέχεται εξ'ολοκλήρου στο σύνολο Δ, και έστω V_m η ελάχιστη τιμή που λαμβάνει η συνάρτηση $V(x)$ στο σύνορο του B_ϵ. Το σύνορο του B_ϵ αποτελείται από τα σημεία που απέχουν από το σημείο ισορροπίας ακριβώς κατά ϵ και είναι συμπαγές σύνολο και επειδή η V είναι συνεχής συνάρτηση τότε το ελάχιστο της V, V_m, επί του συνόρου υπάρχει και πραγματοποιείται για κάποιο σημείο του συνόρου. Επειδή το V_m είναι θετικός αριθμός, υπάρχει μικρότερος θετικός αριθμός V_0 τέτοιος ώστε $0 < V_0 < V_m$. Θεωρούμε το σύνολο των τιμών $U = \{x \in B_\epsilon \mid V(x) < V_0\}$. Τότε είναι $0 \in U$ επειδή $V(0) = 0 < V_0$ καθώς και μία ανοικτή περιοχή περί το $x = 0$ πρέπει και αυτή να ανήκει στο U (επειδή η συνάρτηση V είναι συνεχής, προσέξτε το U μπορεί να έχει τμήματα που να είναι έξω από το B_ϵ). Το τμήμα του U που βρίσκεται εντός του B_ϵ το καλούμε U_1 και κανένα σημείο του U_1 δεν ανήκει στο σύνορο του B_ϵ (διότι στο σύνορο η συνάρτηση V λαμβάνει τιμές μεγαλύτερες ή ίσες του V_m. Τότε όλες οι λύσεις που αρχίζούν με αρχικές τιμές $x(0) \in U_1 - 0$ δεν μπορούν να διαφύγουν από το B_ϵ διότι λόγω της συνθήκης 4 οι θα είναι $V(x(t)) < V(x(0))$ οπότε και για όλους τους χρόνους $x(t) \in B_\epsilon$. Αυτό αποδεικνύει την ευστάθεια κατα Lyapunov του σημείου ισορροπίας.

Δεύτερο Θεώρημα Lyapunov: Το $x = 0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν η συνάρτηση Lyapunov V είναι γνησίως φθίνουσα, ισχύει δηλαδή: $V(x(t)) \leq V(x(t_0))$ για κάθε $t > t_0$.

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι αναγκαστικά $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ αν αρχικά $x(0) \in \Delta$. Θεωρήστε τώρα τη τροχιά $x(t)$ κάποιου αρχικού σημείου που είναι στο U_1 και παραμένει ως δείξαμε για όλους τους χρόνους στο B_ϵ. Το απειροσύνολο των τιμών της τροχιάς θα έχει κάποιο ορικό σημείο (θεώρημα Bolzano-Weierstrass), και έστω αυτό ότι είναι το $x_*(0)$, οπότε υπάρχει μία ακολουθία χρονικών στιγμών t_n για τις οποίες η ακολουθία $x(t_n) \to x_*(0)$ και επειδή η ακολουθία των τιμών της V είναι γνησίως φθίνουσα θα είναι $V(x(t_n)) > V(x_*(0))$. Θα δείξουμε ότι $V(x_*(0)) = 0$ και συνεπώς $x_*(0) = 0$. Έστω ότι $V(x_*(0)) = \alpha > 0$ και $x_*(0) \neq 0$ δεν είναι το σημείο ισορροπίας, τότε η τροχιά που εκκινεί από αυτό το σημείο, η $x_*(t)$, θα ικανοποιεί την ανισότητα $V(x_*(t)) < \alpha$. Επειδή όμως οι λύσεις διαφορικών



Σχήμα 5: Οι ισοϋψείς της Χαμιλτονιανής για την εξίσωση Duffing με $\alpha = -.1$. Τα σημεία $(0,0)$ και $(\pm\sqrt{10}, 0)$ είναι σημεία ισορροπίας. Η ισοϋψης με $H = 2.5$ περνά από τα σημεία ισορροπίας $(\pm\sqrt{10}, 0)$. Στο ανοικτό σύνολο $H < 2.5$ που είναι συνεκτικό με το $(0,0)$ η H ορίζει μία συνάρτηση Lyapunov, και συνεπώς το $(0,0)$ είναι ευσταθές κατά Lyapunov (γιατί δεν μπορεί να επεκταθεί η ευσταθής περιοχή;). Οι τροχιές μόνο στην περιοχή αυτή είναι περιοδικές. Για $\alpha > 0$ όλες οι τροχιές είναι περιοδικές και το $(0,0)$ είναι το μόνο σημείο ισορροπίας το οποίο είναι ευσταθές σε όλο το $\mathbb{R}^2$.

εξισώσεων είναι συνεχείς συναρτήσεις των αρχικών τιμών τους, αν λάβουμε ως αρχική συνθήκη την $y(0)$ αρκούντως πλησίον της $x_*(0)$ τότε θα ισχύει και για αυτή την τροχιά η ανισότητα $V(y(t)) < \alpha$. Καταλήγουμε σε άτοπο επιλέγοντας για αρχική τιμή κάποιο $y(0) = x(t_n)$ διότι τότε επί μία τροχιάς που ήταν $V(x(t)) > \alpha$ για $t > t_n$ αποδεικνύεται ότι πρέπει να είναι και $V(x(t)) < \alpha$ για $t > t_n$, ό.ά.

Παραδείγματα κατασκευής συναρτήσεων Lyapunov

1. Στο κλιματικό παράδειγμα αν επιλέξουμε $V(T) = V(T) - V(T_1)$, η $V()$ είναι συνάρτηση Lyapunov για πρώτο σημείο ισορροπίας T_1 και το διάστημα $\Delta = (0, T_2)$. Το $\Delta = (0, T_2)$ είναι και η λεκάνη έλξεως του σημείου ισορροπίας T_1.

2. Σε κάθε χαμιλτονιανό σύστημα που έχει χρονοανεξάρτητη Χαμιλτονιανή $H(q,p)$ και ικανοποιεί τις εξισώσεις του Χάμιλτον
$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \ , \ \ \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \ ,$$
η χαμιλτονιανή συνάρτηση μπορεί να χρησιμεύσει ως συνάρτηση Lyapunov. Διότι πάντοτε
$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i \\ &= \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ &= 0 \end{aligned}$$
και εάν συμβαίνει να υπάρχει ανοικτή περιοχή του χώρου των φάσεων στον οποίο η χαμιλτονιανή συνάρτηση είναι θετική, $H(q,p) > 0$ για $(q,p) \neq (0,0)$ (έστω $(0,0)$ το σημείο ισορροπίας), το σημείο ισορροπίας $(0,0)$ στο οποίο αντιστοιχεί θα είναι ευσταθές κατά Lyapunov. Ας θεωρήσουμε ως παράδειγμα την εξίσωση Duffing:
$$\ddot{x} + x + \alpha x^3 = 0 \ ,$$

Η εξίσωση αυτή περιγράφει έναν ταλαντωτή στον οποίο η δύναμη επαναφοράς δεν είναι γραμμική, αν $\alpha > 0$ το ελατήριο γίνεται σκληρότερο όταν επιμηκύνεται. Το σύστημα αυτό είναι χαμιλτονιανό, διότι γράφεται ισοδυνάμως ως το σύστημα των πρωτοβαθμίων εξισώσεων:

$$\dot{x} = p \ , \ \dot{p} = -x - \alpha x^3 \ ,$$

που παράγεται από τη χαμιλτονιανή συνάρτηση:

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \alpha \frac{x^4}{4} \ .$$

και αποτελεί συνάρτηση Lyapunov του σημείου ισορροπίας $(0,0)$ η οποία ορίζεται σε όλο το επίπεδο όταν $\alpha \geq 0$ (σε αυτή τη περίπτωση έχουμε μόνο περιοδικές τροχιές), ενώ όταν $\alpha > 0$ το πεδίο ορισμού της συνάρτησης Lyapunov και συνεπώς η περιοχή ευστάθεοας εκτείνεται μέχρι την ισοενεργειακή επιφάνεια $H = 1/(4|\alpha|)$ (βλ. Σχ. 5). Συνεπώς το $(0,0)$ είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας.

3. Θεωρήστε το γραμμικό δυναμικό σύστημα

$$\dot{x} = \mathbf{A}x$$

όπου $\mathbf{A}$ ένας πίνακας $n \times n$. Θέλουμε να δείξουμε κατασκευάζοντας μία κατάλληλη συνάρτηση Lyapunov ότι αν όλες οι ιδιοτιμές έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος τότε το 0 είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας. Προς τούτο θεωρούμε δύο βάσεις ιδιοδιανυσμάτων. Τα ιδιοδιανύσματα u_i του πίνακα $\mathbf{A}$ που ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\mathbf{A}u_i = \lambda^{(i)} u_i$$

και τα ιδιοδιανύσματα v_i του συζυγούς πίνακα[2] με ιδιοτιμές τις συζυγείς ιδιοτιμές που ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\mathbf{A}^\dagger v_i = \lambda^{(i)*} v_i \ .$$

΄Οταν ο πίνακας $\mathbf{A}$ δεν αντιμετατίθεται με τον $\mathbf{A}^\dagger$ οι δύο αυτές βάσεις είναι διαφορετικές και είναι ορθογώνιες μεταξύ τους υπό την έννοια:

$$< v_i, u_j >= \delta_{ij} \ ,$$

οπότε το x αναλύεται στη βάση u_i ως εξης:

$$x = \sum_{i=1}^{n} < v_i, x > u_i \ .$$

Θεωρούμε την εξής συνάρτηση Lyapunov

$$V(x) = \sum_{i}^{n} \beta_i < v_i, x >< x, v_i >$$

όπου $\beta_i > 0$ είναι τυχαίοι θετικοί αριθμοί. Θα δείξουμε ότι για κάθε επιλογή των β_i η συνάρτηση V ικανοποιεί τα θεωρήματα ευστάθειας του Lyapunov υπό την προϋπόθεση ότι το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών, $\Re(\lambda)$, είναι αρνητικό. Πράγματι όταν $x = 0$ είναι $V = 0$ και είναι $V(x) > 0$

[2] ΄Εχοντας ορίσει το εσωτερικό γινόμενο $< \cdot, \cdot >$ ο συζυγής πίνακας ορίζεται από τη σχέση:

$$< x, \mathbf{A}y >=< \mathbf{A}^\dagger x, y > \ .$$

΄Οταν το εσωτερικό γινόμενο είναι το ευκλείδιο $< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i$, όπου $*$ συμβολίζει το μιγαδικό συζυγές, ο συζυγής πίνακας $\mathbf{A}^\dagger$ είναι ο ερμιτιανός ανάστροφος του $\mathbf{A}$ δηλαδή τα στοιχεία του συζυγούς είναι τα $\left(\mathbf{A}^\dagger\right)_{ij} = A_{ji}^*$.

για κάθε σε όλο το $x \in \mathbb{R}^n$. Οπότε ικανοποιούνται οι απαιτήσεις α) και β). Μένει να αποδειχθεί ότι $dV/dt < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Πράγματι:

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= \sum_i^n \beta_i \left(\frac{d < v_i, x >}{dt} < x, v_i > + < v_i, x > \frac{d < x, v_i >}{dt} \right) \\
&= \sum_i^n \beta_i \left(< v_i, \mathbf{A}x >< x, v_i > + < v_i, x >< \mathbf{A}x, v_i > \right) \\
&= \sum_i^n \beta_i \left(\left\langle v_i, \mathbf{A} \sum_j < v_j, x > u_j \right\rangle < x, v_i > + < v_i, x > \left\langle \mathbf{A} \sum_j < v_j, x > u_j, v_i \right\rangle \right) \\
&= \sum_i^n \beta_i \left(\left\langle v_i, \sum_j \lambda^{(j)} < v_j, x > u_j \right\rangle < x, v_i > + < v_i, x > \left\langle \sum_j \lambda^{(j)} < v_j, x > u_j, v_i \right\rangle \right) \\
&= \sum_i^n \beta_i \left(\lambda^{(i)} < v_i, x >< x, v_i > + \lambda^{(i)*} < v_i, x >< x, v_i > \right) \\
&= \sum_i^n \beta_i (\lambda^{(i)} + \lambda^{(i)*}) | < v_i, x > |^2
\end{aligned}$$

το οποίο είναι αρνητικό εάν όλες οι ιδιοτιμές έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος:

$$\Re(\lambda^{(i)}) < 0 \; .$$

Πρόβλημα: Κατασκευάστε ένα γραμμικό δυναμικό σύστημα που διέπεται από ένα 2×2 πίνακα $\mathbf{A}$ (ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι ο γεννήτωρ της δυναμικής) που έχει ιδιοτιμές με αρνητικό πραγματικό μέρος και για τον οποίον η $V = x^\dagger x$ δεν είναι συνάρτηση Lyapunov. Μπορείτε να προσδιορίσετε συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί ο $\mathbf{A}$ ώστε η παραπάνω συνάρτηση να είναι συνάρτηση Lyapunov.

4. Θεωρήστε πάλι το γραμμικό σύστημα $\dot{x} = \mathbf{A}x$ και ακολουθώντας τον Lyapunov απαιτήστε η διγραμμική μορφή $V = x^\dagger \mathbf{M} x$ να είναι συνάρτηση Lyapunov του σημείου ισορροπίας $(0, 0)$ με πεδίο ορισμό όλο το $\mathbb{R}^n$. ΄Οταν μπορεί να κατασκευασθεί τέτοια συνάρτηση Lyapunov τότε το σημείο ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

   Η ύπαρξη τέτοιας συνάρτησης απαιτεί ότι ο $\mathbf{M}$, ο οποίος αεγ μπορεί να ληφθεί ως ένας συμμετρικός πίνακας, πρέπει να είναι ένας θετικός πίνακας, οπότε $V(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n - 0$. Επίσης θα πρέπει, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n - 0$, να ικανοποιείται η συνθήκη

$$\frac{dV}{dt} < 0 \; .$$

   Υπολογίζουμε ότι η dV/dt επί μίας τροχιάς είναι:

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= \frac{dx^\dagger}{dt} \mathbf{M} x + x^\dagger \mathbf{M} \frac{dx}{dt} \\
&= x^\dagger \left(\mathbf{A}^\dagger \mathbf{M} + \mathbf{M}\mathbf{A} \right) x \; ,
\end{aligned}$$

   οπότε η $dV/dt < 0$ διασφαλίζεται αν

$$\mathbf{A}^\dagger \mathbf{M} + \mathbf{M}\mathbf{A} = -\mathbf{Q}$$

   όπου $\mathbf{Q}$ κάποιος θετικός πίνακας. Η εξίσωση αυτή λέγεται εξίσωση Lyapunov. Το ερώτημα κατά πόσον είναι ευσταθές το σημείο ισορροπίας μετατρέπεται στο ερώτημα εάν μας δωθεί κάποιος θετικός πίνακας $\mathbf{Q}$, υπάρχει θετικός πίνακας $\mathbf{M}$ που να ικανοποιεί την εξίσωση Lyapunov ; Τυπικά το $\mathbf{M}$ που δίδεται από το ολοκλήρωμα :

$$\mathbf{M} = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^\dagger t} \mathbf{Q} e^{\mathbf{A}t} dt \ ,$$

λύνει την εξίσωση Lyapunov (ελέγξτέ το). Το ολοκλήρωμα αυτό αν υπάρχει ορίζει ένα θετικό πίνακα. Το ολοκλήρωμα όμως αυτό υπάρχει μόνο αν το πραγματικό μέρος όλων των ιδιοτιμών του $\mathbf{A}$ είναι αρνητικό. Καταλήγουμε και πάλι στο συμπέρασμα του προηγουμένου εδαφίου.