ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Εξετάσεις Ιουνίου 2005

Απεικονίσεις

Δίνεται ο δυναμικός νόμος:

$$x_{n+1} = r \sin \pi x_n \qquad ; \qquad x_n \in [0,1], \quad r \in [0,1]$$

(i) Βρείτε τα σταθερά σημεία και τους κύκλους περιόδου 2 της απεικόνισης και προσδιορίστε την ευστάθεια τους.

(ii) Μελετείστε διεξοδικά το διάγραμμα διακλαδώσεων διπλασιασμού περιόδου της απεικόνισης και προσδιορείστε αριθμητικά την τιμή r_c για την οποία πρωτοεμφανίζεται ο κύκλος 2^∞. Επίσης βρείτε αριθμητικά τις σταθερές Feigenbaum δ, a για το σύστημα αυτό. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο της ανακανονικοποίησης εκτιμείστε τις σταθερές αυτές αναλυτικά.

(iii) Για $r > r_c$ υπολογίστε τον εκθέτη Lyapunov της απεικόνισης συναρτήσει της παραμέτρου ελέγχου r. Δείξτε ότι από αυτό το διάγραμμα μπορούν να προσδιοριστούν τα περιοδικά παράθυρα της χαοτικής περιοχής.

(iv) Ορίζοντας την ποσότητα $\xi = |\frac{\Delta x_n}{\Delta x_0}|$ σχεδιάστε το μέγεθος $\ln \xi$ και το μέγεθος $\xi_q = \frac{\xi^{q-1}-1}{q-1}$ με $q \neq 1$ σαν συνάρτηση του χρόνου n για μιά συλλογή αρχικών συνθηκών στο διάστημα $[0,1]$. Επιλέξτε με βάση το προηγούμενο ερώτημα δύο τιμές του r: μιά τιμή r_1 για την οποία $\lambda(r_1) = 0$ καθώς και μιά τιμή r_2 με $\lambda(r_2) > 0$. Στον υπολογισμό σας χρησιμοποιείστε 10^5 αρχικές συνθήκες, $\Delta x_0 = 10^{-6}$ και διάφορες τιμές για τη παράμετρο q. Εξετάστε αν στη περίπτωση $r = r_1$ υπάρχει τιμή του q έτσι ώστε η συνάρτηση $\xi_q = h(n)$ να είναι γραμμική.

(v) Μπορούμε να υπολογίσουμε την εντροπία $S = -\sum_i p_i \ln p_i$ χωρίζοντας το διάστημα $[0,1]$ σε Ω ιστούς (υποδιαστήματα) και καθορίζοντας τη σχετική συχνότητα που μια τροχιά επισκέπτεται κάθε ιστό. Γράψτε ένα πρόγραμμα υπολογισμού του S και βρείτε τη συνάρτηση $S(r)$ για $r \geq r_c$. Για κάθε τιμή του r διαδόστε τις τροχιές έως ότου το S να μη μεταβάλλεται πλέον. Επιλέξτε βήμα $\Delta r = 0.01$.