Άσκηση 1 Σχεδιάστε με τη βοήθεια του υπολογιστή τα γραφήματα των:

$$xy = 1 \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 = 1 \tag{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{1}{2}xy - \frac{\sqrt{3}}{4}y^2 = 1 \tag{3}$$

Οι συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ της μορφής

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \tag{4}$$

με $a_{ij} \in \mathbb{R}$ για $i, j = 1, \ldots, n$ καλούνται τετραγωνικές μορφές. Με τη βοήθεια πινάκων μπορούν να γραφούν ως

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbb{A} \mathbf{x} \tag{5}$$

όπου με $\mathbf{x}$ συμβολίζουμε το διάνυσμα στήλη $\mathbf{x} \equiv (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ και $\mathbb{A}$ ένας συμμετρικός πραγματικός πίνακας, $\mathbb{A} = \mathbb{A}^{\mathrm{T}}$.

Γνωρίζουμε όμως ότι ένας συμμετρικός πίνακας μπορεί πάντοτε να διαγωνοποιηθεί και να γραφεί στη μορφή:

$$\mathbb{A} = \mathbb{U} \Delta \mathbb{U}^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

όπου Δ ο διαγώνιος πίνακας με τις ιδιοτιμές του $\mathbb{A}$ και $\mathbb{U}$ ο ορθογώνιος πίνακας ($\mathbb{U}^{\mathrm{T}}\mathbb{U} = \mathbb{U}\mathbb{U}^{\mathrm{T}} = \mathbb{1}$) με στήλες τα ιδιοανύσματα του $\mathbb{A}$ (κανονικοποιημένα ώστε να έχουν μοναδιαίο μέτρο).[1]

[1] Οι ορθογώνιοι πίνακες αποτελούν μετασχηματισμούς στροφής αφού διατηρούν τις αποστάσεις, δηλαδή τα εσωτερικά γινόμενα:

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \to (\mathbb{U}\mathbf{x})^{\mathrm{T}} (\mathbb{U}\mathbf{y}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbb{U}^{\mathrm{T}} \mathbb{U} \mathbf{y} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{y} \tag{7}$$

Άσκηση 2 Για τις τετραγωνικές μορφές (1) και (2) μπορούμε πολύ εύκολα να αναγνωρίσουμε ότι είναι υπερβολές. Αυτό όμως δεν ισχύει για την (3). Βρείτε τους πίνακες $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$ και $\mathbb{A}_3$ για τις (1), (2) και (3) και διαγωνιοποιείστε τους. Τι παρατηρείτε; Θα μπορούσατε από πριν σχεδιάσετε την (3) να αποφανθείτε ότι θα πρέπει να είναι υπερβολή;

Άσκηση 3 Οι υπερβολές (1), (2) και (3) είναι ουσιαστικά η ίδια υπερβολή στραμμένη υπό διαφορετική γωνία κάθε φορά. Ποιος είναι ο πίνακας στροφής που κάνει την (2) να συμπέσει με την (3); Σε τι γωνία αντιστοιχεί; Συσχετίζεται με κάποιον από τους $\mathbb{A}_2$ ή $\mathbb{A}_3$, και πώς;

Άσκηση 4 Έστω η τετραγωνική μορφή

$$7x^2 + 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - (14 + 6\sqrt{3})x - (26 + 6\sqrt{3})y - 16 = 0 \tag{8}$$

Γράψτε την με τη χρήση πινάκων. Αυτή δεν περιέχει μόνο τετραγωνικούς αλλά επιπλέον και γραμμικούς όρους. Θα είναι γενικά της μορφής:

$$\mathbf{x}^T \mathbb{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c = 0$$

Αναζητείστε μετασχηματισμό $\mathbf{x} \to \mathbf{y} = \mathbf{x}+\mathbf{d}$ ούτως ώστε η συνάρτηση να πάρει τη μορφή:

$$\mathbf{y}^T \mathbb{A}\mathbf{y} + c' = 0$$

Κάτω από ποιες προϋποθέσεις υπάρχει το διάνυσμα $\mathbf{d}$ που επιτυγχάνει το πιο πάνω και ποιο είναι αυτο; Τι εκφράζει ο μετασχηματισμός αυτός φυσικά; Τώρα μήπως είσαστε σε θέση να αναγνωρίσετε τι είδους κωνική τομή είναι η (8);