Απόδειξη Θεωρήματος Poincare-Bendixson

Το δυναμικό σύστημα είναι στο επίπεδο, προσδιορίζεται από το διάνυσματικό πεδίο ταχυτήτων $\vec{v}(x)$, και οι τροχιές ικανοποιούν την δυναμική:

$$\dot{x} = v(x) \ .$$

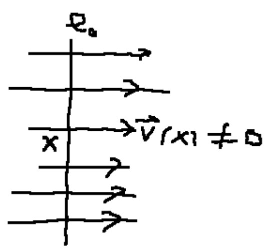
Η τροχιά του δυναμικού συστήματος με αρχική συνθήκη X γράφεται $\phi_t(X)$.

Ορισμός: Το Y είναι σημείο-ω της τροχιάς $\phi_t(X)$ εάν υπάρχει ακολουθία χρόνων $t_n \to \infty$ τέτοια ώστε $\lim_{t_n \to \infty} \phi_{t_n}(X) = Y$. Το σύνολο όλων των σημείων-ω κάποιου σημείου X ονομάζεται το ω-σύνολο του X.

Σχήμα 1: Το ω-σύνολο των σημείων εξωτερικά του 8 είναι όλο το 8, το ω-σύνολο των σημείων στο εσωτερικό του αριστερού λοβού είναι η αριστερή ομοκλινική τροχιά του σχήματος 8, και η δεξιά ομοκλινική τροχιά των σημείων του δεξιού λοβού. Εξαιρούνται τα σημεία ισοορροπίας των οποίων το ω-σύνολο είναι τα ίδια τα σημεία.

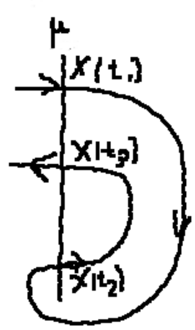
Παραδείγματα: εάν X_e είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας, τότε to X_e είναι σημείο-ω όλων των σημείων X που ανήκουν στο πεδίο έλξης του X_e. Κάθε σημείο ισορροπίας X_e είναι και σημείο-ω του X_e. Οι ευσταθείς οριακοί κύκλοι είναι σύνολο-ω των σημείων που ανήκουν στο πεδίο έλξης των.

Γενικά τα ω-σύνολα δεν είναι αναγκαστικά ούτε σημεία ισορροπίας ούτε περιοδικές τροχιές. Π.χ. το παράδειγμα του Σχήματος 1. Το δυναμικό αυτό σύστημα έχει τρία σημεία ισορροπίας: δύο ασταθείς σπείρες και ένα σάγμα (ή σαμάρι), ενώ όλο το 8 είναι το ω-σύνολο των τροχιών που βρίσκονται έξω από το 8, ο δεξιός λοβός του 8 είναι το ω-σύνολο των σημείων που βρίσκονται στο εσωτερικό του δεξιού λοβού (πλήν του σημείου ισορροπίας) και ομοίως ο αριστερός λοβός των σημείων που βρίσκονται στο αριστερό εσωτερικό.



Σχήμα 2: Η l_0 είναι διατέμνουσα της τροχιάς που διέρχεται από το x.

Σε τρείς διαστάσεις τα ω-σύνολα μπορούν να γίνουν παρα πολύ πολύπλοκα (γίνονται κλασματικά σύνολα). Στο επίπεδο όμως τα ω-σύνολα επιδέχονται ένα σχετικά εύκολο χαρακτηρισμό. Τα ω-σύνολα εκτός από σημεία ισορροπίας και οριακοί κύκλοι μπορεί να είναι και τροχιές που συνδέουν σημεία ισορροπίας (ομοκλινικές ή ετεροκλινικές τροχιές), όπως στο Σχήμα 1. Το θεώρημα Poincare-Bendixson δείχνει ότι όταν μία τροχιά ανήκει σε ένα συμπαγές σύνολο στο οποίο δεν υπάρχουν σημεία ισορροπίας τότε το ω-σύνολο της τροχιάς είναι οριακός κύκλος. Το θεώρημα αυτό ολοκληρώνει τον χαρακτηρισμό των τροχιών στο επίπεδο, και αποδεικνύει οτι δεν μπορεί να υπάρξει χάος στις δύο διαστάσεις.



Σχήμα 3: Η μ δεν είναι διατέμνουσα της τροχιάς.

Ορισμός: Διατέμνουσα (transversal) ορίζουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα το οποίο οι τροχιές το διασχίζουν σε όλα του τα σημεία με την ίδια φορά.

Στο σχήμα 2 η διατέμνουσα l_0 έχει κατασκευασθεί στο σημείο x, που δεν είναι σημείο ισορροπίας.

Στη περιοχή κάθε σημείου που δεν είναι σημείο ισορροπίας μπορούμε πάντοτε να κατασκευάσουμε μία διατέμνουσα. (Στη περιοχή τέτοιου σημείο το $\vec{v}(x)$ δεν είναι μηδενικό. Η διατέμνουσα είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα κάθετο στο πεδίο ταχύτητας στο σημείο. Λόγω συνεχείας ικανοποιούνται οι συνθήκες).

Θεωρήστε την τροχιά του σχήματος 3 η οποία σε διαδοχικούς χρόνους $t_1 < t_2 < t_3$ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα μ του σχήματος στα σημεία $x(t_1)$, $x(t_2)$ και $x(t_3)$ τα οποία δεν είναι διατεταγμένα μονότονα πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα. Το μ δεν είναι εγκάρσιο τμήμα και επιπλέον δεν θα μπορούσε να είναι εγκάρσιο τμήμα.

Λήμμα: Τα διαδοχικά σημεία τομής μίας τροχιάς Τ με μία διατέμνουσα κινούνται μονότονα πάνω στην τομή.

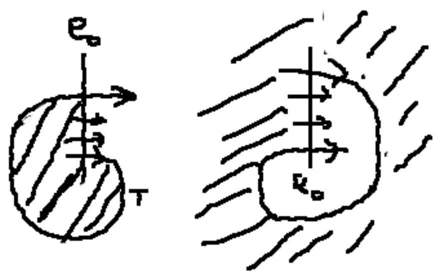
Απόδειξη: Θεωρήστε δύο διαδοχικές τομές της τροχιάς. Τότε μία απο τις δυο εικόνες (ή τις κατοπτρικές τους) μπορεί να ισχύει (βλ. Σχ. 4). Σε κάθε περίπτωση η τροχιά αφήνει την σκιαγραφημένη περιοχή στην οποία και δεν μπορεί να επιστρέψει. Συνεπώς η επόμενη τομή με την διατέμνουσα δεν μπορεί να είναι ανάμεσα στις πρώτες δύο τομές αφού η ροή θα είναι πέραν της δευτέρας (δεν μπορεί να επιστρέψει πίσω.)

Θεώρημα Poincare-Bendixson: Εάν μία τροχιά Τ εισέλθει σε ένα κλειστό και φραγμένο χωρίο Δ στο οποίο δεν υπάρχουν σημεία ισορροπίας, τότε στο Δ υπάρχει κλειστή περιοδική τροχιά στην οποία η τροχιά Τ συγκλίνει.

Απόδειξη: η τροχιά Τ εισέρχεται στο φραγμένο σύνολο Δ και συνεπώς θα έχει ορικό σημείο-ω (από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass). Το ονομάζουμε Ω. Το σημείο αυτό θα είναι σημείο του Δ διότι το Δ είναι κλειστό.

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις

α) το Ω είναι σημείο της τροχιάς Τ ($\Omega \in T$) και συνεπώς σε πεπερασμένο χρόνο t_0 η τροχιά βρίσκεται στο σημείο Ω . Επειδή το Δ δεν περιέχει σημεία ισορροπίας, μπορούμε να κατασκευάσουμε την διατέμνουσα του σημείου Ω. Εξετάζουμε τώρα χρόνους $t > t_0$. Το Ω είναι ορικό σημείο του Τ, και συνεπώς το Τ θα πρέπει να τμήσει την διατέ-



Σχήμα 4: Οι τροχιές φεύγουν απο τις σκιαγραφημένες περιοχές και δεν μπορούν να επιστρέψουν σε αυτές. Εάν τμήσουν εκ νέου την διατέμνουσα, θα την τμήσουν σε σημείο πιο απομακρισμένο, και οι διαδοχικες τομές είναι μονότονα διατεταγμένες.

μνουσα του Ω άπειρες φορές. Εάν η Τ διέρχεται από την διατέμνουσα απο σημείο διαφορετικό από το Ω τότε σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα τα διαδοχικά σημεία θα απομακρύνονται επί της εγκάρσιας τομής από το Ω και συνεπώς το Ω δεν μπορεί να είναι ορικό σημείο της Τ. Συνεπώς άτοπο. Άρα η Τ θα τμήσει την διατέμνουσα της Ω άπειρες φορές διερχόμενη από το σημείο Ω, και άρα η τροχιά Τ είναι κλειστή και περιοδική.

β) το Ω δεν είναι σημείο της τροχιάς Τ ($\Omega \notin T$). Θεωρήστε την τροχιά T^* που ξεκινά από το Ω. Επειδή το Ω δεν είναι σημείο ισορροπίας η τροχιά T^* δεν είναι τετριμμένη και θα είναι ένα απειροσύνολο που θα δείξουμε ότι και αυτό βρίσκεται όλο στο Δ (ξέρουμε ότι η Τ είναι στο Δ αλλά δεν γνωρίζουμε ακόμα για την T^*). Παρατηρούμε όμως ότι όλα τα σημεία της T^* είναι σημεία-ω της Τ (λόγω συνεχείας μπορούμε να πάμε όσο θέλουμε κοντά στην T^* επιλέγοντας κάποια αρχική συνθήκη επί της Τ καταλλήλως πλησίον του Ω, που είναι πάντα δυνατό διότι το Ω είναι ορικό σημείο της Τ) και συνεπώς όλη η T^* θα είναι στο Δ, επειδή το Δ είναι κλειστό σύνολο και περιέχει εξ'ορισμού όλα τα ορικά του σημεία. Συνεπώς υπάρχει Ω^* σημείο-ω της T^*, το οποίο ανήκει και αυτό στο Δ και το οποίο δεν είναι σημείο ισορροπίας. Θεωρήστε την διατέμνουσα του Ω^*. Η T^* επιστρέφει στο Ω^* άπειρες φορές τέμνοντας άπειρες φορές την διατέμνουσα. Αν $\Omega^* \in T^*$ τότε όπως δείξαμε προηγουμένως η T^* είναι περιοδική τροχιά στην οποία η Τ συγκλίνει. Αν $\Omega^* \notin T^*$ τότε η T^* θα τμήσει την διατέμνουσα σε άπειρα διαφορετικά σημεία που θα συγκλίνουν στο Ω^*. Θεωρήστε τώρα δύο διαφορετικά σημεία Π_1 και Π_2 τα οποία είναι σημεία τομής με την διατέμνουσα. Τα Π_1 και Π_2 είναι επί της T^* και είναι συγχρόνως και σημεία-ω της Τ. Άρα η τροχιά Τ θα βρίσκεται στη περιοχή του Π_1 και του Π_2 διαδοχικά άπειρες φορές. Αλλά αυτό είναι αδύνατο διότι η διατέμνουσα του Ω^* της T^* είναι και της Τ, και συνεπώς οι διαδοχικές τομές πρέπει να κινούνται μονότονα επι της τομής. Άρα είναι αδύνατο $\Omega^* \notin T^*$. ο.ε.δ.