Μη γραμμική Δυναμική

Απόδειξη του Θεωρήματος του Hopf.

Λαμβάνουμε το δυναμικό συστημα

$$\dot{x} = A(\mu)x + f(x,\mu) \ , \quad x = (x_1, x_2)^T \in \Re^2 \ , \ \ \mu \in \Re$$

με τη συνάρτηση f να έχει ανάπτυγμα Taylor μέ όρους τουλάχιστον δεύτερης τάξης, $f = O(||x||^2)$. Ο πίνακας A έχει το συζυγές ζεύγος μιγαδικών ιδιοτιμών $\lambda(\mu) = \lambda_r(\mu) \pm i\lambda_i(\mu)$ με την ιδιότητα το σημείο ισορροπίας $x = 0$ όταν $\mu = 0$ να είναι κέντρο, δηλαδή όταν $\mu = 0$ να είναι $\lambda_r(0) = 0$ και $\lambda_i(0) \neq 0$.

Οι ιδιοκαταστάσεις του A είναι η q και η συζυγής της, $\overline{q}$, με ιδιοτιμές αντίστοιχα λ και $\overline{\lambda}$. Ο συζυγής τελεστής έχει ιδιοκαταστάσεις $p(\mu)$ και $\overline{p}(\mu)$ με ιδιοτιμές αντίστοιχα τις $\overline{\lambda}$ και λ (προσέξτε τη σειρά), οι οποίες μπορεί να κανονικοποιηθούν ώστε να ικανοποιούν τις συνθήκες ορθογωνιότητας[1]: $(p, \overline{q}) = 0$ και $(p, q) = 1$. Συνεπώς κάθε $x \in \Re^2$ μπορεί να αναπτυχθεί στη βάση των ιδιοδιανυσμάτων q και $\overline{q}$ ως:

$$x = z\,q + \overline{z}\,\overline{q} \ ,$$

με το μιγαδικό συντελεστή να προσδιορίζεται από $z = (p(\mu), x)$.

Το δυναμικό σύστημα μετατρέπεται στο:

$$\dot{z} = \lambda(\mu)z + g(z, \overline{z}, \mu) \ ,$$

όπου

$$g(z, \overline{z}, \mu) = (p(\mu), f(z\,q + \overline{z}\,\overline{q}, \mu)) \ .$$

Έστω τώρα ότι υπάρχουν δεύτερης ταξης όροι στο $g(z, \overline{z}, \mu)$ οπότε το δυναμικό σύστημα είναι της μορφής:

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z\overline{z} + \frac{g_{02}}{2}\overline{z}^2 + O(||z||^3) \ .$$

Κάνοντας την αλλαγή της μεταβλητής:

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w\overline{w} + \frac{h_{02}}{2}\overline{w}^2$$

και επιλέγοντας

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda} \ , \ \ h_{11} = \frac{g_{11}}{\overline{\lambda}} \ , \ \ h_{02} = \frac{g_{02}}{2\overline{\lambda} - \lambda}$$

[1] Το εσωτερικό γινόμενο είναι $(a, b) = \sum_{i=1}^{2} \overline{a}_i b_i$ και η άνω γραμμή συμβολίζει το μιγαδικό συζυγές.

μπορούμε να απαλείψουμε τους όρους δεύτερης τάξης και να έχουμε το ισοδύναμο σύστημα

$$\dot{w} = \lambda(\mu)w + O(||z||^3)$$

Έχοντας επιτύχει την απαλοιφή των όρων δεύτερης τάξης προσπαθούμε να επιτύχουμε την απαλοιφή και των όρων τρίτης τάξης. Γράφουμε τώρα το δυναμικό σύστημα:

$$\dot{w} = \lambda(\mu)w + \frac{g_{30}}{6}w^3 + \frac{g_{21}}{2}w^2\overline{w} + \frac{g_{12}}{2}w\overline{w}^2 + \frac{g_{03}}{6}\overline{w}^3 + O(|z|^4) \ .$$

και κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής

$$w = v + \frac{h_{30}}{6}v^3 + \frac{h_{21}}{2}v^2\overline{v} + \frac{h_{12}}{2}v\overline{v}^2 + \frac{h_{03}}{6}\overline{v}^3 \ ,$$

η οποία αντιστρέφοντας δίνει:

$$v = w - \frac{h_{30}}{6}w^3 - \frac{h_{21}}{2}w^2\overline{w} - \frac{h_{12}}{2}w\overline{w}^2 - \frac{h_{03}}{6}\overline{w}^3 + O(|w|^4) \ .$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}
\dot{v} &= \dot{w} - \frac{h_{30}}{2}w^2\dot{w} - \frac{h_{21}}{2}(2w\overline{w}\dot{w} + w^2\dot{\overline{w}}) - \frac{h_{12}}{2}(\dot{w}\overline{w}^2 + 2w\overline{w}\dot{\overline{w}}) - \frac{h_{03}}{2}\overline{w}^2\dot{\overline{w}} + \cdots \\
&= \lambda w + \left(\frac{g_{30}}{6} - \frac{\lambda h_{30}}{2}\right)w^3 + \left(\frac{g_{21}}{2} - \lambda h_{21} - \frac{\overline{\lambda}h_{21}}{2}\right)w^2\overline{w} \\
&\quad + \left(\frac{g_{12}}{2} - \frac{\lambda h_{12}}{2} - \overline{\lambda}h_{12}\right)w\overline{w}^2 + \left(\frac{g_{03}}{6} - \frac{\overline{\lambda}h_{03}}{2}\right)\overline{w}^3 + \cdots \\
&= \lambda v + \frac{1}{6}(g_{30} - 2\lambda h_{30})v^3 + \frac{1}{2}(g_{21} - (\lambda + \overline{\lambda})h_{21})v^2\overline{v} \\
&\quad + \frac{1}{2}(g_{12} - 2\overline{\lambda}h_{12})v\overline{v}^2 + \frac{1}{6}(g_{03} + (\lambda - 3\overline{\lambda})h_{03})\overline{v}^3 + O(|v|^4) \ .
\end{aligned}$$

Επιλέγοντας

$$h_{30} = \frac{g_{30}}{2\lambda} \ , \ h_{12} = \frac{g_{12}}{2\overline{\lambda}} \ , \ h_{03} = \frac{g_{03}}{3\overline{\lambda} - \lambda}$$

μπορούμε να απαλείψουμε όλους τους όρους τρίτης τάξης εκτός από τον όρο $v^2\overline{v}$, επειδή για να απαλειφθει απαιτείται να επιλέξουμε

$$h_{21} = \frac{g_{21}}{\lambda + \overline{\lambda}}$$

με $\lambda + \overline{\lambda} = 2\lambda_r(\mu)$, το οποίο μηδενίζεται στη κρίσιμη τιμή $\mu = 0$.

Οι δύο μετασχηματισμοί που επιλέξαμε είναι συνεχείς στο $\mu = 0$ και 1-1 κοντά στο σημείο ισορροπίας στη κρίσιμη τιμή της παραμέτρου $\mu = 0$, οπότε μετασχηματίζουν ομαλά την κρίσιμη αυτή περιοχή του σημείου ισορροπίας. Με το τρόπο αυτό αποδείξαμε οτι η ροή κοντά στη κρίσιμη περιοχή του $\mu = 0$ είναι ισοδύναμη με τη ροή του δυναμικού συστήματος:

$$\dot{v} = \lambda(\mu)v + \alpha v^2 \overline{v} + O(|v|^4)$$

για κάποιο α και ο χαρακτήρας της ροής προσδιορίζεται απο αυτό το δυναμικό σύστημα. Με μία μικρή α΄άγή της κλίμακας του χρόνου (συγκεκριμένα μετασχηματίζοντας το $t \to \tau$ μέσω του σχεδόν ταυτοτικού μετασχηματισμού $d\tau = (1 + \Im(\alpha)|v|^2)dt$) μορούμε να λάβουμε χωρίς έλλειψη της γενικότητας το α πραγματικό. Οπότε το δυναμικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\dot{x}_1 = \lambda_r(\mu)x_1 - \lambda_i(\mu)x_2 + \alpha x_1(x_1^2 + x_2^2) \ , \ \dot{x}_2 = \lambda_i(\mu)x_1 + \lambda_r(\mu)x_2 + \alpha x_2(x_1^2 + x_2^2) \ ,$$

που είναι το κλασικό σύστημα που παρουσιάζει τη διακλάδωση Hopf που μελετήσαμε στη τάξη.