# 1D Maps

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

- Συστήματα διακριτού χρόνου. Οι εξισώσεις δεν χρειάζονται ολοκλήρωση, είναι "έτοιμες". Το προηγούμενο βήμα ορίζει μονοσήμαντα το επόμενο. Στο αριστερό μέλος υπάρχει κατευθείαν η επόμενη επανάληψη.
- Γιατί 1D maps? Χρήση σε: Πληθυσμοί, genetics, epidimiology, information theory, internet packet transfer, biological systems, economy, social sciences. Όλοι αυτοί οι επιστημονικοί τομείς περιγράφονται πολύ καλά με διακριτό χρόνο, difference equations.
- Προέλευση 1D maps: Τομές Poincare, Διακριτές αυξήσεις μεγεθών (ανατοκισμοί, γενεές πληθυσμών, μη-αυτόνομα συστήματα με περιοδικό forcing και γενικά συστήματα όπου ο χρόνος είναι εγγενώς διακριτός.
- Στην πράξη, τα πάντα είναι διακριτά. Όταν δεν μπορούμε να λύσουμε ένα σύστημα αναλυτικά και το βάζουμε στο pc, αυτό που κάνουμε είναι να το διακριτοποιούμε.
- Ύπαρξη χάους ακόμη και σε μία διάσταση. Όταν ο χρόνος είναι διακριτός το θεώρημα Poincare Bendinxon δεν ισχύει (θα το δούμε αργότερα).
- Βιβλιογραφία: Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics [Michael Tabor], Dynamical Systems [Shlomo Sternberg], An Exploration of Chaos [Argyris J.], Nonlinear Dynamics and Chaos [S. H. Strogatz], Chaos in Dynamical Systems [E. Ott] και τελευταίο (και πιο δύσκολο): Deterministic Chaos, an Introduction [H. G. Schuster] που και καλά είναι "introduction" αλλά είναι το πιο advanced βιβλίο για χάος που έχω δει μέχρι στιγμής.

---

- **1D Maps (μονοδιάστατες απεικονίσεις)**

Διακριτό δυναμικό σύστημα με επαναλαμβανόμενο μηχανισμό/εξέλιξη ανάδρασης
(feedback mechanism/evolution):

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad , \quad n \in N \tag{1}$$

$$x_0 \xrightarrow{f(x_0)} x_1 \xrightarrow{f(x_1)} x_2 \quad \text{μέσω της} \quad f : A \to A$$

Εδώ ο ``χρόνος" είναι διακριτός και γιαυτό στο αριστερό μέλος δεν έχουμε την παράγωγο του μεγέθους αλλά απευθείας το επόμενο βήμα. Τέτοιες εξισώσεις λέγονται Difference Equations ή Maps. Η f δεν είναι απαραίτητο να είναι συνεχής. Το σύστημα είναι απολύτως ντετερμινιστικό και η ``λύση" των εξισώσεων είναι έτοιμη. Μια ``τροχιά" του συστήματος απευθείας ορίζεται από το αρχικό σημείο $x_0$ και είναι η ακολουθία

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), ... \quad \equiv \quad x_0, f(x_0), f^{(2)}(x_0), f^{(3)}(x_0)... \tag{2}$$

$$x_n = f^{(n)}(x_0) \tag{3}$$

Προσοχή: Φυσικά η λύση ορίζεται μονοσήμαντα από το $x_0$. Όμως τις περισσότερες φορές είναι αδύνατων να βρούμε το $x$ σαν συνάρτηση του ``χρόνου" δηλαδή $x(n) = \Psi(n; x_0)$.

Ας κάνουμε ένα παράδειγμα. Χωρίζω τον πίνακα σε 2 μέρη, στο ένα λέω θεωρία στο άλλο εφαρμογή ότι λέω στην εκθετική.

$$x_{n+1} = e^{-2x_n} \tag{4}$$

Και ας αρχίσουμε με 2-3 διαφορετικές αρχικές τιμές $x_0$. (Στο pc φτιάχνουμε τροχιές). Άρα η τροχιά είναι τάδε τάδε τάδε .... (programma matlab poy exei 2-3 sthles x1 y1 z1). Κατέληξε στο $x \simeq 0.4263$. Ας το δούμε με άλλο αρχικό σημείο. ΑΧΑ! Όλα καταλήγουν στο $x \simeq 0.4263$! χμμμμμ.

---

- **Σταθερά Σημεία (FP) της $f$**

- Ορισμός σταθερού σημείου (fixed point):

$$x^* = f(x^*) \tag{5}$$

  Για παράδειγμα οι τροχιές της εκθετικής (εξ. (4)) είδαμε καταλήγουν στο $x \simeq 0.4263$ που είναι η λύση της αντίστοιχης υπερβατικής εξίσωσης, $x = e^{-2x}$. Αφού όμως όλες καταλήγουν στο $x \simeq 0.4263$, σημαίνει ότι το $x \simeq 0.4263$ είναι ελκυστής! Ή αλλιώς *σταθερό σημείο ισορροπίας* (to be seen).

- Cobweb Diagramms για την εξέλιξη του συστήματος. Γραφική λύση του συστήματος, όπως κάναμε στις διαφορικές εξισώσεις πλοτάρισμα του χώρου φάσεων. Σταθερά σημεία της $f$ είναι οι τομές με την διαγώνιο. Δείχνω την διαφορά κλίσης μικρότερης του 1 και μεγαλύτερης. Προετοιμασία για το επόμενο.

- Ευστάθεια FP

$$|f'(x^*)| < 1 \tag{6}$$

  Έστω μία γειτονική τροχιά $x_0 = x^* + \delta_0 \Rightarrow x_n = x^* + \delta_n$ τότε

$$x^* + \delta_{n+1} = x_{n+1} = f(x^* + \delta_n) \simeq f(x^*) + f'(x^*)\delta_n + ... \tag{7}$$

  Άρα για όρους μέχρι πρώτης τάξης

$$\delta_{n+1} = f'(x^*)\delta_n \Rightarrow \delta_n = (f'(x^*))^n \delta_0 \tag{8}$$

  Η συνθήκη (6) σημαίνει ότι διαταραχές γύρω απ' το FP μειώνονται. Στην περίπτωση που $|f'(x^*)| = 1$ οι μη-γραμμικοί όροι χρειάζονται για αποφανθούμε. Αυτό έρχεται σε αναλογία με το ``ελλειπτικό" σημείο ισορροπίας στις διαφορικές εξισώσεις.

- Γιαυτό λοιπόν στην (4) κατέληγαν όλα εκεί. Αρχικά γιατί η λύση του σταθερού σημείου είναι η $x = W(2)/2 = 0.4263...$ και γιατί οι διαταραχές μειώνονται αφού η παράγωγος είναι μικρότερη του 1 (πίνακας $-2e^{-2x^*}$).

---

- **FP ανώτερης τάξης**

- Δύο σημεία $x_1, x_2$ είναι σταθερά σημεία 2ης τάξης της $f$ εάν ισχύει ότι

$$f(x_1) = x_2 \quad \text{και} \quad f(x_2) = x_1 \tag{9}$$

  Δηλαδή ότι

$$f(f(x_1)) = f(x_2) = x_1 \quad \text{και} \quad f(f(x_2)) = f(x_1) = x_2 \tag{10}$$

  Που σημαίνει ότι και τα 2 είναι σταθερά σημεία της $f^{(2)}$, δηλαδή

$$f^{(2)}(x_1) = x_1 \quad \text{και} \quad f^{(2)}(x_2) = x_2 \tag{11}$$

- Λέγονται επίσης και period-2 cycle της $f$ ή απλά period-2. Αυτό γιατί η εξέλιξη του συστήματος, με αρχή ένα από αυτά τα σημεία, πηγαίνει κυκλικά από το ένα στο άλλο επ' άπειρον.

- Γενίκευση για οποιοδήποτε $n$-κύκλο: Υπάρχουν $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $n$ σε πλήθος, έτσι ώστε

$$f(x_i) = x_{i+1}, \quad f^{(n)}(x_i) = x_i, \quad f^{(k)}(x_i) \neq x_i, \quad 1 \leq k < n, \quad i = 1, 2, ..., n \tag{12}$$

Τα $x_i$ τότε λέμε ότι ορίζουν έναν κύκλο περιόδου $n$. Κατανοούμε πως εάν ένα FP είναι τάξης $m$ τότε θα είναι και τάξης οποιουδήποτε ακέραιου πολλαπλάσου του $m$. Άρα τα FP τάξης 1 είναι FP οποιασδήποτε τάξης. Γιαυτό ο ορισμός του κύκλου $n$ όπως τον δώσαμε, απαγορεύει FP μικρότερης τάξης από την τάξη του κύκλου. Παραδείγματα κύκλων 2 κτλπ θα δούμε την επόμενη ώρα. Επίσης η παράγωγος της $f^{(n)}$ είναι ίδια σε κάθε σημείο του κύκλου και μάλιστα ίση με τα γινόμενα της $f^{'}$ σε όλα τα $x_i$. Αυτό μπορούμε να το αποδείξουμε με τον κανόνα αλυσίδας:

$$\begin{aligned} f^{'(n)}(x_1) &= f^{'(n-1)}(f(x_1)) \cdot f^{'}(x_1) \\ &= f^{'(n-1)}(x_2) \cdot f^{'}(x_1) \\ &= f^{'(n-2)}(f(x_2)) \cdot f^{'}(x_2) \cdot f^{'}(x_1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx_1} f^{(n)}(x_1) = \prod_{i=1}^{n} f^{'}(x_i) \tag{13}$$

---

# Logistic Map

---

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n) \tag{14}$$

- Μοντέλο πληθυσμού κανονικοποιημένο στην μονάδα. Κάθε επανάληψη εννοεί επόμενο χρόνο. Ο πληθυσμός τον επόμενο χρόνο εξαρτάται από τον προηγούμενο με έναν παράγοντα ανάπτυξης $r$ και μειούμενος με παράγοντα $(1 - x)$ ώστε να μην υπάρχει απεριόριστη αύξηση. Το $r$ ονομάζεται *παράμετρος ελέγχου* διότι το σύστημα έχει διαφορετική συμπεριφορά καθώς μεταβάλλεται η παράμετρος. Για $0 < r < 4$ η απεικόνιση είναι από το $[0, 1]$ στο $[0, 1]$. Εισήχθηκε από τον Robert May στο Nature το 1976. Βλέπουμε την μορφή του για διάφορα $r$ (logisticofr.jpg). έχει πάντα ένα μέγιστο στο $x = 1/2$ με τιμή ίση με $r/4$.

- Απλότητα της εξίσωσης. Πιο απλή μη-γραμμική περίπτωση, $x^2$. θα μπορούσε κανείς να περιμένει ότι και λόγω του όρου μείωσης $(1 - x)$ αλλά και λόγω του μηχανισμού ανάδρασης (feedback) του δυναμικού συστήματος, ο πληθυσμός τείνει σε μία μέση, σταθερή τιμή. Spoiler: ούτε καν. Έχει πολύ πλούσια και πολύ πολύπλοκη δυναμική.

- Τροχιές του Logistic Map

| Τιμή $r$ | Συμπεριφορά |
|---|---|
| $r_d = 0.7$ | Μηδενισμός πληθυσμού |
| $r_0 = 2.7$ | Ισορροπία (FP) |
| $r_1 = 3.2$ | Ταλάντωση μεταξύ 2 σημείων |
| $r_2 = 3.5$ | Ταλάντωση μεταξύ 4 σημείων |
| $r_3 = 3.55$ | Ταλάντωση μεταξύ 8 σημείων |
| $r_{1\chi} = 3.59$ | Απεριοδική Κίνηση (Χάος) |
| $r_c = 3.83$ | Περίοδος μεταξύ 3 σημείων |
| $r_{2\chi} = 3.9$ | Ξανά χαοτική κίνηση |

Δείχνω τροχιές της λογιστικής, απ'το πρόγραμμα του Complexity. Θυμίζω ότι το σύστημα είναι διακριτό οπότε οι τροχιές είναι σημεία. Τα ενώνουμε για διευκόλυνση του ματιού. Διάφορα αρχικά σημεία για ίδιο $r$. Για διάφορα $r$ βλέπουμε πως δεν έχουμε πάντα την ίδια συμπεριφορά. Σε κάθε βήμα τους ρωτάω για το τι συμβαίνει. Για $r = 0.7$ πάντα μηδενισμός. Για $r = 2.7$ κατάληξη σε σταθερό σημείο. Για $r = 3.2$ βλέπω ``ταλάντωση" μεταξύ δύο σημείων! Για $r = 3.5$ βλέπω μεταξύ 4 σημείων! Μετά ($r = 3.52$) μεταξύ 8 σημείων! Συνεχής διπλασιασμοί περιόδου! Μετά για $r = 3.58$ βλέπουμε άτακτη, *χαοτική* τροχιά! Ας βάλουμε τώρα $r = 3.83$ και ΟΠΑ ΠΕΡΙΟΔΟΣ 3. Δηλαδή ξάφνου πάλι περιοδική κίνηση! Και στο $r = 3.9$ έχουμε πάλι χαοτική κίνηση!!!

Αυτά μπορούμε να τα δούμε και σε Cobweb diagram: πρόγραμμα στο mathematica (trajectories of the logistic map) με cobweb της λογιστικής και βλέπουμε κάποια $r$.

---

- **FP τάξης 1 για την Λογιστική**

Ας ξεκινήσουμε την ποσοτική μελέτη της Λογιστικής Απεικόνισης. Θέλουμε να βρούμε τα σημεία τομής της συνάρτησης με την διαγώνιο. Κάνουμε Cobweb diagram (η το χω σε εικόνα) και βλέπουμε πως αφού το ύψος είναι $r/4$ η ύπαρξη 2ου FP εξαρτάται από το $r$ (υπάρχει πάντα το 0. Αυτά είναι ισοδύναμα με το να λύσουμε την εξίσωση σταθερού σημείου

$$x^* = rx^*(1 - x^*) \quad \Rightarrow$$

$$x_1^* = 0 \quad \text{και} \quad x_2^* = 1 - \frac{1}{r} \tag{15}$$

Άρα το $x_1^* = 0$ είναι FP με σταθερή θέση, ενώ η θέση του $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$ εξαρτάται από το $r$. Βέβαια, αφού είπαμε ότι το πεδίο ορισμού της $f$ είναι το $[0, 1]$ το $x_2^*$ υπάρχει μόνο όταν $r \geq 1$. Αυτό φαίνεται στο cobweb diagram αφού το 0 είναι πάντα σημείο τομής, ενώ το 2ο υπάρχει μόνο όταν η $f$ έχει ένα ορισμένο ύψος.

Ας δούμε την σταθερότητά τους. Χρειαζόμαστε την παράγωγο της $f$

$$f'(x^*) = r - 2rx^* \quad \Rightarrow$$

$$f'(x_1^*) = r \quad \text{και} \quad f'(x_2^*) = 2 - r \tag{16}$$

Όπως είπαμε, η συνθήκη σταθερότητας είναι $|f'(x^*)| < 1$. Άρα το $x_1^* = 0$ είναι σταθερό όταν $r < 1$ και ασταθές όταν $r > 1$. Το $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$ είναι σταθερό όταν $1 < r < 3$ και ασταθές όταν $r > 3$. Προσέξτε κάτι σημαντικό. Το ότι το FP είναι ασταθές δεν σημαίνει ότι δεν υπάρχει! *Ακόμη υπάρχει.*

Όπως είδαμε στα παραδείγματα τροχιών στο $r = 3.2$ υπάρχει μια περιοδική κίνηση μεταξύ 2 σημείων, δηλαδή κύκλος περιόδου 2. Αυτό σημαίνει ότι η $f^{(2)}$ αποκτά (καινούρια) σημεία ισορροπίας διαφορετικά από αυτά της $f$. Αρχικά παρατηρήστε ότι όταν το $x_2^*$ γίνεται ασταθές στο $r = 3$ συμβαίνει ταυτόχρονα και $f'(x_2^*) = -1$. Αυτό θα οδηγήσει στην period doubling bifurcation ή flip bifurcation. Κάνουμε ένα cobweb όπου υπάρχει κάτι με κλίση -1. Πάντα θα κάνω ένα τέλειο τετράγωνο αν η συνάρτηση είναι μία ευθεία κλίσης -1.

---

- **FP τάξης 2 για την Λογιστική**

Ας δούμε το cobweb diagram και μετά τα FP της $f^{(2)}$ (Cobweb στο trajectories of the logistic μαζί με την τάξη 2). Για να τα βρούμε πρέπει να λύσουμε την εξίσωση:

$$x^* = f^{(2)}(x^*) = f(rx^*(1 - x^*)) \quad \Rightarrow$$

$$r^2x^*(1 - x^*)[1 - rx^*(1 - x^*)] - x^* = 0 \tag{17}$$

Η εξίσωση (17) ίσως φαίνεται δύσκολο να λυθεί όμως μην ξεχνάμε πως τα FP τάξης 1 της $f$ είναι αναγκαστικά και τάξης 2. Αυτό σημαίνει ότι το παραπάνω πολυώνυμο σίγουρα θα έχει παράγοντες το

$(x^* - 0)$ και το $(x^* - (1 - \frac{1}{r}))$. Οπότε κάνοντας Ευκλείδεια διαίρεση πολυωνύμων με αυτά, βρίσκουμε εύκολα τις ρίζες του παραμένων τριωνύμου και έχουμε

$$q_{1,2} = \frac{r + 1 \pm \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r} \tag{18}$$

Οπότε αυτά υπάρχουν όταν $r > 3$ αφού τότε είναι πραγματικοί αριθμοί (δεν ξεχνάμε τα 1D maps είναι από τους πραγματικούς στους πραγματικούς αριθμούς).
**HOMEWORK:** να βρούνε την συνθήκη σταθερότητας των σημείων τάξης δύο (συνθήκη: $|f'^{(2)}(q_1)| < 1$ και τους λέω να μην κλέψουνε και το δούνε από τις σημειώσεις).

Τώρα ας δούμε την σταθερότητα αυτών των $q_{1,2}$. Αρκεί

$$|f'^{(2)}(q_1)| < 1 \tag{19}$$

Όμως από κανόνα αλυσίδας

$$\begin{aligned} f'^{(2)}(q_1) = f'(f(q_1))f'(q_1) = f'(q_2)f'(q_1) = f'^{(2)}(q_2) \quad &\Rightarrow \\ f'^{(2)}(q_1) = f'^{(2)}(q_2) = r(1-2q_1)r(1-2q_2) \end{aligned} \tag{20}$$

Αυτό σημαίνει πως τα δύο καθαρά FP της $f'^{(2)}$ έχουν αναγκαστικά την ίδια σταθερότητα στις διάφορες τιμές του $r$. Αντικαθιστώντας τις τιμές που βρήκαμε πριν (εξ. (18)) καταλήγουμε

$$f'^{(2)}(q_1) = -(r^2 - 2r - 4) \tag{21}$$

Άρα ο κύκλος 2 είναι σταθερός όταν $|r^2 - 2r - 4| < 1$ που αντιστοιχεί στο διάστημα $3 < r < 1 + \sqrt{6}$. Για $r > 1 + \sqrt{6}$ ο κύκλος γίνεται ασταθής αλλά *δεν χάνεται*.

Για να το συνδέσουμε με αυτά που έχετε μάθει, στην $f^{(2)}$ συμβαίνει μία διακλάδωση τρίαινας (Pitchfork) όπου το $x_2^*$ (της $f$ άρα και της $f^{(2)}$) από το $r = 3$ και μετά σπάει σε 3 σταθερά σημεία, 2 ευσταθή και το ίδιο το $x_2^*$ που γίνεται ασταθές.

---

## Orbit Diagram of the Logistic Map

---

Βλέπουμε ``Orbit" diagram (απ' το complexity explorer). Σημείωση: Orbit diagram είναι διαφορετικό από το Bifurcation diagram. Ο υπολογισμός γίνεται αριθμητικά και όχι αναλυτικά (σχεδιάζω 500 επαναλήψεις αφού πετάξω πρώτα τις πρώτες 500). Το Orbit diagram δείχνει την ``στάσιμη κατάσταση" σαν συνάρτηση της παραμέτρου, δηλαδή το $x_\infty$ vs $r$. Ο κάθετος άξονας είναι η κατάληξη του συστήματος μετά από "άπειρο" χρόνο $x_\infty$ και ο οριζόντιος η παράμετρος ελέγχου $r$. Δεν έχει σημεία μόνο πρώτης τάξης αλλά οποιασδήποτε τάξης. Δηλαδή η διπλή γραμμή σημαίνει FP 2ης τάξης π.χ... Το orbit diagram της λογιστικής απεικόνισης είναι από της memorial εικόνες του χάος. Memorial όχι αστεία. Το orbit diagram το βλέπουμε από ένα πρόγραμμα που μπορεί να ζουμάρει κιόλας.

Η μελέτη αυτού του γραφήματος έχει τεράστια σημασία όχι απλά από πλευρά φυσικής ή μαθηματικών, αλλά από την πλευρά της επιστήμης γενικά. Είναι κάτι που κάθε επιστήμονας θα πρέπει κάποτε να συναντήσει διότι δείχνει το εξής φοβερό γεγονός: Η πιο απλή δυνατή μορφή μιας μη-γραμμικής εξίσωσης έχει *εξαιρετικά πολύπλοκη* δυναμική, όπως ανέφερε και ο May στο άρθρο του (διαβάστε το είναι στην σελίδα του μαθήματος).

1. Ας κάνουμε κάποια ποιοτικά σχόλια και παρατηρήσεις απ' το Orbit Diagram χωρίς να αποδείξουμε κάτι. Έχω κρατήσει τον πίνακα με τις διάφορες τιμές του $r$ από πριν. Αρχικά βλέπουμε πως η τροχιά μηδενίζεται, από $r = 0$ έως το $r = 1$.

2. Για $r > 1$ βλέπουμε υπάρχει μόνο 1 (σταθερό) FP αλλά δεν είναι το 0, ακολουθεί την εξάρτηση από το $r$ που βρήκαμε παραπάνω $(1 - 1/r)$.

3. Καθώς αυξάνουμε κι άλλο το $r$ περνάμε σε κύκλο-2 στο $r_1 = 3$ μετά σε κύκλο-4 στο $r_2 = 3.4449...$ μετά σε κύκλο-8 στο $r_3 = 3.54409...$ κτλπ. Ο δείκτης του $r$ δείχνει σε δύναμη του 2 την περίοδο του κύκλου. Δηλαδή έχουμε συνέχεια διπλασιασμό περιόδου, μέχρι το $r_\infty = 3.5699456...$ που φτάνουμε σε $2^\infty$ περίοδο, δηλαδή χάος. Αυτό ονομάζεται period-doubling route στο χάος.

4. Μάλιστα, κατά το period doubling συμβαίνει το εξής. Οι τιμές $r_n$ όπου ο κύκλος περιόδου $2^{n-1}$ διπλασιάζεται σε κύκλο περιόδου $2^n$ (μετά απτον πρώτο διπλασιασμό) έρχονται όλο και πιο γρήγορα, όπως φαίνεται και απ' το Orbit Diagram. Ο λόγος των διαφορών των $r_n$ τους μειώνεται γεωμετρικά. Για μεγάλα $n$ μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} \simeq \delta \quad \text{ή} \quad r_n = r^\infty - const. \times \delta^{-n} \tag{22}$$

Σκεφτείτε το σαν να στενεύουν στον οριζόντιο άξονα όλο και πιο πολύ οι διπλασιασμοί περιόδων. Φτιάχνω στον πίνακα ScalingLogistic.jpg του Schuster, βοηθάει πολύ.

5. Εκτός από το ``στένεμα'' στον οριζόντιο άξονα βλέπουμε και στένεμα στον κατακόρυφο άξονα. Ορίζουμε $d_n$ να είναι κάτι σαν το ``πάχος'' του κύκλου $2^n$. Συγκεκριμένα το $d_n$ είναι η απόσταση του πλησιέστερου σημείου του κύκλου, από το σημείο του κύκλου που έχει $x = 1/2$. Το $d_n$ οπότε ορίζεται σε συγκεκριμένη τιμή του $r$ όπου ο κύκλος έχει μέσα το $1/2$. Τότε για μεγάλα $n$ μπορούμε να γράψουμε (κοιτάμε πίνακα διάγραμμα ScalingLogistic.jpg).

$$\frac{d_n}{d_{n+1}} = -\alpha \tag{23}$$

6. Οι σταθερές $\alpha$ και $\delta$ είναι ``παγκόσμιες'' και ονομάζονται σταθερές Faugenbaum. Οι τιμές τους είναι:

$$\delta = 4.6693026092... \quad \text{και} \quad \alpha = 2.5029078750... \tag{24}$$

Είναι παγκόσμιες διότι αυτές οι σταθερές διέπουν τον διπλασιασμό περιόδων για οποιοδήποτε Unimodal (με ένα μέγιστο) map. Περισσότερο για αυτό θα μιλήσουμε αργότερα.

7. Μετά τον πρώτο διπλασιασμό περιόδων υπάρχουν περιοχές ``χαοτικής'' κίνησης (αυτό που βλέπουμε στο Orbit Diagram σαν ασπρόμαυρος θόρυβος). Σε αυτές τις περιοχές υπάρχει ένα άπειρο και ΜΗ-αριθμήσιμο σύνολο απεριοδικών τροχιών. Είναι μη αριθμήσιμο σύνολο διότι η εξέλιξη μίας οποιασδήποτε τροχιάς καλύπτει ολόκληρο διάστημα του χώρου φάσεων και όχι απλά διάσπαρτα σημεία όπως στους περιοδικούς κύκλους. Οπότε οποιαδήποτε αρχική συνθήκη μέσα σε αυτό το διάστημα (μη-αριθμήσιμο σύνολο αφού το διάστημα είναι συνεχές) θα έχει χαοτική εξέλιξη. Το σύνολο των τροχιών με μη-χαοτική εξέλιξη έχει μέτρο 0. Μοιάζει μάλιστα κάπως με στοχαστική διαδικασία η συμπεριφορά του map εκεί. Θα ασχοληθούμε αργότερα με το χάος.

8. Κάνοντας ζουμ σε περιοχές που έχει επέλθει χάος, βλέπουμε κάποια ``περιοδικά παράθυρα''. Δηλαδή περιοχές περιοδικής συμπεριφοράς για μικρά παράθυρα τιμών του $r$. Τάξη μέσα στο χάος. Άρα για $r_\infty < r < 4$ υπάρχουν κάποια περιοδικά παράθυρα. Αυτά τα παράθυρα δημιουργούνται μέσω εφαπτομενικής διακλάδωσης (tangent bifucation) σε μία από τις ανώτερες τάξεις της $f$. Αργότερα θα δούμε πως αυτά είναι άπειρα (αριθμήσιμα) και έχουν όλες τις περιόδους.

9. Αυτά τα παράθυρα αρχίζουν από κάποια συγκεκριμένη περίοδο και ακολουθούν και αυτά διπλασιασμό περιόδου προς χάος. Και μάλιστα οι διπλασιασμοί ακολουθούν και πάλι τις παγκόσμιες σταθερές Faugenbaum. Εδώ βλέπουμε και την αυτό-ομοιότητα του Orbit Diagram (ζουμάρουμε στην περίοδο 3). Επίσης, η σχετική έκταση των παραθύρων δεν είναι τυχαία. Το παράθυρο 3 έχει την μεγαλύτερη έκταση και μετά ακολουθούν σε μέγεθος τα παράθυρα 5 και 6.

10. Παγκοσμιότητα: Κάτι φοβερό είναι ότι αυτό το Orbit Diagram και αυτή την Period-Doubling Route to chaos και ακριβώς αυτές τις σταθερές Faugenbaum συμμερίζονται όλες οι απεικονίσεις με ένα μέγιστο (Unimodal), όπως αποδείχτηκε από τους Metropolis (ποιοτικά) και έπειτα Faugenbaum (ποσοτικά). Οι σταθερές $\alpha$ και $\delta$ εξαρτώνται μόνο από την τάξη του μεγίστου, ενώ όλα τα υπόλοιπα είναι εντελώς παγκόσμια. Αυτά θα τα πούμε την επόμενη φορά που θα κάνουμε μάθημα.

**HOMEWORK:** Τους βάζω Homework να φτιάξουνε πρόγραμμα που παράγει το orbit diagram της λογιστικής και κάνει ζουμ σε αυτό. Να βρούνε τιμές του $r$ υπάρχει ελάχιστη περίοδος 5 και 6 (δηλαδή δεν έρχεται από διπλασιασμό περιόδου (καλά η 5 προφανώς)). Να βρούνε τα διαστήματα $r$ που οι κύκλοι αυτοί είναι ευσταθής με ακρίβεια τουλάχιστον 4 δεκαδικών ψηφίων. Πάντα όταν φτιάχνετε το orbit diagram να διαλέγεται ως σημείο εκκίνησης $x_0 = 1/2$ διότι αυτό πάντα καταλήγει σε ευσταθή κύκλο (Fatou and Julia).
**HOMEWORK:** Αφού έχετε φτιάξει το πρόγραμμα που κάνει το Orbit Diagram και κάνει zoom σε αυτό, υπολογίστε αριθμητικά τις σταθερές Faugenbaum για τον διπλασιασμό περιόδων 2, κρατώντας έως τον 4ο διπλασιασμό. Έπειτα βρείτε το παράθυρο $r$ όπου υπάρχει κύκλος 3. Κάντε την ίδια διαδικασία στον διπλασιασμό περιόδων του κύκλου 3 και υπολογίστε τις σταθερές Faugenbaum. Συγκρίνετέ τις με αυτές του διπλασιασμού του κύκλου 2 (πρέπει να είναι ίδιες).

---

## Universality

---

- **Sin vs Logistic**

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε τον διπλασιασμό περιόδων στην Λογιστική απεικόνιση. Απλά αναφέραμε ότι αυτός ο μηχανισμός ακολουθεί κάποιους παγκόσμιους νόμους, και σχετίζεται με κάποιες παγκόσμιες σταθερές. Συγκεκριμένα το ``στένεμα" στον οριζόντιο και κάθετο άξονα μειώνεται γεωμετρικά με τον εξής τρόπο (εικόνα ScalingLogistic.jpg στον πίνακα):

$$\frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} \simeq \delta \quad \text{και} \quad \frac{d_n}{d_{n+1}} = -\alpha \tag{25}$$

Με τα $\delta$ και $\alpha$ οι λεγόμενες παγκόσμιες σταθερές Faugenbaum,

$$\delta = 4.6693026092... \quad \text{και} \quad \alpha = 2.5029078750... \tag{26}$$

οι οποίες δεν εξαρτώνται από τον δυναμικό νόμο αλλά μόνο από την τάξη του μεγίστου.

Ας δούμε για παράδειγμα τα Orbit Diagrams των maps $x_{n+1} = r\sin(\pi x_n)$ και $x_{n+1} = rx(1-x)$ (εικόνα SinVsLogistic.jpg). Όπως παρατηρούμε τα διαγράμματα τους είναι ολόιδια, μετά το συνεπές scaling στον οριζόντιο άξονα.

Επίσης κάποια φυσικά συστήματα έχουν στην δυναμική τους διπλασιασμό περιόδου (με το ίδιο $\delta$). Κύρια παραδείγματα είναι κίνηση νερού ή υδράργυρου σε κύλινδρο καθώς και κάποια ηλεκτρονικά συστήματα με διόδους, τρανζίστορ ή Josephson Junctions. Τέλος το ίδιο $\delta$ εμφανίζεται και στο σύνολο Mandelbrot.

---

- **U-Sequence**

Η σειρά που εμφανίζονται τα περιοδικά αυτά παράθυρα δεν είναι τυχαία, αλλά ακολουθούν μια συγκεκριμένη ακολουθία U-sequence και αυτή είναι παγκόσμια ιδιότητα. Συγκεκριμένα οι Metropolis et al. απέδειξαν πως οποιαδήποτε συνάρτηση με ένα μέγιστο και με $f(0) = f(1) = 0$ θα έχει περιοδικά παράθυρα με αυτή την ακολουθία. Χωρίς να γράφουμε περιόδους πάνω από τάξης 6, έχουμε την U να είναι

$$U = 1, 2, 2 \times 2, 6, 5, 3, 2 \times 3, 5, 6, 4, ... \tag{27}$$

---

- **Συνθήκες για Period Doubling**

Το Period Doubling συμβαίνει με παγκόσμιο τρόπο ανεξαρτήτως της συναρτησιακής μορφής της $f$ όμως πρέπει να κάνουμε τα σχόλια:

1. Η απεικόνιση πρέπει είναι Unimodal: ένα μέγιστο και αντιστοιχεί το $[0, 1]$ στον εαυτό του για κάποιες τιμές τις παραμέτρου ελέγχου
2. Πρέπει να έχει αρνητική Schwarzian παράγωγο
$$(Sf)(x) := \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2 < 0 \tag{28}$$
3. Η σταθερά $\alpha$ είναι παγκόσμια για όλες τις κλάσεις μεγίστων ενώ η σταθερά $\delta$ έχει κάποια εξάρτηση από την κλάση του μεγίστου όπως θα δούμε παρακάτω.

---

## Period Doubling and Faugenbaum constants

---

- **Συμβολισμοί**

Θα γράφουμε $f_r$ ως μία γενική συνάρτηση που ικανοποιεί τα παραπάνω κριτήρια με παράμετρο $r$. Για τις τιμές όπου το $r_n < r < r_{n+1}$ υπάρχει σύνολο $\{x_1, x_2, ..., x_{2^n}\}$ το οποίο είναι ένας ευσταθής κύκλος-$2^n$ της $f_r$. Δηλαδή:

$$f_r(x_i^*) = x_{i+1}^*, \quad f_r^{(2^n)}(x_i^*) = x_i^*, \quad \left|\frac{d}{dx_1^*} f_r^{(2^n)}(x_1^*)\right| = \left|\prod_{i=1}^{2^n} f_r'(x_i^*)\right| < 1 \tag{29}$$

Για να κατανοήσετε την τελευταία ισότητα θυμηθείτε τον κανόνα αλυσίδας. (Κάνω παράδειγμα τάξης 2 αν χρειαστεί). Όταν τώρα $r_{n+1} < r < r_{n+2}$ ο κύκλος-$2^n$ γίνεται ασταθής και δημιουργείτε ευσταθής κύκλος-$2^{n+1}$. Για να ορίσουμε με ακρίβεια το $\alpha$ καθώς και για να μπορέσουμε να κάνουμε τους υπολογισμούς που χρειάζονται, πρέπει να στραφούμε στους ύπερ-ευσταθής κύκλους-$2^n$. Αυτοί υπάρχουν σε τιμές παραμέτρων $r = R_n$ και ορίζονται απλά ως :

$$\left|\frac{d}{dx_1^*} f_{R_n}^{(2^n)}(x_1^*)\right| = \left|\prod_{i=1}^{2^n} f_{R_n}'(x_i^*)\right| = 0 \tag{30}$$

Δηλαδή η παράγωγος της $f_{R_n}^{(2^n)}$ είναι 0 που σημαίνει ότι πρέπει η παράγωγος της $f_{R_n}$ να είναι 0 για κάποιο $x_i$. Αυτό συμβαίνει όταν ένα από τα $x_i^*$ είναι το $1/2$, δηλαδή το μέγιστο της $f_r$ αφού μόνο εκεί μηδενίζεται η παράγωγος της. Έστω οπότε ότι $x_1^* = \frac{1}{2}$. Επίσης υποθέσαμε πως ο υπερκύκλος-$2^n$ υπάρχει μόνο στην συγκεκριμένη τιμή $R_n$ και όχι σε διάστημα τιμών. Προφανώς το $R_n$ βρίσκεται κάπου στο $r_n < R_n < r_{n+1}$. Χαρακτηριστικό των υπερ-ευσταθών σημείων ισορροπίας ή υπερκύκλων είναι ότι η σύγκλιση είναι ταχύτερη από οποιονδήποτε αλγεβρικό ρυθμό.

---

- **Connecting $\alpha$ and $F^{(2^n)}_{R_{n+1}}$**

Με βάση αυτά, μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε τις κάθετες αποστάσεις $d_n$ που είπαμε μειώνονται γεωμετρικά με λόγο $\alpha$ ως εξής: (βλέπουμε εικόνα ScalingLogistic.jpg)

$$\text{Για υπερκύκλο-}2^n: \quad d_n = f^{(2^{n-1})}_{R_n}(x_1^*) - x_1^* \Rightarrow$$

$$d_n = f^{(2^{n-1})}_{R_n}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \tag{31}$$

Για να κατανοήσουμε πλήρως την εξίσωση το κάνουμε στον πίνακα μέσω γραφήματος ScalingLogistic.jpg και για $n = 1$ και για $n = 2$. Εδώ μας συμφέρει να κάνουμε μία μετατόπιση αξόνων, δηλαδή να πάμε το $1/2$ στο $0$. Οπότε ορίζουμε

$$F^{(2^{n-1})}_{R_n}(x) := f^{(2^{n-1})}_{R_n}\left(x - \frac{1}{2}\right) \tag{32}$$

Και άρα η εξίσωση των $d_n$ γίνεται

$$d_n = F^{(2^{n-1})}_{R_n}(0) - 0 \tag{33}$$

Εδώ μπορούμε να το συνδέσουμε με την σταθερά $\alpha$ αφού όπως είχαμε αναφέρει $\frac{d_n}{d_{n+1}} = -\alpha$ οπότε έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} (-\alpha)^n d_{n+1} = d_1 \tag{34}$$

Ή για την $F$:

$$\lim_{n\to\infty} (-\alpha)^n F^{(2^n)}_{R_{n+1}}(0) = d_1 \tag{35}$$

Αυτό σημαίνει πως η ακολουθία των $(-\alpha)^n F^{(2^n)}_{R_{n+1}}(0)$ συγκλίνει στον αριθμό $d_1$.

---

- **Renormalization and the Period Doubling Operator**

Ας παρατηρήσουμε κάτι σημαντικό στο ακόλουθο γράφημα (SchusterPeriodDoubling.jpg): Εάν πάρουμε μία μικρή περιοχή της $f^{(2)}$ κοντά στο $x = 1/2$ για την τιμή $R_2$ και την μεγεθύνουμε και στους δύο άξονες κατά παράγοντα $-\alpha$ τότε η εικόνα μοιάζει πολύ με την $f$ για την τιμή $R_1$. Δηλαδή

$$(-\alpha) \cdot f^{(2)}_{R_2}\left(\frac{x}{-\alpha}\right) \approx f_{R_1}(x)\,, \quad \text{για } x \text{ πολύ κοντά στο 1/2} \tag{36}$$

Βλέπουμε SchusterPeriodDoubling.jpg για να το καταλάβουμε. Στο τελευταίο γράφημα η κανονική γραμμή είναι η λογιστική ενώ η κόκκινη είναι η δεύτερή της τάξη επανακανονικοποιημένη.

Ομοίως εάν μεγεθύνουμε κατά παράγοντα $(-\alpha)^2$ την $f^{(4)}_{R_3}$ και αυτή μοιάζει κάπως με την $f_{R_1}$ κοντά στο 1/2. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται *renormalization*. Καθώς κάνουμε renormalization σε όλο και μεγαλύτερη τάξη της $f$ χάνουμε την πληροφορία της μορφής της $f$ και κρατάμε μόνο πληροφορία για το μέγιστο στο 1/2 (ή στο 0 για την $F$). Χρησιμοποιώντας αυτή την παρατήρηση, το γεγονός της εξ. (35) αλλά και το ότι αυτή η διαδικασία είναι Universal και δεν μας νοιάζει η ακριβής μορφή της $f$, καταλήγουμε στο ότι πρέπει να υπάρχει οριακή συνάρτηση ώστε:

$$\lim_{n\to\infty} (-\alpha)^n F^{(2^n)}_{R_{n+1}}\left[\frac{x}{(-\alpha)^n}\right] = g_1(x) \tag{37}$$

Δηλαδή αν κάνω renormalization $n$ φορές στην συνάρτηση τάξης όσο και ο κύκλος που βρίσκομαι, τότε θα καταλήξω στην $g_1(x)$. Το όριο του $n \to \infty$ υπάρχει για μαθηματική ακρίβεια. Η $g_1(x)$ πρέπει να είναι παγκόσμια για όλες τις απεικονίσεις με τετραγωνικό μέγιστο αφού όλες αυτές έχουν ίδια συμπεριφορά διπλασιασμού περιόδου όπως το logistic map. Γενικεύοντας αυτή την ιδέα μπορούμε να ορίσουμε οποιαδήποτε $g_i(x)$ ως:

$$\lim_{n\to\infty} (-\alpha)^n F^{(2^n)}_{R_{n+i}}\left[\frac{x}{(-\alpha)^n}\right] = g_i(x) \tag{38}$$

Ας ορίζουμε τώρα τον τελεστή ``διπλασιασμού", doubling operator, $\hat{T}$:

$$\hat{T}g(x) := (-\alpha)g\left[g\left(\frac{x}{(-\alpha)}\right)\right] \tag{39}$$

Με βάση αυτό, οι συναρτήσεις $g_i(x)$ συνδέονται ως εξής

$$g_{i-1}(x) = \hat{T}g_i(x) = (-\alpha)g_i\left[g_i\left(\frac{x}{(-\alpha)}\right)\right] \tag{40}$$

αφού

$$\begin{aligned}
g_{i-1}(x) &= \lim_{n\to\infty} (-\alpha)^n F^{(2^n)}_{R_{n+i-1}}\left[\frac{x}{(-\alpha)^n}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} (-\alpha)(-\alpha)^{n-1} F^{(2^{n-1+1})}_{R_{n+i-1}}\left[\frac{1}{-\alpha}\frac{x}{(-\alpha)^{n-1}}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} (-\alpha)(-\alpha)^m F^{(2^m)}_{R_{m+i}}\left[\frac{1}{-\alpha}\frac{x}{(-\alpha)^m}\right] \\
&= -\alpha g_i\left[g_i\left(\frac{x}{(-a)}\right)\right]
\end{aligned}$$

Οπότε παίρνουμε το όριο του $i \to \infty$ και έχουμε την οριακή συνάρτηση

$$G(x) := \lim_{i\to\infty} g_i(x) \tag{41}$$

η οποία είναι εξ' ορισμού ``σταθερό σημείο" του τελεστή, δηλαδή ιδιοσυνάρτηση του τελεστή $\hat{T}$ με ιδιοτιμή 1:

$$\hat{T}G(x) = G(x) = -\alpha G\left[\left(-\frac{x}{a}\right)\right] \tag{42}$$

Η εξ. (42) είναι μία *συναρτησιακή εξίσωση*. Η παγκόσμια σταθερά $\alpha$ καθορίζεται μονοσήμαντα από την εξ. (42) στο $x = 0$

$$G(0) = -\alpha G\left[G(0)\right] \tag{43}$$

Επειδή το ύψος του μεγίστου της $G(x)$ στο $x = 0$ δεν επηρεάζει την συναρτησιακή εξίσωση (αποδεικνύεται εύκολα ότι η $\mu G(x/\mu)$ είναι λύση με ίδιο $\alpha$) θέτουμε $G(0) = 1$ και συνεπώς έχουμε

$$\alpha = -\frac{1}{G(1)} \tag{44}$$

Φυσικά για να βρούμε το $\alpha$ πρέπει να βρούμε την συνάρτηση $G(x)$ δηλαδή να λύσουμε την συναρτησιακή εξίσωση (42). Τζίφος. Δεν υπάρχει λύση μέχρι στιγμής. Για να την λύσουμε θα υποθέσουμε ότι η μορφή της $G(x)$ είναι πολυώνυμο 2ης τάξης. Ο Faugenbaum υπέθεσε ότι είναι πολυώνυμο 16ης τάξης και βρήκε $\alpha = 2.5029078750....$ Έστω λοιπόν ότι έχουμε

$$G(x)_{apr} = 1 - bx^2 \tag{45}$$

τότε η συναρτησιακή εξίσωση γίνεται

$$1 + bx^2 = -a(1+b) - \left(\frac{2b^2}{\alpha}\right)x^2 + O(x^4) \tag{46}$$

Κρατώντας λοιπόν όρους έως 2ης τάξης (μεγάλη προσέγγιση) έχουμε

$$b = (-2 - \sqrt{12})/4 \simeq -1.366, \quad \alpha = |2b| \simeq 2.732 \tag{47}$$

το οποίο απέχει ``μόνο" 10% από την πραγματική τιμή. Μην ξεχνάμε ότι οι προσεγγίσεις που κάναμε ήταν τραγικά απλοϊκές. Τραγικά. Και έτσι εγκαθιδρούμε την παγκοσμιότητα του $\alpha$, μέσω της παγκόσμιας συναρτησιακής εξίσωσης (42).

---

- **Scaling on the parameter axis,** $\delta$

Όπως είπαμε οι τιμές της παραμέτρου $r_n$ όπου σχηματίζεται ευσταθής κύκλος $2^n$ ακολουθούν και αυτές παγκόσμιο νόμο, δηλαδή

$$\frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} \simeq \delta \ , \quad \delta = 4.6693026092... \tag{48}$$

Αν σας φάνηκε πολύπλοκο το να βρούμε το $\alpha$, το να βρούμε το $\delta$ είναι περίπου 100 φορές πιο πολύπλοκο και επειδή δεν έχουμε χρόνο δεν θα κάνουμε τις πράξεις εδώ. Αποδεικνύεται όμως πως το $\delta$ δίνεται από την εξίσωση

$$\delta = \alpha^2 - \alpha \tag{49}$$

Για να δείτε αυτή την απόδειξη κοιτάξτε το βιβλίο του Schuster. Όταν η τάξη του μεγίστου της $f$ δεν είναι δύο αλλά κάποιος άλλος άρτιος αριθμός $2 \cdot z$ τότε το $\delta$ δίνεται από την σχέση $\delta = \alpha^{1+z} - \alpha$

---

## Τι συμβαίνει όταν $r_\infty < r < 4$ ?

---

- **Απειρία κύκλων οποιασδήποτε περιόδου**

(Η συζήτηση ξεκινάει έχοντας στον προτζέκτορα το Orbit Diagramm)
Στο προηγούμενο κεφάλαιο δείξαμε πως σε κρίσιμες τιμές του $r$, $r_n < r < r_{n+1}$ δημιουργείται ένας ευσταθής κύκλος περιόδου $2^n$ ενώ ακριβώς στην τιμή $r = r_{n+1}$ ο κύκλος αυτός γίνεται ασταθής και δημιουργείται ένας ευσταθής με περίοδο $2^{n+1}$. Το σημαντικό όμως είναι ότι ο προηγούμενος κύκλος δεν εξαφανίζεται αλλά είναι απλά ασταθής, δηλαδή υπάρχει ακόμη. Αυτό σημαίνει ότι στην τιμή $r_\infty$ υπάρχει ένας ευσταθής κύκλος με περίοδο $2^\infty$ αλλά επίσης υπάρχουν άπειροι ασταθής κύκλοι με περιόδους όλες τις προηγούμενες δυνάμεις του 2 (τα βλέπουμε όλα ξανά στο orbit diagramm).

Επίσης, όπως είδαμε στο πρώτο μάθημα, μετά το $r_\infty$ υπάρχουν παράθυρα διπλασιασμών περιόδων που αρχίζουν από άλλους ακέραιους, π.χ. 5 ή 6 ή 3. Επειδή αυτά τα παράθυρα ακολουθούν ακριβώς ίδια διαδρομή διπλασιασμού περιόδων, σημαίνει ότι πάλι έχουμε μία απειρία ασταθών κύκλων τώρα με δυνάμεις του 2 επί κάποιον άλλο ακέραιο. Που σημαίνει ότι εν γένη, $\forall r > r_\infty$ θα υπάρχουν πάντα άπειροι ασταθής κύκλοι.

---

- **Θεώρημα Sharkovsky**

Υπάρχει η φράση ``Period 3 implies chaos" που αναφέρθηκε αρχικά από Li και York. Αυτοί είπαν ότι αν μία $f$ έχει περίοδο 3, θα έχει και οποιαδήποτε άλλη περίοδο (είπαν και για την χαοτικότητα της $f$ που θα το δούμε παρακάτω). Εμείς εδώ θα αναφέρουμε το πιο γενικό και ισχυρό θεώρημα που υπάρχει για περιοδικούς κύκλους μίας απεικόνισης, το Θεώρημα Sharkovsky.

**[Oleksandr Mikolaiovich Sharkovsky]:** Έστω η ακόλουθη διάταξη των φυσικών αριθμών[1]:

$$\begin{array}{ccccccc}
3, & 5, & 7, & 9, & ... & (2n+1)\cdot 2^0, & ... \\
2\cdot 3, & 2\cdot 5, & 2\cdot 7, & 2\cdot 9, & ... & (2n+1)\cdot 2^1, & ... \\
2^2\cdot 3, & 2^2\cdot 5, & 2^2\cdot 7, & 2^2\cdot 9, & ... & (2n+1)\cdot 2^2, & ... \\
2^3\cdot 3, & 2^3\cdot 5, & 2^3\cdot 7, & 2^3\cdot 9, & ... & (2n+1)\cdot 2^3, & ... \\
\vdots & & & & & & \\
... & 2^m, & 2^{m-1}, & ... & 2^3, & 2^2, & 2, \quad 1.
\end{array} \tag{50}$$

[1]Η διάταξη αυτή είναι πλήρης αλλά όχι σε καλή σειρά (well-ordering)

τότε το θεώρημα του Sharkovsky λέει το εξής: Εάν μία απεικόνιση $f$ έχει (ελάχιστη) περίοδο έναν ακέραιο $m$ σε αυτή τη διάταξη, τότε αναγκαστικά έχει περίοδο και για οποιονδήποτε ακέραιο $k$ ο οποίος ακολουθεί τον $m$ σε αυτή την διάταξη (στην ίδια τιμή του $r$). Προσέξτε ότι το θεώρημα αυτό δεν λέει τίποτα για την *σταθερότητα* των κύκλων. Συμπεράσματα:

1. Αν υπάρχει περίοδος 3 υπάρχουν όλες οι περίοδοι στην ίδια τιμή παραμέτρων φυσικά (χωρίς να γνωρίζουμε την ευστάθειά τους).

2. Ο μόνος τρόπος για να υπάρχει πεπερασμένο πλήθος περιοδικών κύκλων είναι να είναι δυνάμεις του 2.

3. Οι άπειροι περιοδικοί κύκλοι της $f$ είναι αποτελούν αριθμήσιμο σύνολο.

---

- **Θεώρημα Singer**

Από το θεώρημα του Sharkovsky βλέπουμε πως η λογιστική απεικόνιση πρέπει να έχει σίγουρα άπειρους κύκλους στο παράθυρο που βλέπουμε περίοδο 3. Γιατί όμως εμείς στο orbit diagram για την δεδομένη τιμή του $r_c$ βλέπουμε μόνο έναν κύκλο (τον 3); Και γενικά από το orbit diagram βλέπουμε πως για κάθε $r$ υπάρχει μόνο ένας σταθερός κύκλος της $f$. Ο Sharkovsky δεν αναφέρει τίποτα για την σταθερότητα του κύκλου. Αυτό προκύπτει από το θεώρημα του Singer. Πρέπει να αναφέρουμε ότι ένα κρίσιμο σημείο του map, $f^{'}(x) = 0$, πάντα καταλήγει σε σταθερό σημείο της $f$ ή κάποιας ανώτερης τάξης της (απεδείχθη από Fatou και Julia).

**[David Singer]:** Έστω απεικόνιση $f$ που ορίζεται σε ένα $[A, B]$ και έχει αρνητική Schwarzian παράγωγο παντού σε αυτό. Αν ένα σταθερό σημείο $p$ αυτής ή κάποιας ανώτερης τάξης της (κύκλος) έχει μία λεκάνη έλξης $(a, b)$ τότε αναγκαστικά υπάρχει σε αυτήν ένα κρίσιμο σημείο της $f$ όπου έλκεται στο $p$. Αυτό σημαίνει πως εάν η $f$ έχει $k$ κρίσιμα σημεία τότε μπορεί να έχει το μέγιστο $k + 2$ ευσταθή σταθερά σημεία ή κύκλους (οποιασδήποτε τάξης) όπου οι $+2$ περιπτώσεις πρέπει οπωσδήποτε να έχουνε λεκάνες έλξης τα διαστήματα $[A, a)$ και $(b, B]$.

Εφαρμογή στην λογιστική: Έχει ένα μόνο κρίσιμο σημείο οπότε μπορούμε να έχουμε μόνο 1 + 2 ευσταθή σημεία/κύκλους. Όμως τα διαστήματα $[0, a)$ και $(b, 1]$ δεν μπορούν να είναι λεκάνες έλξης ευσταθών σημείων διότι το 0 είναι το ασταθές σημείο και το 1 οδηγεί στην επόμενη επανάληψη στο 0. Οπότε υπάρχει πάντα μόνο ένας σταθερός κύκλος (ή σταθερό σημείο) για οποιαδήποτε τιμή του $r$.

---

- **Intermittency**

Κοντά στον κύκλο 3 λαμβάνει χώρα ένα πολύ ενδιαφέρον χαοτικό φαινόμενο που αποκαλείται Intermmitency ή αλλιώς διαλειπτότητα. Στην τιμή $r_c = 1 + \sqrt{8}$ δημιουργείται ευσταθής κύκλος 3 στην λογιστική απεικόνιση. Ας δούμε μία τροχιά για $r = r_c + 0.002$ (intermittencyafter.jpg). Βλέπουμε πως αυτή γρήγορα τείνει στην περίοδο 3 όπως φαίνεται και από το κάτω μέρος του γραφήματος που δείχνει την εξέλιξη της θέσης της τροχιάς πλην του εαυτού της 3 βήματα πριν. Προφανώς αν $x_{n+3} - x_n = 0$ τότε βρισκόμαστε σε περίοδο 3. Το ενδιαφέρον είναι τι συμβαίνει ακριβώς πριν την κρίσιμη τιμή $r_c$. Τι συμβαίνει; (ερώτηση). Θα περιμέναμε χαοτική συμπεριφορά (που ισχύει). Όμως υπάρχει ένας περίεργος τόνος τάξης. Βλέπουμε εικόνα intermittencybefore.jpg. Υπάρχουν διαστήματα που η τροχιά είναι ακανόνιστη. Υπάρχουν όμως και διαστήματα όπου η τροχιά είναι περιοδική με περίοδο 3!!! Αυτά τα διαστήματα διακόπτονται από χαοτική κίνηση όπου μετά ακολουθεί πάλι περιοδική (με περίοδο 3). Για αυτό αυτό το φαινόμενο ονομάζεται διαλειπτότητα. Μία regular συμπεριφορά διακόπτεται από μία κανονική και ξανά το ίδιο. Τα διαστήματα regular και chaotic δεν έχουν πάντα ίδιο μήκος, και αυτό είναι που κάνει αυτό το φαινόμενο πολύ ενδιαφέρον.

Η εξήγησή του είναι εύκολη, αρκεί να δούμε το γράφημα της $f^{(3)}(x)$ κοντά στο $r_c$ (το βλέπουμε μέσω του Trajectories of the Logistic στην mathematica). Ακριβώς στο $r_c$ το γράφημα εφάπτεται στην διαγώνιο. Μετά το $r_c$ δημιουργεί 3 ευσταθή και 3 ασταθή σημεία ισορροπίας μέσω μίας Tangent Bifurcation.

Και πριν και μετά το $r_c$ το γράφημα πάντα έχει 2 σημεία τομής ακόμη με την διαγώνιο που αντιστοιχούν στα FP πρώτης τάξης της $f$. Τώρα, λίγο πριν το $r_c$ το γράφημα είναι πολύ κοντά στην διαγώνιο έτοιμο να κάνει επαφή. Βάζουμε εικόνα NarrowChannel.jpg η οποία είναι cobweb diagram της $f^{(3)}$ ζουμαρισμένο σε ένα από τα σημεία επαφής. Αυτό που συμβαίνει είναι ότι δημιουργούνται 3 πολύ στενά ``κανάλια". Κάνουμε την cobweb εξέλιξη κοντά στα στενά κανάλια στον πίνακα (εικόνα NarrowChannel.jpg). Επειδή η εξέλιξη της $f^{(3)}$ σε αυτά είναι σχεδόν σταθερή, η $f$ φαίνεται να έχει περίοδο 3. Όταν η τροχιά ξεφύγει από το κανάλι, κάνει χαοτική κίνηση έως ότου βρεθεί πάλι κοντά σε αυτό.

Αυτό το φαινόμενο μάλιστα λαμβάνει χώρα πριν την δημιουργία κάθε καινούριου κύκλου, αρκεί η διακλάδωση να είναι εφαπτομενική και να είμαστε αρκετά κοντά στο σημείο της διακλάδωσης. Για παράδειγμα αυτό συμβαίνει και για κύκλο 5, όπως φαίνεται στο $r = 3.738$. Μάλιστα κοιτάξτε πως υπάρχουν κάποιες σκούρες καμπύλες στην χαοτική περιοχή οι οποίες επεκτείνονται και γίνονται οι καμπύλες των περιοδικών κύκλων (στον κύκλο 3 φαίνεται στο μέγιστο). Αφού είναι πιο σκούρες σημαίνει πως η πυκνότητα των σημείων εκεί είναι μεγαλύτερη το οποίο συμβαδίζει πλήρως με την ιδέα της Intermittency. Οι σκούρες καμπύλες αυτές αναφέρονται στην βιβλιογραφία ως *dark curves*.

Το φαινόμενο της Intermittency παρατηρήθηκε σε πραγματικά υγρά σε πειράματα. Συμβαίνει επίσης και στο μοντέλο του Lorentz και σε πληθώρα άλλων δυναμικών συστημάτων. Η Intermittency είναι ένας από τους δρόμους προς το χάος.

---

## Εργαλεία Μελέτης του Χάους

---

- **Εκθέτες Lyapunov**

Οι εκθέτες Lyapunov είναι ένας τρόπος να ``μετρήσουμε" ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά χαοτικών δυναμικών. Ένα χαοτικό σύστημα έχει *ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες* υπό την έννοια ότι τροχιές που ήταν αρχικά κοντά, απομακρύνονται εκθετικά. Ο εκθέτης Lyapunov είναι αυτός που χαρακτηρίζει την εκθετική απόκλιση. Στην περίπτωση των μονοδιάστατων απεικονίσεων αν δύο τροχιές έχουν αρχική απόκλιση $\delta_0$ τότε

$$|\delta_n| \approx |\delta_0| e^{\lambda \cdot n} \quad \Rightarrow \quad \lambda \approx \frac{1}{n} \ln \left| \frac{\delta_n}{\delta_0} \right| \tag{51}$$

Θυμόμαστε ότι $\delta_n = f^{(n)}(x_0 + \delta_0) - f^{(n)}(x_0)$ οπότε αν πάρουμε το όριο $\delta_0 \to 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} \lambda &\approx \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^{(n)}(x_0 + \delta_0) - f^{(n)}(x_0)}{\delta_0} \right| \\ &= \frac{1}{n} \ln \left| f'^{(n)}(x_0) \right| \end{aligned} \tag{52}$$

και χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας καταλήγουμε

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| f'(x_i) \right| \right] \tag{53}$$

Φαίνεται ότι ο εκθέτης Lyapunov εξαρτάται από την αρχική συνθήκη $x_0$. Όμως εάν υπάρχει ελκυστής στο σύστημα, όλες οι τροχιές που καταλήγουν σε αυτόν έχουν ίδιο εκθέτη Lyapunov. Για σταθερά σημεία ή σταθερούς κύκλους είναι αρνητικός ενώ για χαοτικές τροχιές και παράξενους ελκυστές θετικός (θα μιλήσουμε αργότερα για παράξενους ελκυστές).

---

- **Lyapunov στο Tent map**

Ένα σύστημα που μπορεί να υπολογισθεί αναλυτικά ο εκθέτης Lyapunov είναι το Tent Map ή τριγωνική απεικόνιση :

$$x_{n+1} = \Delta_r(x_n) := \begin{cases} 2rx_n & \text{for} \quad 0 \leq x_n < \frac{1}{2} \\ 2 - 2rx_n & \text{for} \quad \frac{1}{2} \leq x_n \leq 1 \end{cases} \tag{54}$$

Το Tent Map ορίζεται πολύ πιο κομψά με απόλυτο:

$$\Delta_r(x) \equiv r\left(1 - 2\left|\frac{1}{2} - x\right|\right)$$

Δηλαδή η απεικόνιση είναι ένα τρίγωνο ύψους $r$ με κέντρο το $1/2$, άρα είναι γραμμική κατά μέρη. Αυτή για $r < 1/2$ έχει ευσταθές σημείο ισορροπίας το $0$ ενώ για $r > 1/2$ έχει 2 ασταθή FP. Όταν$r > 1/2$ το Tent Map έχει πάντα χαοτική εξέλιξη για όλες τις τροχιές του. Σε κάθε επανάληψη μία αρχική απόσταση $\delta_0$ μεταξύ δύο σημείων μεταβάλλεται κατά παράγοντα $2r$ αφού κάθε σημείο απεικονίζεται στον εαυτό του επί παράγοντα $2r$. Άρα στην μία περίπτωση οι τροχιές έλκονται κάπου ενώ στην άλλη εύκολα βλέπουμε πως υπάρχει ευαίσθητη εξάρτηση στις αρχικές συνθήκες και ως συνέπεια, χαοτική κίνηση. Αφού λοιπόν οι αποκλίσεις μεταξύ τροχιών μεταβάλλονται γεωμετρικά με παράγοντα $2r$ ο εκθέτης Lyapunov είναι απλά

$$\begin{aligned} |\delta_n| \approx |\delta_0|(2r)^n = |\delta_0|e^{\lambda \cdot n} \Rightarrow \\ \lambda = \ln 2r \end{aligned} \tag{55}$$

Φαίνεται ξεκάθαρα ότι όταν $r < 1/2$ που είμαστε σε σταθερή δυναμική, ο Lyapunov είναι αρνητικός ενώ όταν $r > 1/2$ που είμαστε σε χαοτική δυναμική ο lyapunov είναι θετικός. Παρατηρήστε επίσης ότι ο Lyapunov μηδενίζεται στο κρίσιμο σημείο της μετάβασης από την μία φάση στην άλλη.

*Σημείωση:* Με την ευκαιρία των εκθέτων Lyapunov, ας μιλήσουμε για το γραμμικό σύστημα $x_{n+1} = ax_n$. Σε αυτό εκθέτης Lyapunov είναι πάντα το $\ln a$. Τα γραμμικά συστήματα είναι πάντα επιλύσιμα κτλ και η συμπεριφορά τους είναι τετριμμένη. Αν $a > 1$ απειρισμός, αν $a = 1$ τα πάντα σταθερά σημεία και αν $a < 1$ πάντα μηδενισμός. Για οποιεσδήποτε διαστάσεις είναι επιλύσιμα.

*Προσοχή:* Υπάρχει μία σύγχυση ως προς τους Lyapunov στα συνεχή και στα διακριτά συστήματα. Να το σκέφτεστε ως εξής: Δεν έχει σημασία τι σύστημα μελετάω, ο Lyapunov μετράει την εκθετική απόκλιση. Συγκρίνοντας το $\dot{x} = ax$ και το $x_{n+1} = bx_n$ βλέπουμε πως στο συνεχές λόγω της φύσης του συστήματος, η λύση είναι $e^{at}x_0$ που σημαίνει ότι ο εκθέτης Lyapunov είναι το $a$. Στο διακριτό σύστημα όμως η λύση είναι $b^n x_0$ δηλαδή το $b$ δεν δίνει την εκθετική αύξηση αλλά την απευθείας αύξηση. Οπότε εδώ μετασχηματίζουμε την λύση σαν $e^{\ln(b)\cdot n}x_0$ απ' την οποία φαίνεται ότι ο εκθέτης Lyapunov είναι το $\ln(b)$.

---

- **Αριθμητικός υπολογισμός εκθέτη Lyapunov στην Λογιστική**

Για να υπολογίσουμε αριθμητικά τον Lyapunov βασιζόμαστε στην σχέση (53). Αρχίζοντας με ένα $x_0$ εξελίσσουμε το σύστημα για πολλές επαναλήψεις. Μετά πετάμε έξω έναν μικρό αριθμό πρώτων επαναλήψεων που είναι μεταβατικά φαινόμενα και υπολογίζουμε τον εκθέτη. Σε συστήματα 2 και πάνω διαστάσεων υπάρχει διαφοροποίηση στην διαδικασία.

Δείχνουμε απλό πρόγραμμα Matlab που υπολογίζει εκθέτες Lyapunov για την λογιστική. Μετά από αριθμητικό υπολογισμό τους δείχνω την εικόνα SchusterLyapunov όπου έχουμε orbit diagram και εκθέτες Lyapunov μαζί (η αν μπορούμε την φτιάχνουμε επιτόπου στο Laptop).

**HOMEWORK:** Φτιάχνουν πρόγραμμα MatLab που υπολογίζει orbit diagram και από κάτω εκθέτες Lyapunov για την λογιστική απεικόνιση. Μέσω αυτού του προγράμματος, υπολογίστε με ακρίβεια τουλάχιστον 6 δεκαδικών ψηφίων την τιμή του $r_\infty$.

---

- **Density of States - Invariant measure**

Ένα άλλο εργαλείο για την μελέτη των χαοτικών συστημάτων είναι η πυκνότητα καταστάσεων η οποία όταν είναι σταθερή στον χρόνο ονομάζεται αναλλοίωτη πυκνότητα/μέτρο. Το σύστημα μας έχει διακριτές καταστάσεις. Θυμάστε στην κβαντομηχανική ποια ήταν η αναλυτική έκφραση της πυκνότητας ενέργειας για διακριτό φάσμα; Δέλτα συναρτήσεις. Και εδώ έτσι ορίζεται η πυκνότητα καταστάσεων όπου ονομάζεται και Invariant Measure στην βιβλιογραφία:

$$\rho(x; x_0) := \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} \delta\left[x - f^{(n)}(x_0)\right] \tag{56}$$

Γιατί; Σε κάθε βήμα $n$ το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση $f^{(n)}(x_0)$ η οποία είναι μία διακριτή στάθμη. Το φάσμα των καταστάσεων οπότε, αφού αποτελείται από διακριτές καταστάσεις, θα είναι δ-κατανομές με κέντρα αυτές τις καταστάσεις, δηλαδή τα $f^{(n)}(x_0)$. Από τον ορισμό φαίνεται ότι η $\rho(x)$ πρέπει να είναι (και είναι) κανονικοποιημένη. Όταν η $\rho(x)$ δεν εξαρτάται από το $x_0$ λέμε ότι το σύστημα είναι εργοδικό. Δηλαδή ο χρονικός μέσος μίας ποσότητας $A(x)$ είναι ίδιος με τον χωρικό μέσο:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} A(x_i) \equiv \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} A\left[f^{(n)}(x_0)\right] = \int_0^1 \rho(x)A(x)dx \tag{57}$$

Τα όρια του ολοκληρώματος είναι το πεδίο ορισμού του δυναμικού μας συστήματος. Για αυτά που έχουμε δει μέχρι στιγμής ήταν το 0-1.

Για να βρούμε αναλυτικά την έκφραση της $\rho(x)$ σκεφτόμαστε ως εξής: Κάθε σημείο $x_0$ εξελίσσεται από την δυναμική στο $f(x_0)$. Άρα η δέλτα κατανομή[2] εξελίσσεται από την $\delta(x - x_0)$ στην $\delta(x - f(x_0))$. Αυτή όμως μπορεί να γραφτεί έξυπνα ως:

$$\delta[x - f(x_0)] = \int_0^1 \delta[x - f(y)]\delta(y - x_0)dy \tag{58}$$

Γενικεύοντας τον συλλογισμό αυτόν, η εξέλιξη μίας τυχαίας κατανομής (εδώ η πυκνότητα) μία στιγμή $n$ δίνεται από:

$$\rho_{n+1}(x) = \int_0^1 \delta[x - f(y)]\rho_n(y)dy \tag{59}$$

Η εξίσωση (59) ονομάζεται Frobenius-Perron για την εξέλιξη πυκνοτήτων καταστάσεων. Η αναλλοίωτη πυκνότητα καταστάσεων είναι λοιπόν η ιδιοσυνάτηση του τελεστή Frobenius-Perron με ιδιοτιμή την μονάδα, δηλαδή

$$\rho(x) = \hat{P}_f[\rho(x)] \quad \Rightarrow \quad \rho(x) = \int_0^1 \delta[x - f(y)]\rho(y)dy \tag{60}$$

Αυτή υπολογίζεται συνήθως αριθμητικά μέσω υπολογιστή. Μπορούμε όμως να την βρούμε αναλυτικά για κάποιες περιπτώσεις.

**HOMEWORK:** Βρείτε την αναλλοίωτη πυκνότητα/μέτρο για ένα σύστημα με ευσταθή κύκλο. Μέσω του προγράμματος που φτιάχνει το Orbit Diagram της λογιστικής, βρείτε μου και γράψτε μου αναλυτικά την έκφραση της αναλλοίωτης πυκνότητας σε έναν περιοδικό κύκλο σε τιμή του $r$ που εσείς θα επιλέξετε, αλλά να είναι σε κύκλο 5, 3 ή 6.

---

[2] Η δέλτα "συνάρτηση" δεν είναι συνάρτηση από μαθηματικής πλευράς. Το αντικείμενο αυτό είναι *generalized function* ή όπως είναι πιο γνωστό σε εμάς, distribution.

- **Invariant measure of Tent Map**

Αυτός ο υπολογισμός είναι ένα πολύ σημαντικό πρώτο παράδειγμα. Το Tent Map (τριγωνική απεικόνιση) θυμίζουμε δίνεται από την σχέση (54). Όμως για $r = 1$ καλύπτει όλο το διάστημα $[0, 1]$ και είναι εργοδικό.

$$x_{n+1} = \Delta_{r=1}(x_n) := \begin{cases} 2x_n & \text{for} \quad 0 \leq x_n < \frac{1}{2} \\ 2 - 2x_n & \text{for} \quad \frac{1}{2} \leq x_n \leq 1 \end{cases} \tag{61}$$

Βάζοντας το στην σχέση (60) έχουμε:

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \int_0^{1/2} \delta[x - (2y)]\rho(y)dy + \int_{1/2}^1 \delta[x - (2 - 2y)]\rho(y)dy \\ \Rightarrow \rho(x) &= \frac{1}{2}\left[\rho\left(\frac{x}{2}\right) + \rho\left(1 - \frac{x}{2}\right)\right] \end{aligned} \tag{62}$$

Ποια είναι μία προφανής λύση αυτής της εξίσωσης; Η $\rho(x) = 1$ η οποία είναι και κανονικοποιημένη στο $[0, 1]$. Αποδεικνύεται μάλιστα πως αυτή η λύση είναι και μοναδική (βιβλίο Schuster). Αυτό το αποτέλεσμα είναι πολύ σημαντικό. Μία τροχιά που ξεκινά από ένα $x_0$ καλύπτει *ομοιόμορφα* το $[0, 1]$ υπό την εξέλιξη του $\Delta_{r=1}$. Αυτό φυσικά συνεπάγεται ότι είναι εργοδικό στο $r = 1$ αφού καλύπτει με συνεχή τρόπο όλο το διάστημα. Επίσης η $\Delta_{r=1}$ θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί σαν γεννήτρια τυχαίων αριθμών. Η $\rho(x)$ δεν είναι πάντα σταθερή όπως θα δούμε στο επόμενο παράδειγμα.

---

- **Invariant measure of Logistic Map at $r = 4$**

Η λογιστική απεικόνιση για $r = 4$ είναι η

$$x_{n+1} = f_4(x_n) = 4x_n(1 - x_n) \tag{63}$$

Το μόνο που αλλάζει από $r = 3.99$ στο $r = 4$ (για παράδειγμα) είναι ότι η απεικόνιση πλέον καλύπτει ΟΛΟ το διάστημα $[0, 1]$. Αυτή η απλή αλλαγή έχει τραγικές συνέπειες στην δυναμική του Map. Πλέον η απεικόνιση είναι εργοδική και επιλύσιμη [3]! Δηλαδή μπορούμε να βρούμε το $x(n) = \Psi(n; x_0)$ !!!!!

Το πρώτο βήμα για να βρούμε την αναλλοίωτη πυκνότητα της λογιστικής είναι να δούμε πως η $f_4$ μπορεί να μετατραπεί στην τριγωνική $\Delta_1$ με τον εξής μετασχηματισμό:

$$x = \sin^2\left(\frac{\pi y}{2}\right) = \frac{1}{2}[1 - \cos(\pi y)] \tag{64}$$

Τώρα επειδή πρέπει $x \in [0, 1]$ πρέπει (το δείχνουμε) το $y \in [0, 1]$. Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$\begin{aligned} \sin^2\left(\frac{\pi y_{n+1}}{2}\right) &= 4\tfrac{1}{2}[1 - \cos(\pi y_n)][1 - \tfrac{1}{2}(1 - \cos(\pi y_n))] \\ &= 2[1 - \cos(\pi y_n)][\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(\pi y_n)] \\ &= 1 - \cos^2(\pi y_n) \\ &= \sin^2(\pi y_n) \end{aligned}$$

Οπότε

$$\begin{aligned} \frac{\pi y_{n+1}}{2} &= \pm \pi y_n + k\pi \Rightarrow \\ y_{n+1} &= \pm 2y_n + 2k \quad , \; k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \tag{65}$$

Τώρα όπως είπαμε πρέπει το $y_{n+1}$ να είναι στο [0,1]. Οπότε για $y_n \leq \frac{1}{2}$ έχουμε το + πρόσημο και $k = 0$ και για $y_n > \frac{1}{2}$ έχουμε το - πρόσημο και $k = 1$. Αυτό είναι η τριγωνική απεικόνιση για $r = 1$ (εξ. (61)).

[3] Για να γράψουμε την επιλύσιμη μορφή της, την συνδέουμε με το Sawtooth Map που δεν έχουμε αναφέρει εδώ. Κοιτάξτε το βιβλίο του Schuster.

Επειδή λοιπόν η λογιστική και η τριγωνική σχετίζονται με έναν ομαλό, συνεχή μετασχηματισμό, η αναλλοίωτη πυκνότητα της λογιστικής πρέπει να είναι και αυτή ομαλή και συνεχής (εδώ θα μπορούσαμε να πούμε για conjugacy[4]). Επίσης αφού ο μετασχηματισμός είναι μονότονος, τα διαστήματα της τριγωνικής $[y, y + dy]$ και τα διαστήματα της λογιστικής που προκύπτουν από την αλλαγή μεταβλητών $[x, x + dx]$ έχουν την ίδια συχνότητα επίσκεψης ή αλλιώς ίδιο στατιστικό βάρος στην αντίστοιχη αναλλοίωτη πυκνότητα. Πρέπει με λίγα λόγια:

$$\rho_\Delta(y)|dy| = \rho_f(x)|dx| \tag{66}$$

Και αφού $y = y(x)$ επειδή ο μετασχηματισμός είναι μονότονος και άρα αντιστρέψιμος, καταλήγουμε σε:

$$\rho_f(x) = \rho_\Delta(y(x)) \left| \frac{dy(x)}{dx} \right| \tag{67}$$

Κάνοντας τις πράξεις που έχουνε μέσα $\arcsin(x)$ και παραγώγους τους παίρνουμε

$$\rho_f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \tag{68}$$

Αμέσως βλέπουμε ότι αυτή όχι μόνο δεν είναι σταθερή ποσότητα αλλά έχει και μάλιστα 2 πόλους! Γράφημα στο LogisticDensity400.jpg. Παρόλα αυτά είναι εργοδική αφού καλύπτει με συνεχή τρόπο το $[0, 1]$. Παρατηρήστε στο orbit diagram πως υπάρχουν 2 πυκνές καμπύλες (dark curves) όπου οδηγούν στο 0 και στο 1 αντίστοιχα.

Τέλος ας δούμε έναν αριθμητικό υπολογισμό για την αναλλοίωτη πυκνότητα στην λογιστική στο $r = 3.8$ (εικόνα LogisticDensity380.jpg). Αριθμητικά ο υπολογισμός γίνεται ως εξής: Εξελίσσουμε ένα αρχικό σημείο για πάρα πολύ μεγάλο αριθμό χρόνων. Ύστερα παίρνουμε τα σημεία που βγήκαν και τα κάνουμε ιστόγραμμα (στο Origin π.χ.). Όσο πιο στενές οι στήλες του ιστογράμματος και όσο περισσότερα τα σημεία που έχουμε, τόσο καλύτερο θα είναι το αποτέλεσμα.

Βλέπουμε πρώτον ότι η πυκνότητα δεν καλύπτει όλο το $[0, 1]$ που είναι αναμενόμενο από το orbit diagram. Οι κορυφές που εμφανίζονται αυξάνονται επ' άπειρων. Επίσης όσο αυξάνουμε τα numerics εμφανίζονται και άλλες κορυφές. Πολλές από αυτές τις κορυφές, μπορούμε να τις ταυτοποιήσουμε στο orbit diagram με κάποιες σκούρες καμπύλες. Π.χ. αυτή που είναι πιο κοντά στο 1 φαίνεται εύκολα και φαίνεται ότι είναι διπλή. Γενικά μπορείτε να σκέφτεστε την invariant density σαν μία τομή του orbit diagram με "άπειρα" (κατ' ουσίαν πάρα πολλά) numerics.

**HOMEWORK:** Υπολογίστε αριθμητικά την αναλλοίωτη πυκνότητα της λογιστικής για $r = 3.75317$. (Ο υπολογισμός γίνεται με μορφή histogram. Όσο πιο μεγάλες τροχιές και πιο μικρή ανάλυση έχουν οι στήλες του histogram τόσο πιο κοντά είμαστε στην πραγματικότητα). Προσπαθήστε να έχετε μεγάλα numerics. Πριν το παράξετε, προσπαθήστε να δείτε μέσω του orbit diagram περίπου πόσες κορυφές θα έχετε. Αφού το παράξετε, προσπαθήστε να ταυτοποιήσετε τις κορυφές που έχει η density σας μέσο του orbit diagram σε αυτό το $r$.

[4] Η ισοδυναμία απεικονίσεων λέγεται cojugacy. Στο βιβλίο του Schlomo υπάρχουν πολλά για αυτό.

# Essence of Chaos - Streching and Folding

Πότε ένα σύστημα λέγεται χαοτικό; Υπάρχουν διάφοροι μαθηματικοί ορισμοί (μιας και δεν έχει οριστεί πλέον καταληκτικά), όμως δεν θα αναφερθούμε εδώ σε ορισμούς με σύνολα και απεικονίσεις. Θα πούμε τα κύρια στοιχεία ενός χαοτικού συστήματος, τα οποία είναι τα εξής:

1. Το σύστημα είναι αιτιοκρατικό (Deterministic)
2. Οι τροχιές στον χώρο φάσεων δεν ακολουθούν περιοδική συμπεριφορά, ούτε σε άπειρο χρόνο (δεν καταλήγουν ποτέ σε περιοδική συμπεριφορά)
3. Ευαίσθητη εξάρτηση από αρχικές συνθήκες. Κοντινές τροχιές αποκλίνουν εκθετικά γρήγορα (τουλάχιστον στην αρχική τους εξέλιξη)
4. Οι τροχιές είναι φραγμένες στον χώρο φάσεων (δεν ξεφεύγουν στο άπειρο)

Τα χαοτικά συστήματα που είδαμε και θα δούμε παρακάτω είναι *αποσβεστικά*. Δηλαδή όγκοι στον χώρο φάσεων συρρικνώνονται και τείνουν σε ένα σημειοσύνολο που είναι ο *ελκυστής* του συστήματος (εάν υπάρχει ελκυστής). Ο ελκυστής είναι ένα σύνολο διάστασης αναγκαστικά μικρότερης από την διάσταση του συστήματος. Συνεπώς έχει μέτρο 0 στον χώρο φάσεων του συστήματος.

Όμως πως γίνεται οι τροχιές να τείνουν σε κάποιον ελκυστή αλλά και να αποκλίνουν εκθετικά γρήγορα (αρχικά); Αφού υπάρχει ελκυστής και ο όγκος στον χώρο φάσεων συρρικνώνεται, αυτό διαισθητικά αντιτίθεται στην εκθετική απόκλιση.

Οι ελκυστές των χαοτικών συστημάτων ονομάζονται Παράξενοι Εκλυστές (Strange Attractors) και συνήθως είναι Fractals. Ο μηχανισμός που τους δημιουργεί περιγράφεται από το σχήμα ``Τέντωμα και Δίπλωμα" (Stretching and Folding). Δηλαδή, ένας όγκος στον χώρο φάσεων αρχικά τεντώνεται από την δυναμική. Μετά το τέντωμα διπλώνεται πίσω στο αρχικό διάστημα. Αυτό φαίνεται στην εικόνα (horseshoe.jpg). Θα δούμε 2 συστήματα τα οποία είναι πολύ καλά παραδείγματα αυτής της διαδικασίας. Το κλειδί είναι ότι το ``τέντωμα" θετικό σε μία από τις διαστάσεις του συστήματος ενώ αρνητικό στις άλλες, καταλήγοντας έτσι στην συρρίκνωση όγκων στον χώρο φάσεων.

Πείτε ότι θα ζυμώσουμε ψωμάκι. Παίρνω την ζύμη λοιπόν και βάζω 5 σταγόνες κόκκινη μπογιά πολύ κοντά. Όταν ζυμώνω αυτό που κάνω είναι να τεντώνω την ζύμη και μετά να την διπλώνω στον εαυτό της. Οι κόκκινες σταγόνες θα ακολουθούν χαοτική κίνηση. Αρχικά θα αποκλίνουν εκθετικά, μετά θα ξανάρθουν κοντά κτλ. Αυτή η διαδικασία είναι διαισθητικά το stretching and folding.

Χάος μπορεί να υπάρξει και στα χαμιλτονιανά συστήματα όπου ο όγκος στον χώρο φάσεων διατηρείται. Με αυτά θα ασχοληθούμε αργότερα.

---

- **Stretching and folding στην Λογιστική**

Το στοιχείο stretching and folding υπάρχει φυσικά και στην λογιστική απεικόνιση. Είναι εύκολο να το δούμε για $r = 4$. Στην εικόνα FoldingLogistic.png βλέπουμε αριστερά την λογιστική απεικόνιση και δεξιά ένα "τρισδιάστατο" γράφημα όπου έχουμε διάφορα αρχικά σημεία $x_t$ καθώς και την πρώτη και δεύτερη επανάληψή τους $x_{t+1}$, $x_{t+2}$. Αν κοιτάξουμε από πάνω προς το επίπεδο $x_t - x_{t+1}$ θα δούμε την λογιστική. Αν κοιτάξουμε προς τον τοίχο, δηλαδή το επίπεδο $x_t - x_{t+2}$ θα δούμε την δεύτερη τάξη της λογιστικής. Αν κοιτάξουμε προς το επίπεδο $x_{t+1} - x_{t+2}$ τι θα δούμε; Προφανώς πάλι την λογιστική. Φυσικά κατανοούμε πως το $x_{t+2}$ εξαρτάται μόνο από το $x_t$ και όχι από το $x_{t+1}$. Γιαυτό και στον τρισδιάστατο χώρο, το γράφημα είναι μονοδιάστατη καμπύλη. Αυτό που θέλω να παρατηρήσετε είναι το εξής: Στα σημεία τις λογιστικής με την μέγιστη κλίση, υπάρχει και ο μέγιστος διαχωρισμός των σημείων. Κοιτώντας τα πράγματα από την μεριά του γραφήματος $x_{t+1} - x_{t+2}$ το stretching and folding είναι προφανές.

Τους κάνω με τα χέρια μου το stretching and folding. Αρχίζουμε από την αριστερή εικόνα. Την τραβάμε και την καμπυλώνουμε, ώστε να γίνει η καμπύλη της 2ης εικόνας. Μετά την κάνουμε πίτα στο επίπεδο $x_{t+1} - x_{t+2}$.

---

- **Πέταλο (Horseshoe)**

Η διαδικασία του Stretching and Folding περιγράφεται εύκολα με αυτό που αποκαλούμε ``πέταλο'' στα χαοτικά συστήματα. Το πέταλο περιγράφει καλά την διαδικασία του ζυμώματος (βλέπουμε εικόνα horseshoe.jpg). Παρατηρήστε ότι συνεχώς γίνεται επανατροφοδότηση του αποτελέσματος στην ίδια δυναμική, όπως γινόταν και στα 1D Maps. Λέω ότι το b' και το b είναι το ίδιο σημείο ώστε να μην μειώνεται ο όγκος και απλά για να φαίνεται καλύτερα τα έχει βάλει σε άλλη θέση.

Αν συνεχίσουμε την διαδικασία στο άπειρο το σύνολο των σημείων $S_\infty$ θα έχει άπειρες αναδιπλώσεις. Μάλιστα αν πάρουμε μία κάθετη τομή του, αυτή θα είναι ένα Καντοριανό set (αν δεν έχουν ακούσει ποτέ για καντοριανά σετ τους λέω ότι θα ακούσουνε στο Baker's Map). Αυτό που έχει σημασία όμως είναι ότι το σύνολο $S_\infty$ είναι και συνεχές αλλά και ομαλό. Το $S_\infty$ είναι ο παράξενος ελκυστής του δυναμικού συστήματος του Πετάλου διότι οποιοδήποτε σημείο στον χώρο φάσεων θα καταλήξει σε αυτό το fractal σύνολο.

---

## Μαθηματικό Πέταλο

---

- **Ορισμός Πετάλου**

Το πέταλο ορίζεται με μαθηματική αυστηρότητα ως εξής:
Έστω μία συνεχής απεικόνιση $f : I \to R$. Αυτή παρουσιάζει πέταλο αν υπάρχει ένα $J \supseteq I$ και δύο ανοιχτά διαστήματα $K_1, K_2 \supseteq J$ ώστε:

$$f(K_1) = f(K_2) = J \quad \text{και} \quad K_1 \cap K_2 = \emptyset \tag{69}$$

Μία απεικόνιση λέγεται χαοτική αν η $f^{(n)}$ για κάποιο $n \geq 1$ παρουσιάζει πέταλο.
**HOMEWORK:** Έστω η λογιστική απεικόνιση για $r = 4$. Αποδείξτε ότι έχει πέταλο (βρείτε τα $J,\ K_1,\ K_2$).

---

- **Period 3 Implies Chaos**

**[Yorke and Li]:** Εάν μία συνεχής απεικόνιση $f : [a, b] \to R$ έχει ελάχιστη περίοδο 3 τότε έχει πέταλο και άρα είναι χαοτική.

Για την απόδειξη του χρειαζόμαστε το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής (ΘΕΤ): Έστω μία συνεχής απεικόνιση $f : [a, b] \to R$ με $f(a) = c$ και $f(b) = d$. Τότε

$$\forall x \in [c, d]\ \exists\, y \quad \text{τέτοιο ώστε} \quad f(y) = x \tag{70}$$

Επίσης χρειαζόμαστε το Θεώρημα Ύπαρξης Σταθερού Σημείου (ΘΥΣΣ): Έστω μία συνεχής απεικόνιση $f : [a, b] \to R$ με $f(a) \leq a$ και $f(b) \geq b$ ή $f(a) \geq a$ και $f(b) \leq b$ τότε

$$\exists\, \xi \in [a, b] \quad \text{τέτοιο ώστε} \quad f(\xi) = \xi \tag{71}$$

$\to$ **Απόδειξη του Period 3 Implies Chaos:**
Έστω τα σημεία του κύκλου 3 να είναι τα:

$$x_1 < x_2 < x_3 \quad \text{με} \tag{72}$$

$$f(x_1) = x_2 \quad , \quad f(x_2) = x_3 \quad , \quad f(x_3) = x_1 \tag{73}$$

Αφού $f(x_2) = x_3 > x_2$ και $f(x_3) = x_1 < x_3$ από ΘΥΣΣ έχουμε:

$$\exists\ z \in (x_2, x_3) \quad \text{τέτοιο ώστε} \quad f(z) = z \tag{74}$$

Επίσης αφού $f(x_1) = x_2 < z$ και $f(x_2) = x_3 > z$ από ΘΕΤ έχουμε:

$$\exists\ y \in (x_1, x_2) \quad \text{τέτοιο ώστε} \quad f(y) = z \tag{75}$$

Οπότε συνοψίζοντας καταλήξαμε στα σημεία:

$$x_1 < y < x_2 < z < x_3 \quad \text{με} \tag{76}$$

$$f(x_1) = x_2\ ,\ f(y) = z\ ,\ f(x_2) = x_3\ ,\ f(z) = z\ ,\ f(x_3) = x_1 \tag{77}$$

Τώρα θα δείξουμε πως η $f^{(2)}$ έχει πέταλο. Ισχύει πως $f^{(2)}(y) = z$ , $f^{(2)}(x_2) = x_1 < y$ και $f^{(2)}(z) = z$. Συνεπώς από ΘΕΤ έχουμε δύο αποτελέσματα:

1. υπάρχει $t\ \in (y, x_2)$ ώστε $f^{(2)}(t) = y$
2. υπάρχει $\ \in (x_2, z)$ ώστε $f^{(2)}(s) = y$

Οπότε ορίζουμε τα διαστήματα $K_1 = (y, t)$ και $K_2 = (s, z)$ τα οποία είναι και τα δύο υποσύνολα του $J = (y, z)$. Επίσης ισχύει λόγω των $s$ και $t$ ότι

$$f^{(2)}(K_1) = f^{(2)}(K_2) = J \quad \text{και} \quad K_1 \cap K_2 = \emptyset \tag{78}$$

Συνεπώς η $f^{(2)}$ έχει πέταλο και άρα η $f$ είναι χαοτική.

---

# Baker's Map

---

- **Baker's Map**

Ένα πολύ καλό ποσοτικό παράδειγμα όσον αναφέραμε περί stretching and folding είναι η δισδιάστατη απεικόνιση του Baker:

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = B_a(x_n, y_n) := \begin{cases} (2x_n, ay_n) & \text{for} \quad 0 \leq x_n < \frac{1}{2} \\ (2x_n - 1, ay_n + \frac{1}{2}) & \text{for} \quad \frac{1}{2} \leq x_n \leq 1 \end{cases} \tag{79}$$

$$B_a : S \to S \quad , \quad S := [0,1] \times [0,1]$$

όπου η απεικόνιση είναι από το τετράγωνο στον εαυτό του και $0 < a \leq \frac{1}{2}$. Η $B_a$ μας επιτρέπει να δούμε εύκολα και ποσοτικά την διαδικασία του stretching and folding καθώς και βρούμε εύκολα και πρακτικά έναν Παράξενο Ελκυστή.

Ας εκτιμήσουμε τι κάνει η δράση του $B_a$. Αν $x_n < \frac{1}{2}$ τότε ένας όγκος τεντώνεται κατά παράγοντα 2 στον x-άξονα ενώ συρρικνώνεται κατά παράγοντα $a$ στον y-άξονα. Αν $x_n \geq \frac{1}{2}$ το τέντωμα είναι ίδιο όμως υπάρχει και μία μετατόπιση κατά 1 αριστερά στο x και κατά $\frac{1}{2}$ πάνω στο y. Η δράση φαίνεται και στην εικόνα BakersAction.jpg. Επειδή υπάρχει τέντωμα στον x-άξονα, το $B_a$ έχει ευαίσθητη εξάρτηση στις αρχικές συνθήκες.

Θα ασχοληθούμε με την περίπτωση όπου $0 < a < \frac{1}{2}$. Το $B_a$ έχει τότε έναν παράξενο ελκυστή ο οποίος έλκει όλες τις τροχιές. Έστω $A$ να είναι ο παράξενος ελκυστής. Τότε για οποιαδήποτε αρχική συνθήκη $(x_0, y_0)$ ισχύει ότι

$$B_a^{(n)}(x_0, y_0) \to A \quad as \quad n \to \infty \tag{80}$$

Ποιο είναι το σύνολο $A$; Ας αρχίσουμε να βλέπουμε την εξέλιξη όλου του $S$. Βλέπουμε εικόνα BakersAttractor.jpg. Το τετράγωνο αρχικά γίνεται δύο λωρίδες, μετά 4 λεπτότερες, μετά 8 ακόμη πιο λεπτές κτλ. Το πλάτος τους μεν, σε κάθε επανάληψη μικραίνει με παράγοντα $1/2 \cdot a$. Αυτό συνεχίζεται επ άπειρον έως ότου έχουμε άπειρες γραμμές μηδενικού πάχους. Το σύνολο $A$ είναι πολύ απλά η εξέλιξη ολόκληρου του τετραγώνου από την απεικόνιση σε άπειρο χρόνο:

$$A := B^{(\infty)}(S) \tag{81}$$

Τι σύνολο είναι το $A$? Ρωτάω πόση είναι η επιφάνεια του $A$. Μετά πόση είναι η διάσταση του $A$. Το $A$ είναι ένα φράκταλ σύνολο. Καντοριανό σύνολο από ευθείες.

---

- **Σύνολο Cantor**

Το σύνολο Cantor είναι ένα φράκταλ σύνολο που ορίζεται ως εξής. Τους το κάνω όλο στον πίνακα. Αρχίζω από 1 κόβω το 1/3 και τα λοιπά. Το σύνολο κάντορ είναι το οριακό $C = S_\infty$. Τους δείχνω το σημαντικό της αυτο-ομοιότητας. Αποδεικνύεται πως το σύνολο είναι μη-αριθμήσιμο. Πόση είναι η διάσταση; Δεν γίνεται να είναι 0 γιατί ότι και να γίνει ευθύγραμμα τμήματα έχω. Γίνεται να είναι 1; Αφού τα ευθύγραμμα τμήματα έχουν οριακά μηδενικό μήκος. Η διάσταση των fractal συνόλων δεν είναι ακέραιος αριθμός. Η *fractal dimension* ορίζεται ως εξής:

Το κλειδί στα fractals είναι η αυτο-ομοιότητα. Ότι δηλαδή αν μεγεθύνουμε την εικόνα κατά ένα συγκεκριμένο παράγοντα θα δούμε το ίδιο πράγμα. Έστω λοιπόν ότι το σύνολο έχει $k$ αυτο-όμοια υποσύνολα τα οποία αν τα μεγεθύνουμε κατά παράγοντα $M$ το κάθε ένα είναι ταυτόσημο με το αρχικό σύνολο. Τότε η fractal διάσταση ορίζεται ως

$$dim_{fr} = \frac{\log k}{\log M} \tag{82}$$

Εφαρμόζοντας αυτό λοιπόν στο σύνολο Cantor έχουμε ότι χωρίζεται σε 2 μικρότερα, το κάθε ένα με μήκος το $1/3$ του αρχικού. Άρα πρέπει να μεγεθύνουμε το κάθε ένα κατά παράγοντα $M = 3$. Οπότε η διάσταση του είναι

$$dim_{fr}(C) = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0.6309... \tag{83}$$

Αυτός ο ορισμός εφαρμόζεται μόνο σε μαθηματικά, φτιαχτά fractals όπου υπάρχει τέλεια αυτο-ομοιότητα μέχρι το άπειρο. Για φυσικά δηλαδή πεπερασμένα fractal χρησιμοποιούμε άλλο ορισμό.

---

- **Box Counting Dimension**

Γεμίζουμε τον χώρο που βρίσκεται το σύνολο (για το Baker's Map είναι το $[0, 1] \times [0, 1]$) με κουτιά (ή σφαίρες) ακμής $r$. Μετράμε τον αριθμό των κουτιών τα οποία έχουνε μέσα τους σημεία του συνόλου, $N(r)$. Αυτός για φράκταλ σύνολα είναι της μορφής $N(r) \sim r^{-d}$. Τότε η διάσταση box counting ορίζεται ως:

$$dim_B = \lim_{r\to 0} -\frac{\log N(r)}{\log r} \tag{84}$$

Πίσω στον Baker. Το $A$ είναι ένα καντοριανό σύνολο που αντί για σημεία έχει ευθείες γραμμές. Από την σχέση (81) φαίνεται επίσης ότι ο ελκυστής $A$ έλκει όλο το $S$. Όλα αυτά αποδεικνύονται, κοιτάξτε Strogatz για πιο αναλυτικά.

Για να βρούμε την διάσταση του ελκυστή σκεφτόμαστε ως εξής: Σε κάθε επανάληψη το σύνολο χωρίζεται σε 2 αυτο-όμοια, το κάθε ένα όμως με πλάτος $a$ των προηγούμενων. Δηλαδή η μία λωρίδα χωρίζεται σε 2 με πάχος $a$, οι δύο αυτές λωρίδες χωρίζονται σε 4 με πάχος $a^2$ και τα λοιπά. Δηλαδή ο δράση του $B_a^{(n)}$ στο $S$ δημιουργεί $2^n$ λωρίδες πάχους $a^n$ και μήκους 1. Οπότε για να καλύψουμε το σύνολο $B_a^{(n)}(S)$ με τετράγωνα πλευράς $r = a^{-n}$ θέλουμε ακριβώς $N(r) = 2^n \cdot a^{-n}$. Αυτό επειδή κάθε λωρίδα θέλει συνολικά $a^{-n}$ κουτιά ώστε να έχει μήκος 1. Οπότε η διάσταση του μέσω της σχέσης (84) είναι:

$$dim_B(A) = \lim_{n\to\infty} -\frac{\ln(2^n \cdot a^{-n})}{\ln(a^{-n})} = 1 + \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln a} \tag{85}$$

Όταν $a = \frac{1}{2}$ πόση είναι η διάσταση του ελκυστή; 2. Δηλαδή το επίπεδο. Επίσης δείτε ότι ο όγκος του χώρου φάσεων δεν συρρικνώνεται. Η $B_a$ τότε είναι ``χαμιλτονιανό" σύστημα. Η συμπεριφορά του αλλάζει πολύ. Θα μιλήσουμε αργότερα για αυτά.

---

## Henon's Map

---

Άλλο ένα 2D Map με παράξενο ελκυστή είναι η απεικόνιση του Henon. Αυτή ορίζεται ως:

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = H\acute{e}(x_n, y_n) := (y_n + 1 - ax_n^2, bx_n) \tag{86}$$

με $a$ και $b$ παραμέτρους που επιλέγονται κατάλληλα. Για $a = 1.4$ και $b = 0.3$ το σύστημα καταλήγει σε παράξενο ελκυστή.

**HOMEWORK:** Τους βάζω να παίξουμε με το σύστημα Henon για αυτές τις παραμέτρους και τους λέω να προσπαθήσουν να φτιάξουν τον ατράκτορά του. Ζωγραφίζουν x vs y για πολλές επαναλήψεις, πετώντας ένα νούμερο αρχικών επαναλήψεων. Στην τάξη τους λέω μόνο την δράση του Henon και σταματάμε εκεί.

Η δράση του $H\acute{e}$ είναι αρκετά πιο πολύπλοκη από του $B_a$ και γιαυτό θα την αναλύσουμε βήμα βήμα (εικόνα HenonAction.jpg στον πίνακα).

1. Αρχίζουμε με ένα παραλληλόγραμμο κατά μήκος του x-άξονα.

2. Το παραλληλόγραμμο τεντώνεται και διπλώνει σύμφωνα με τον κανόνα

$$x' = x_n, \quad y' = 1 + y_n - ax_n^2$$

3. Το αποτέλεσμα μετά διπλώνεται κι άλλο στον x-άξονα και έπειτα έχουμε αντιστροφή του x και του y, σύμφωνα με το

$$x_{n+1} = y', \quad y_{n+1} = bx'$$

Η $H\acute{e}$ είναι και αυτή αποσβεστική απεικόνιση. Σε κάθε επανάληψη ο όγκος του χώρου φάσεων ελαττώνεται κατά έναν παράγοντα $b$. Ένα στοιχειώδες εμβαδόν $dxdy$ εξελίσσεται μέσω μίας απεικόνισης σε ένα εμβαδόν $|\det(J(x,y))|dxdy$, με $J$ να είναι ο Ιακωβιανός Πίνακας της απεικόνισης. Για μία τυχαία απεικόνιση

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (f(x_n, y_n), g(x_n, y_n))$$

ο Ιακωβιανός πίνακας δίνεται από την σχέση:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{87}$$

Οπότε για την $H\acute{e}$ έχουμε

$$J_{H\acute{e}} = \begin{pmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |\det(J(x,y))| = |b| \tag{88}$$

Θα υπολογίσουμε τώρα τον ελκυστή του Henon αριθμητικά. Παίρνοντας ένα σετ από τυχαίες αρχικές συνθήκες το εξελίσσουμε για πολύ χρόνο. Πετώντας έναν αριθμό αρχικών επαναλήψεων κάνουμε γράφημα των σημείων σε άξονες x-y.

Ο ελκυστής του Henon μοιάζει με ένα boomerang (HenonAttractor.jpg). Όμως δεν είναι ένα απλό boomerang είναι ένα φράκταλ boomerang. Ας πάρουμε π.χ. μια περιοχή του και ας ζουμάρουμε μέσα. Αυτό που βλέπουμε είναι 6 γραμμές, 3 σε μία μπάντα, 2 σε μία άλλη και 1 μόνη της. Αν όμως ζουμάρουμε στην 3πλή μπάντα βλέπουμε ακριβώς την ίδια εικόνα. Το ίδιο αν ξάναζουμάρουμε. Ο ελκυστής είναι fractal.

# Two Dimensional Hamiltonian Maps

Οι χαμιλτονιανές απεικονίσεις λέγονται αλλιώς και Area Preserving Maps. Το κύριο χαρακτηριστικό τους είναι ότι διατηρούν τον όγκο στον χώρο φάσεων, ιδιότητα που προκύπτει από την Συμπλεκτική μορφή των Χαμιλτονιανών συστημάτων (διατήρηση όγκου από την ροή στον χώρο φάσεων). Επειδή λοιπόν διατηρούν όγκο, πρέπει να ισχύει $|\det J| = 1$. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μην υπάρχουν ελκυστές στο σύστημα (εξ' άλλου για να υπάρχει ελκυστής πρέπει ο όγκος να μειώνεται). Επίσης τα μόνα δυνατά σημεία ισορροπίας που μπορούν να υπάρξουν είναι τα ελλειπτικά και τα υπερβολικά επειδή πρέπει $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ να κάνει 1. Τι είναι αυτά τα σημεία θα δούμε στο Standard Map. Συνεπώς η συμπεριφορά των Hamiltonian Maps είναι ποιοτικά διαφορετική από ότι είδαμε μέχρι στιγμής. Αυτό όμως δεν απαγορεύει την ύπαρξης χάους, όπως θα δούμε στο Standard Map. Σημειώνουμε επιπλέον ότι πάντα ένα area-preserving map μπορεί να γραφτεί/επεξηγηθεί σαν τομή Poincare ενός (συνεχούς) Χαμιλτονιανού συστήματος.

- **Twist Map**

Μία καλή αρχή για τα Hamiltonian Maps είναι αυτό που αποκαλείται twist map. Σε πολικές συντεταγμένες γράφεται:

$$T: \quad \begin{aligned} \theta_{n+1} &= \theta_n + 2\pi a(r_0) \quad \mod 2\pi \\ r_{n+1} &= r_n \end{aligned} \tag{89}$$

με $\theta \in [0, 2\pi]$ και $a(r_0)$ μία ομαλή συνάρτηση του $r$. Η δράση αυτού του map είναι προφανής: κάνει κύκλους ακτίνας $r_0$. Όμως! Εάν ο αριθμός $a$ είναι οποιοσδήποτε ρητός $p/q$ τότε ο κύκλος "κλείνει" και η κίνηση είναι περιοδική με περίοδο $q \cdot 2\pi$. Σε αυτή την περίπτωση ο κύκλος μας δεν είναι συνεχής καμπύλη αλλά ένα πλήθος από $q$ σημεία. Εάν όμως ο $a$ είναι άρρητος αριθμός τότε η $\theta_n$ δεν θα κλείσει ποτέ και θα γεμίζει συνεχώς το διάστημα $[0, 2\pi]$. Τότε ο κύκλος θα γεμίσει και θα γίνει μία συνεχής καμπύλη.

Πως σχετίζονται αυτά με ένα χαμιλτονιανό συνεχές σύστημα; Ας πάρουμε ένα ολοκληρώσιμο σύστημα 4 ελευθέρων μεταβλητών $(\theta_1, I_1, \theta_2, I_2)$ με $\theta$ τις γωνίες και $I$ τις ροπές αδράνειας. Ο χώρος φάσεων είναι τετραδιάστατος όμως κίνηση όμως είναι σε 2 διαστάσεις αφού είναι ολοκληρώσιμο. Εν γένη ένα χαμιλτονιανό σύστημα με N ελεύθερες μεταβλητές είναι ολοκληρώσιμο εάν υπάρχουν N/2 σταθερές της κίνησης. Η κίνηση λοιπόν είναι πάνω σε επιφάνειες σταθερής ενέργειας διάστασης N/2, εδώ διάστασης 2.

Εδώ που αυτές είναι δύο διαστάσεων, η κίνηση είναι πάνω σε αυτό που ονομάζουμε Τόρους (donuts). Κάθε τόρος είναι μία επιφάνεια σταθερής ενέργειας $E = H(I_1, I_2)$ με $I$ τις ροπές αδράνειας. Επίσης κάθε τόρος χαρακτηρίζεται από δύο συχνότητες $\omega_1, \omega_2$. Κάνω στον πίνακα έναν τόρο κομμένο στην μέση και βάζω τις ακτίνες $I_1, I_2$ και τις γωνίες $\theta_1, \theta_2$ (εικόνα Tabor47.jpg). Πως είναι η εξέλιξη του συστήματος (ρωτάω); Γυρνάνε απλά οι γωνίες $\theta_2$ και $\theta_2$.

$$\begin{aligned} \theta_1(t) = & \ \omega_1(I_1, I_2,) \cdot t + \theta_1(0) \\ \theta_2(t) = & \ \omega_2(I_1, I_2,) \cdot t + \theta_2(0) \end{aligned} \tag{90}$$

Πείτε μου πως είναι η κίνηση πάνω στον τόρο. Παίρνουμε λοιπόν την τομή Poincare να είναι κάθε φορά που κλείνει η γωνία $\theta_2$ για παράδειγμα (έτσι όπως το έχουμε κόψει στην εικόνα δηλαδή). Η $\theta_2$ κλείνει σε χρόνο $T = 2\pi/\omega_2$. Σε αυτόν τον χρόνο η $\theta_1$ έχει καλύψει διάστημα $2\pi\omega_1/\omega_2$. Το Twist Map δεν είναι τίποτα άλλο από την γωνία $\theta_1$ ανά χρόνους της περιόδου της γωνίας $\theta_2$. Και μάλιστα

$$a(r_i) = \frac{\omega_1}{\omega_2}(I_1, I_2) \tag{91}$$

Άρα το να είναι ο $a$ άρρητος σημαίνει ότι οι δύο συχνότητες του τόρου έχουν άρρητο λόγο! Και πράγματι, φανταστείτε την εξέλιξη στον τόρο όταν οι συχνότητες έχουν άρρητο λόγο. Δεν θα κλείσει ποτέ ώστε να μπορεί να θεωρηθεί περιοδική κίνηση. Η κίνηση όπου $\omega_1/\omega_2$ είναι άρρητος, ονομάζεται *quasiperiodic*.

---

- **Standard Map**

Το Logistic Map είναι το πρότυπο των μονοδιάστατων απεικονίσεων. Το Standard Map (SM) είναι το πρότυπο των 2D Area-Preserving Maps. Αν η δυναμική της λογιστικής σας φάνηκε πολύπλοκη, το Standard Map έχει 100 φορές πιο πολύπλοκη δυναμική.

$$\begin{aligned} p_{n+1} = & \ p_n + k \sin\theta_n \qquad \mod 2\pi \\ \theta_{n+1} = & \ \theta_n + p_{n+1} \qquad \mod 2\pi \end{aligned} \tag{92}$$

Οι μεταβλητές αντιπροσωπεύουν την γωνία και την γωνιακή ορμή ενός Χαμιλτονιανού συστήματος. Το $k \geq 0$ είναι η παράμετρος μη-γραμμικότητας. Και οι δύο μεταβλητές του συστήματος παίρνονται με modulo 2π. Αυτό σημαίνει ουσιαστικά ότι ο χώρος φάσεων του συστήματος δεν είναι το επίπεδο αλλά ο τόρος. Το SM έρχεται από το μη-αυτόνομο Χαμιλτονιανό σύστημα:

$$H(\theta, p_\theta, t) = \frac{p_\theta^2}{2I} + k\cos\theta \sum_n \delta(t - n\tau) \tag{93}$$

Δηλαδή έχουμε ένα ελεύθερο εκκρεμές χωρίς βαρύτητα στο οποίο δίνουμε κλωτσιές υπό την μορφή δ-συναρτήσεων. Το σύστημα αυτό ονομάζεται kicked rotator[5]. Το SM είναι μία τομή Poincare στον χρόνο όμως, του kicked rotator. Ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις κίνησης γύρω από χρόνο $n\tau$ προκύπτει το SM.

Το πολύ όμορφο πλεονέκτημα σε 2D maps είναι ότι έχουμε την δυνατότητα να φτιάξουμε, να σχεδιάσουμε τον χώρο φάσεων. Στην λογιστική, ο χώρος φάσεων είναι η ευθεία, οπότε θα ήταν πολύ δύσκολο να δούμε την τροχιά σε αυτήν. Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε χρώμα αλλά και πάλι δεν θα φαινόταν καλά. Στο SM όμως είναι πολύ εύκολο (και όμορφο) να δούμε τον χώρο φάσεων. Βλέπουμε χώρο φάσεων για $k = 0$ έως $k = 4$ (region1 - region4.jpg και σχολιασμός).

Η κύρια διαφορά του SM με την λογιστική είναι ότι η εξέλιξη του συστήματος στον χώρο φάσεων έχει τεράστια εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες, όχι μόνο υπό την έννοια της εκθετικής απόκλισης, αλλά και από την έννοια ότι διαφορετικές περιοχές του χώρου φάσεων εκτελούν διαφορετική δυναμική (ξαναβλέπουμε τις εικόνες region). Ας δούμε αυτές τις διαφορετικές δυναμικές συμπεριφορές.

Οι καμπύλες που βλέπουμε είναι κλειστές και είναι αυτό που ονομάσαμε πριν quasiperiodic orbits. Δηλαδή τροχιές που δεν κλείνουν αλλά συνεχώς γεμίζουν την καμπύλη στο όριο του συνεχούς. Βλέπουμε την δημιουργία χάους κάπου στο $k = 0.55$. Χάος είναι ο ασπρόμαυρος θόρυβος που βλέπουμε. Παρατηρήστε ότι οι περιοχές που υπάρχει χάος είναι αποκομμένες (isolated) η μία από την άλλη μέσω

[5] Η λογιστική απεικόνιση μπορεί και αυτή να προέρθει από το kicked rotator με τριβή. Η απεικόνιση εμφανίζεται στο όριο της άπειρης τριβής (βιβλίο Schuster).

τροχιών που είναι quasiperiodic. Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι καθώς μεγαλώνει η παράμετρος μη-γραμμικότητας οι χαοτικές περιοχές πιάνουν όλο και μεγαλύτερο μέρος του χώρου φάσεων.

Φυσικά υπάρχουν και κλειστές τροχιές που αποτελούνται από πεπερασμένο αριθμό σημείων. Αυτές φαίνονται καλύτερα στο $k = 0$. Τι διάσταση (δηλαδή ο χώρος που καλύπτει τι διάσταση έχει) μια χαοτική τροχιά; Τι μία quasiperiodic; Τι μία περιοδική κίνηση; Οι χαοτικές τροχιές έχουν διάσταση όση και ο χώρος φάσεων στα Hamiltonian Maps. Οι quasiperiodic έχουν μία (ή ανάλογα και την διάσταση του συστήματος και άλλους παράγοντες κάποιες φορές δύο) λιγότερη. Οι κλειστές, περιοδικές τροχιές έχουν πάντα διάσταση 0, ανεξαρτήτως της διάστασης του συστήματος. Το σύνολο των σημείων περιοδικών τροχιών είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο σημείων άρα έχει μέτρο/διάσταση 0.

---

- **Fixed Points of the Standard Map**

Θα ξεκινήσουμε να δούμε τα FP του SM και να δούμε στην πράξη αυτά που αναφέρθηκαν στην αρχή του κεφαλαίου. Για τα σταθερά σημεία πρώτης τάξης ισχύει:

$$\begin{matrix} p_{n+1} = p_n \\ \theta_{n+1} = \theta_n \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} p_n = p_n + k\sin(\theta_n) \\ \theta_n = \theta_n + p_n \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} p_n = 0 \\ k\sin\theta_n = 0 \end{matrix} \tag{94}$$

Άρα έχουμε 2 σημεία ισορροπίας, το $(0,0)$ και το $(\pi,0)$. Την σταθερότητα αυτών θα δούμε μέσω του Ιακοβιανού (linearized) πίνακα της απεικόνισης (τους λέω στον πίνακα πως βγαίνει αν δεν ξέρουν):

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1+k\cos\theta \\ 1 & k\cos\theta \end{pmatrix} \tag{95}$$

Όπως έχει αναφερθεί, η διακρίνουσα του πίνακα αυτού δείχνει πως εξελίσσεται ένας στοιχειώδης όγκος στον χώρο φάσεων γύρω απ' το σημείο $(p,\theta)$. Εδώ, ο Ιακωβιανός εξαρτάται από το $\theta$ παρόλα αυτά βλέπουμε πως πάντα $\det J = 1$ που σημαίνει διατήρηση του όγκου στον χώρο φάσεων. Τώρα για κάθε σταθερό σημείο $(\theta^*, p^*)$ θέλουμε να βρούμε τις ιδιοτιμές του J. Αυτές θα μας δείξουν την ``σταθερότητα'' των σημείων.

Προτού συνεχίσουμε θυμηθείτε ότι πρέπει για τις ιδιοτιμές (σε 2D) να ισχύει $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det J = 1$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν οπότε υπάρχουν 3 πιθανές περιπτώσεις σημείων ισορροπίας:

1. $\lambda_1$ , $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ με $\lambda_1 = 1/\lambda_2$ . Τότε η μία εκ των δύο ιδιοτιμών έχει μέτρο μεγαλύτερο της μονάδας. Το FP τότε αναγκαστικά είναι ασταθές και ονομάζεται υπερβολικό σημείο ισορροπίας.

2. $\lambda_1$ , $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ με $\lambda_{1,2} = e^{\pm ai}$ . Σε αυτή την περίπτωση και οι δύο ιδιοτιμές έχουμε μέτρο 1 και όπως φαίνεται παραστούν στροφές στον χώρο φάσεων. Δεν έχει σημασία που υπάρχει πραγματικό μέρος διάφορο της μονάδας μην ξεχνάτε, το σύστημα είναι διακριτό. Σημασία έχει που $|\lambda_{1,2}| = 1$. Αυτό επειδή το $\lambda$ απευθείας πολλαπλασιάζει το διάνυσμα των μεταβλητών. Αυτά τα FP ονομάζονται ελλειπτικά γιατί δημιουργούν γύρω τους ελλείψεις.

3. $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$ . Αυτή η περίπτωση ονομάζεται παραβολικό σημείο ισορροπίας ή αλλιώς αδιάφορο σημείο ισορροπίας, αφού η δυναμική γύρω του μένει απαράλακτη. Δεν μας νοιάζουν αυτά τα σημεία (αδιάφορα).

Δηλαδή, είτε το σημείο θα είναι υπερβολικό και άρα ασταθές είτε ελλειπτικό και άρα ``ευσταθές''. Οπότε έχοντας ξεκαθαρίσει αυτά, πάμε να βρούμε τις ιδιοτιμές για κάθε FP $(\theta^*, p^*)$ . Αυτές δίνονται από την εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & k\cos\theta^* \\ 1 & 1+k\cos\theta^* - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda(k\cos\theta^* + 2) + 1 = 0 \tag{96}$$

συνεπώς

$$\lambda_{\pm} = 1/2\left(k\cos\theta + 2 \pm \sqrt{(k\cos\theta^* + 2)^2 - 4}\right) \tag{97}$$

Οπότε το σημείο $(0, 0)$ έχουμε $\cos\theta^* = 1$ και άρα:

$$\lambda_{\pm(0,0)} = 1/2\left(k + 2 \pm \sqrt{k(k+4)}\right) \tag{98}$$

που όπως φαίνεται επιβεβαιώνονται όσα αναφέρθηκαν. Οπότε για $k > 0$ αυτό είναι πάντα υπερβολικό FP οπότε και ``ασταθές". Για την άλλη περίπτωση έχουμε $\cos\theta^* = -1$ οπότε

$$\lambda_{\pm(\pi,0)} = 1/2\left(2 - k \pm i\sqrt{(4-k)k)}\right) \tag{99}$$

Αυτό το σημείο είναι ελλειπτικό (και άρα ευσταθές) μόνο όταν $0 < k < 4$. Στην συνέχεια γίνεται και αυτό υπερβολικό. Η προέλευση του χάους είναι τα υπερβολικά σημεία ισορροπίας. Σε αυτά υπάρχει το στοιχείο του "Stretching and Folding" γιατί στην μία διεύθυνση υπάρχει τέντωμα ενώ στην άλλη συρρίκνωση. Υπάρχει επίσης και Sensitive Dependence on Initial Conditions λόγο της ιδιοτιμής που είναι μεγαλύτερη της μονάδας. Υπάρχει δηλαδή αλάτι και πιπέρι του χάους. Άρα διαισθητικά θα λέγαμε ότι όσο πιο πολλά τα υπερβολικά FP τόσο πιο χαοτικό το σύστημα.

Υπάρχει σύγχυση ως προς την ευστάθεια των σημείων ισορροπίας σε σχέση με τις ιδιοτιμές του πίνακα (διαδότη ή ιακωβιανού αντίστοιχα) γιατί είναι εύκολο κανείς να μπερδέψει διακριτά και συνεχή συστήματα. Στα διακριτά συστήματα η συνθήκη είναι η *απόλυτη τιμή* της ιδιοτιμής να είναι μικρότερη ή ίση του 1. Στα συνεχή είναι να είναι αρνητικό ή μηδέν το πραγματικό μέρος της ιδιοτιμής. Στα διακριτά η ιδιοτιμή απευθείας πολλαπλασιάζει το άνυσμα συντεταγμένων ενώ στα συνεχή το εκθετικό της ιδιοτιμής πολλαπλασιάζει το άνυσμα. Οπότε αν σε ένα διακριτό σύστημα η ιδιοτιμή είναι $e^{ia}$ τότε η δράση της είναι στροφή. Αν είναι πραγματικός αριθμός μέτρου μικρότερου του 1, η δράση της είναι συρρίκνωση κτλ.

Τι συμβαίνει με τις αναλλοίωτες διευθύνσεις (ιδιοανύσματα) των FP; Εδώ πλέον δεν είναι αναλλοίωτες διότι ο γραμμικοποιημένος πίνακας (Jacobian) ισχύει μόνο τοπικά. Αυτό που συμβαίνει είναι ότι τα FP έχουν αυτό που ονομάζουμε Invariant Manifold. Ένα υπερβολικό FP έχει ένα Stable και ένα Unstable Invariant Manifold το οποίο είναι η προέκταση των αναλλοίωτων διευθύνσεων. Αυτά είναι φυσικά μη γραμμικές καμπύλες που εκτείνονται στον χώρο φάσεων. Δηλαδή κοντά στο FP οι διευθύνσεις είναι ευθείες αλλά καθώς απομακρυνόμαστε γίνονται καμπύλες.

## KAM Theory

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δώσουμε μία φοβερά συνοπτική ανασκόπηση μίας πολύ σπουδαίας και πάρα πολύ πολύπλοκης θεωρίας. Τα πάντα που θα ειπωθούν θα είναι χωρίς απόδειξη. Η θεωρία KAM (αρχικά των Kolmogorov Arlond Moser) πραγματεύεται ολοκληρώσιμα Χαμιλτονιανά συστήματα τα οποία έχουν διαταραχθεί, $H(p, \theta) = H_0(p, \theta) + k \cdot H_1(p, \theta)$.

Στο ολοκληρώσιμο σύστημα $H_0$ όπως αναφέραμε η δυναμική βρίσκεται πάντα σε τόρους. Ανάλογα με την ενέργεια η κίνηση μπορεί να είναι περιοδική ή ιωνεί-περιοδική (quasiperiodic), εξαρτώμενη από τον λόγο των συχνοτήτων $\omega_1/\omega_2$. Όταν το σύστημα διαταχθεί ελάχιστα, αυτό που συμβαίνει είναι ότι "σχεδόν" όλοι οι τόροι επιζούν, παραμορφωμένοι λίγο. Σχεδόν υπό την έννοια ότι όλοι οι τόροι με ρητό λόγο $\omega_1/\omega_2$ καταστρέφονται. Όμως οι ρητοί έχουν μηδέν μέτρο σε σχέση με τους άρρητους οπότε "όλοι" οι τόροι επιζούν. Καθώς αυξάνουμε την διαταραχή, αρχίζουν και καταστρέφονται και τόροι με άρρητο λόγο. Οι "λιγότερο άρρητοι" τόροι καταστρέφονται πρώτοι.

Πως γίνεται ένας αριθμός να είναι λιγότερο άρρητος; Έχει νόημα αυτή η πρόταση; Όλοι οι άρρητοι αριθμοί μπορούν να γραφτούν με κλασματική ανάπτυξη (Continued Fraction). Αυτός είναι ένας τρόπος να προσεγγίσουμε έναν άρρητο αριθμό μέσω συνεχών κλασμάτων:

$$b = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots}}} \Rightarrow b = [a_0; a_1, a_2, a_3, ...] \tag{100}$$

Όσο πιο "άρρητος" είναι ένας άρρητος, τόσο πιο αργά συγκλίνει αυτή η ακολουθία. Ο περισσότερο άρρητος αριθμός είναι ο χρυσός λόγος

$$\phi = [1; 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots] = 1.61803398875 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{101}$$

Σύμφωνα λοιπόν με την θεωρία KAM ο τόρος με λόγο συχνοτήτων $\phi$ καταστρέφεται τελευταίος.

Τι συμβαίνει όμως όταν ένας τόρος καταστρέφεται σε ένα 2D-Map; Καταστρέφονται οι κλειστές καμπύλες που ονομάσαμε quasiperiodic orbits. Το θεώρημα Poincare-Birkhoff λέει πως σε ένα Map, τα σταθερά σημεία πρέπει να υπάρχουν *πάντα σε ζεύγη* υπερβολικού-ελλειπτικού. Όταν ένας τόρος καταστρέφεται, αυτό που συμβαίνει είναι ότι σπάει σε ζεύγη υπερβολικών-ελλειπτικών σημείων. Κοιτάμε πλέον εικόνα PoincareBirkhoff.jpg. Αφού λοιπόν σπάσει ένας τόρος σε ελλειπτικά και υπερβολικά σημεία, γύρω από τα καινούρια ελλειπτικά σημεία εφαρμόζονται πάλι τα θεωρήματα KAM και Poincare-Birkhoff. Αυτό έχει ως συνέπεια την δημιουργία μιας δομής αυτο-ομοιότητας σε όλο και μικρότερη κλίμακα.

Βέβαια καθώς μεγαλώνει η διαταραχή, π.χ. καθώς αυξάνουμε το $k$ στο Standard Map, τα υπερβολικά σημεία όλο και πληθαίνουν. Αυτό έχει ως όριο την δημιουργία χάους γιατί τα ελλειπτικά σημεία που υπάρχουν, είναι περιτριγυρισμένα σε τόσο πυκνό βαθμό από υπερβολικά που είναι σαν να μην υπάρχουν.

Στο Standard Map για παράδειγμα, έχει βρεθεί πως ο τελευταίος τόρος σπάει στην τιμή

$$k_c = 0.97165... \tag{102}$$

Σημειώστε πως οι τόροι που εκτίνονται από άκρη ως άκρη είναι διαφορετικοί (σε είδος) από αυτούς γύρω από ελλειπτικά σημεία. Αυτό το $k_c$ αναφέρεται σε τόρους που εκτίνονται από άκρη ως άκρη (δεν θα σχολιάσουμε παραπάνω εδώ).

Για μία πραγματική εισαγωγή της θεωρίας KAM και του θεωρήματος Poincare-Birkhoff κοιτάξτε το βιβλίο του Tabor.

---

*Μάθημα στις μονοδιάστατες απεικονίσεις, χάος και δισδιάστατες απεικονίσεις*

*Δατσέρης Γιώργος, Μη-Γραμμικά Δυναμικά Συστήματα, 2015*