Μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωρης

Runge-Kutta

29 Απριλίου 2015

1 Μέθοδοι αριθμητικής ολοκλήρωσης

Οι δύο πιο σύνηθεις μεθόδοι αριθμητικής ολοκλήρωσης είναι η μέθοδος Euler και η μέθοδος Runge-Kutta. Εάν έχουμε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\dot{x} = f(x,t) \ , \quad x(t_0) = x_0 \ , \tag{1}$$

τότε μπορούμε να προσεγγίσουμε τη λύση του στους χρόνους $t_0 + n\delta$, όπου n ακέραιος και δ το βήμα της ολοκλήρωσης, ως:

Μέθοδος Euler:

$$x(t_0+\delta) = x(t_0) + \delta \ f(x_0, t_0) \ , \tag{2}$$

ή

Μέθοδος Runge-Kutta

$$x(t_0+\delta) = x(t_0) + \delta \left(\frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} \right) \ , \tag{3}$$

όπου

$$k_1 = f(x_0, t_0)$$

$$k_2 = f(x_0 + k_1\delta/2, t_0 + \delta/2)$$

$$k_3 = f(x_0 + k_2\delta/2, t_0 + \delta/2)$$

$$k_4 = f(x_0 + k_3\delta, t_0 + \delta) \ .$$

Αυτές οι μεθόδοι μπορούν να γενικευτούν και για συστήματα οποιασδήποτε διάστασης.

2 Πόσο λάθος κάνουμε;

Σκοπός μας είναι να μελετήσουμε την μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης Runge-Kutta. και να την συγκρίνουμε με τη μέθοδο Euler. Για το σκοπό αυτό θα ολοκληρώσουμε τον αρμονικό ταλαντωτή με απόσβεση,

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0 \ , \quad x(0) = x_0 \ , \quad \dot{x}(0) = v_0 \ . \tag{4}$$

Η δευτεροβάθμια αυτή εξίσωση μπορεί να γραφεί ως ένα πρωτοβάθμιο σύστημα δύο διαστάσεων θέτωντας $y \equiv \dot{x}$. Τότε:

$$\dot{x} = y \ , \tag{5α′}$$

$$\dot{y} = -2\gamma y - \omega^2 x \ . \tag{5β′}$$

Θέλουμε να δούμε πόσο «λάθος» μπορεί να αποφέρει η κάθε μέθοδος ολοκλήρωσης. Στη συγκεκριμένη περίπτωση γνωρίζουμε και την ακριβή αναλυτική λύση η οποία είναι:

$$x_{\text{theor.}}(t) = x_0\, e^{-\gamma t} \left[\cos(\Omega t) + \frac{\gamma}{\Omega}\sin(\Omega t)\right] + v_0\, e^{-\gamma t}\frac{\sin(\Omega t)}{\Omega} \ , \tag{6}$$

με $\Omega \equiv \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$.

(ελέξετε ότι πράγματι η (6) ικανοποιεί την (4))

Για να συγκρίνουμε τις δύο μεθόδους θα ολοκληρώσουμε και με τις δύο την εξίσωση μέχρι μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, $t = T$, και έπειτα θα συγκρίνουμε πόσο διαφορετικά αποτελέσματα μας δίνει η κάθε μέθοδος σε σχέση με την ακριβή αναλυτική λύση που έχουμε στη διάθεσή μας.

Χωρίζουμε το διάστημα $[0, T]$ σε διαστήματα. Έτσι έχουμε τη διακριτοποίηση του συνεχούς διαστήματος $[0, T]$ σε:

$$[0, T] \quad \rightarrow \quad 0 = t_1, t_2, \ldots, t_N, t_{N+1} = T$$

Ολοκληρώνουμε το σύστημα (5) με τις μεθόδους Euler και Runge-Kutta και έτσι υπολογίζουμε τις τιμές $x_{\text{Euler}}(T)$ και $x_{\text{R-K}}(T)$.

Κρατώντας σταθερή την τελική χρονική στιγμή T μεταβάλλουμε τον αριθμό των σημείων N, και άρα επομένως και το μήκος των διαστημάτων, και κάθε φορά υπολογίζουμε το σχετικό λάθος της κάθε μεθόδου:

$$
\begin{aligned}
Er_1(N) &= \frac{|x_{\text{theor.}}(T) - x_{\text{Euler}}(T)|}{|x_{\text{theor.}}(T)|} \\
Er_2(N) &= \frac{|x_{\text{theor.}}(T) - x_{\text{R.K.}}(T)|}{|x_{\text{theor.}}(T)|}
\end{aligned}
$$

Το μήκος των διαστημάτων δ σχετίζεται με τον αριθμό των σημείων μέσω της σχέσης:

$$\delta = \frac{T}{N+1} \tag{7}$$

Παίρνουμε τιμές του N από 10 έως 10^3 (ακέραιες) και σχεδιάζουμε σε λογαριθμική κλίμακα, στο γράφημα (1), τις γραφικές παραστάσεις $Er_1(N)$, $Er_2(N)$, N^{-1} και N^{-4} συναρτήσει του N. Φαίνεται καθαρότατα με το γράφημα αυτό ότι το λάθος της μεθόδου Euler πάει σαν N^{-1} ενώ της Runge-Kutta σαν N^{-4}.

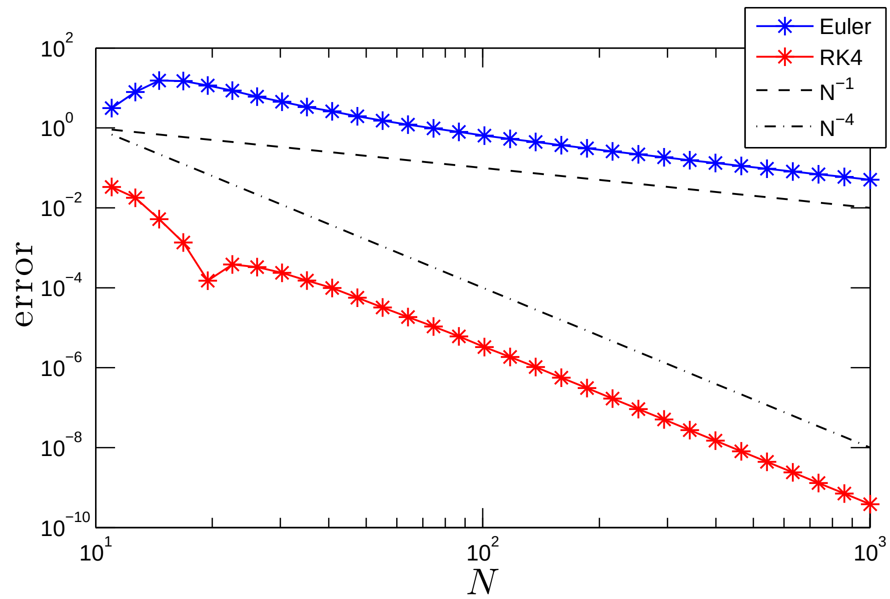
Μπορούμε τις ίδιες σχέσες να τις σχεδιάσουμε συναρτήσει του διαστήματος δ. Σχεδιάζουμε λοιπόν στο γράφημα (1) πάλι σε λογαριθμική κλίμακα τις γραφικές παραστάσεις $Er_1(\delta)$, $Er_2(\delta)$, δ και δ^4 συναρτήσει του δ. Είναι ολοκάθαρο πλέον αυτό που ισχυριστήκαμε στην τάξη ότι η μέθοδος Euler συγκλίνει σαν δ ενώ η Runge-Kutta σαν δ^4.

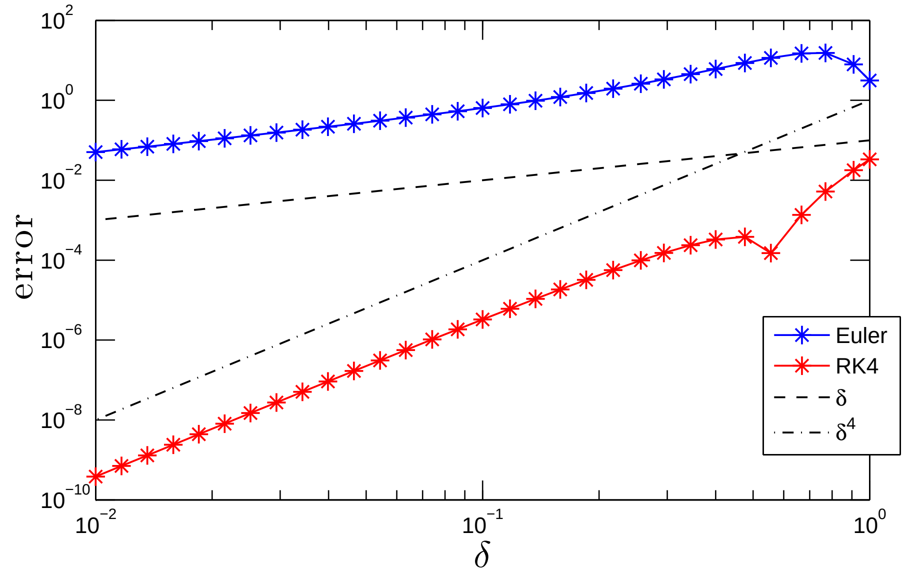
Σημείωση Συνηθίζεται να λέμε ότι η μέθοδος ολοκλήρωσης Euler έχει ακρίβεια *πρώτης τάξης* ενώ η μέθοδος Runge-Kutta έχει ακρίβεια *τετάρτης τάξης*. Ουσιαστικά σε κάθε χρόνικό βήμα, δ, το λάθος που κάνουμε είναι τάξεως δ^2 ή δ^5 αντίστοιχα. Για να φτάσουμε όμως μέχρι την τελική χρονική στιγμή T κάνουμε T/δ βήματα άρα το ολικό λάθος είναι

$$
\begin{aligned}
&\frac{T}{\delta} \times \delta^2 \sim \mathcal{O}(\delta) \quad \text{για την Euler} \\
&\frac{T}{\delta} \times \delta^5 \sim \mathcal{O}(\delta^4) \quad \text{για την Runge-Kutta}
\end{aligned}
$$

Άσκηση Προσπαθήστε να αναπαραγάγετε μόνοι σας τα γραφήματα αυτά.

Σημείωση: Για να σχεδιάσετε ένα διάγραμμα σε λογαριθμική κλίμακα στο Matlab χρησιμοποιείτε την εντολή `loglog(x,y)`.





Σχήμα 1: Γράφημα του σχετικού λάθους των μεθόδων Euler και Runge-Kutta στην ολοκλήρωση του αρμονικού ταλαντωτή με απόσβεση με $\gamma = 0.1$, $\omega = 1$ και για τελικό χρόνο $T = 10$ σαν συνάρτηση του πλήθους των σημείων της ολοκλήρωσης, N, και του βήματος της ολοκλήρωσης, δ.