ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Μη Γραμμικά Δυναμικά Συστήματα

Παράδοση 9 Ιουνίου 2015

Θ. Αποστολάτος & Π. Ιωάννου

Δείξτε ότι ο θετικός πίνακας C (θετικός είναι ένας πίνακας όταν είναι ερμιτιανός, ώστε να έχει ιδιοτιμές πραγματικές, και επιπλέον όταν οι ιδιοτιμές του ειναι όλες θετικές) που ικανοποιεί την γραμμική εξίσωση:

$$A^\dagger C + CA = -Q$$

όπου Q είναι ένας οποιοσδήποτε θετικός πίνακας είναι ο

$$C = \int_0^\infty e^{A^\dagger t} Q e^{At}\, dt\ ,$$

υπό την προϋπόθεση ότι ο πίνακας A είναι ασυμπτωτικά ευσταθής, δηλαδή όλες οι ιδιοτιμές του έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος.

Λαμβάνοντας $Q = I$ προσδιορίστε τον πίνακα C που αντιστοιχεί στον

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

υπολογίζοντας το παραπάνω ολοκλήρωμα (στην τάξη υπολογίσαμε τον C λύνοντας κατευθείαν το συστημα. Στην Matlab αμέσως μπορείτε να εχετε τη λύση μέσω της εντολής `C = lyap(A',Q)`).

Δείξτε τώρα ότι η $L(x_1, x_2) = x^\dagger C x$, με $x = (x_1, x_2)^T$ ορίζει μία συνάρτηση Lyapunov για το δυναμικό σύστημα

$$\dot{x} = Ax\ .$$

Σχεδιάστε τις ισοϋψεις της συνάρτησης Lyapunov $L(x_1, x_2)$ και έπειτα προσδιορίστε ακριβώς για κάθε ϵ που επιλέξατε το αντιστοιχούν $\delta(\epsilon) \leq \epsilon$ έτσι ώστε κάθε σημείο της τροχιάς $\phi_t(x)$ του δυναμικού συστήματος $\dot{x} = Ax$ με αρχική τιμή το σημείο $x = (x_1, x_2)^T$ εντός της περιοχής $||x|| \equiv \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq \delta(\epsilon)$ να παραμένει σε απόσταση μικρότερη από το ϵ δηλαδή $||\phi_t(x)|| \leq \epsilon$ για κάθε $t > 0$. Σχεδιάστε τις δύο κυκλικές περιοχές ακτίνας $\delta(1)$ και $\epsilon = 1$.

Προσδιορίστε την αρχική συνθήκη μοναδιαίου μέτρου που οδηγεί στη μέγιστη τιμή του $||\phi_t(x)||$. Τι μεγέθυνση του μέτρου της κατάστασης του συστήματος μπορεί να επιτευχθεί; Αυτές οι διαταραχές λέγονται βέλτιστες (optimals).