

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής Μη Γραμμικά Δυναμικά Συστήματα Παράδοση 19 Μαΐου 2015

Θ. Αποστολάτος & Π. Ιωάννου

Άσκηση 1

Θεωρήστε την γραμμική αναδρομική σχέση:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} .$$

Η αναδρομική σχέση αυτή, που θα μπορούσε να είναι μία δισδιάστατη απεικόνιση Poincare, έχει ως σταθερό σημείο το $(0, 0)^T$, επειδή όταν $(x_1, y_1) = (0, 0)$ τότε και $(x_n, y_n) = (0, 0)$ για κάθε n . Θέλουμε να προσδιορίσουμε την ευστάθεια αυτού του σταθερού σημείου (fixed point). Λέμε ότι το σημείο $(0, 0)^T$ είναι ευσταθές με πεδίο έλξης όλο το επίπεδο, αν για οποιαδήποτε αρχική τιμή (x_1, y_1) θα είναι $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (0, 0)$ και ασταθές αν $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = \infty$.

1. Ένας συμμαθητής σας είχε την εικασία ότι το σταθερό σημείο είναι ασταθές αν κάποιο στοιχείο του πίνακα είναι μεγαλύτερο το 1. Συμφωνείτε ή διαφωνείτε;
2. Υπάρχει πίνακας με τις απόλυτες τιμές των στοιχείων μεγαλύτερες από 10^6 ο οποίος όμως να καθιστά το σημείο $(0, 0)$ ευσταθές;
3. Από τι κρίνεται η ευστάθεια του σταθερού σημείου;
4. Στην περίπτωση με $a_1 = a_4 = 1$, $a_2 = -a_3 = 1$ προσδιορίστε αναλυτικά τα (x_n, y_n) αν $(x_1, y_1) = (1, 1)$.

Άσκηση 2

Θεωρήστε σωματίδιο που κινείται στο τρισδιάστατο χώρο. Η θέση του σωματιδίου \vec{x} ικανοποιεί το δυναμικό νόμο:

$$\ddot{\vec{x}} + (|\dot{\vec{x}}|^2 - 1)\dot{\vec{x}} + \vec{x} = 0 .$$

Αν ορίσουμε $\vec{L} = \vec{x} \times \dot{\vec{x}}$ υπολογίστε το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής. Τι συμπεραίνετε για τη κίνηση του σωματιδίου.

Άσκηση 3

Στη κλασική θεωρία των συστημάτων Lienard

$$\dot{x} = y - F(x) \quad , \quad \dot{y} = -x .$$

υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $F(x)$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες: $F(-x) = -F(x)$, υπάρχει ένα μόνο $a > 0$ για το οποίο $F(a) = 0$, είναι $F'(0) < 0$, και για $x > a$ η $F(x)$ είναι αύξουσα και $F(x) \rightarrow \infty$ για $x \rightarrow \infty$. Υπό αυτές τις προϋποθέσεις αποδειξάμε στην τάξη ότι θα υπάρχει μία και μόνο περιοδική τροχιά. Το ερώτημα είναι: έστω ότι $F(x)$ έχει όλες τις παραπάνω ιδιότητες αλλά $F(x) \rightarrow c$ όπως $x \rightarrow \infty$. Θα υπάρχει μοναδικός οριακός κύκλος και στην περίπτωση αυτή; Υπολογίστε την συνάρτηση $\delta(y) = |Y(y)| - y$ όπου Y είναι η y συντεταγμένη της πρώτης τομής της τροχιάς που αρχίζει από το σημείο $(0, y)$ ($y > 0$) με τον αρνητικό άξονα $x = 0$ για την περίπτωση

$$F(x) = \tanh x - 2x \exp\left(-\frac{|x|}{A}\right),$$

για $A = 0.1$ και $A = 5$. Προσδιορίστε τον οριακό κύκλο.