

0.1 Η κυματική εξίσωση διάδοσης μεγάλης οριζόντιας κλίμακας κυμάτων στην επιφάνεια των θαλασσών ενός μη περιστρεφόμενου πλανήτη

Θεωρούμε ότι η επιφάνεια της γης αποτελείται από υδάτινες λεκάνες. Θα υπολογίσουμε την απόκριση αυτών των λεκανών στη παλιρροϊκή διέγερση. Θα θεωρήσουμε ότι οι οριζόντιες διαστάσεις των λεκανών αυτών είναι πολύ μεγαλύτερες από την κατακόρυφο με αποτέλεσμα οι κατακόρυφες επιταχύνσεις να είναι πολύ μικρότερες από τις οριζόντιες και αμελητέες για την ανάλυση μας. Θα μελετήσουμε τις κινήσεις που δημιουργούνται λόγω της παλιρροϊκής διέγερσης. Οι οριζόντιες ταχύτητες \vec{u} είναι μικρές και εξαρτώνται από την θέση στο οριζόντιο πεδίο \vec{x}_h και τον χρόνο αλλά όχι από το βάθος z . Επειδή έχουμε υδροστατική ισορροπία στη κατακόρυφο διεύθυνση η πίεση, p , θα πρέπει να ισούται με το βάρος του νερού που βρίσκεται από πάνω, οπότε αν το νερό έχει σταθερή πυκνότητα, ρ , θα είναι

$$p = p_a + \rho g(z_0 + \zeta - z),$$

όπου g είναι επιτάχυνση της βαρύτητας η οποία λαμβάνεται σταθερά, p_a η ατμοσφαιρική πίεση, z_0 είναι το ύψος της ισοδυναμικής επιφάνειας του νερού στη κατάσταση ισορροπίας (που μπορεί να εξαρτάται από τη θέση αλλά όπως θα δούμε και από το χρόνο) και ζ η μικρή διαταραχή της επιφανείας από την ισοδυναμική που εξελίσσεται δυναμικά. Συνεπώς η οριζόντια επιτάχυνση που επάγεται αναμονάδα μάζας του νερού από την πίεση θα είναι

$$-\frac{1}{\rho} \vec{\nabla}_h p = -g \vec{\nabla}_h \zeta - g \vec{\nabla}_h z_0.$$

όπου $\vec{\nabla}_h$ η οριζόντια βαθμίδα οπότε εάν $\vec{\xi}$ η οριζόντια μετατόπιση του νερού τότε σε πολύ καλή προσέγγιση θα είναι

$$\frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = -g \vec{\nabla}_h \zeta - g \vec{\nabla}_h z_0.$$

(Η σχέση αυτή είναι προσεγγιστική διότι η δύναμη αναφέρεται στη δύναμη που ασκείται σε δεδομένο σημείο στο χώρο και όχι σε δεδομένο σωματίδιο του νερού, για μικρές κινήσεις όμως η παραπάνω σχέση είναι ορθή σε πρώτη τάξη ως προς το πλάτος των ταχυτήτων, βλ. Landau-Lifshitz Fluid Dynamics για λεπτομέρειες). Για να υπολογίσουμε την εξέλιξη του συστήματος χρειαζόμαστε να συνδέσουμε τις κατακόρυφες μετατοπίσεις με τις οριζόντιες. Αυτό επιτυγχάνεται με την χρήση της εξίσωσης συνέχειας η οποία απαιτεί ότι ο όγκος κάθε τμήματος του νερού είναι σταθερός, οπότε η απόκλιση των οριζοντίων ταχυτήτων θα πρέπει να συνεπάγεται κατακόρυφες κινήσεις έτσι ώστε

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\vec{\nabla}_h \cdot \vec{u},$$

και ολοκληρώνοντας αυτή την εξίσωση σε όλο το βάθος του νερού και επειδή η οριζόντια ταχύτητα δεν μεταβάλλεται σε πρώτη τάξη με το ύψος καταλήγουμε στην σχέση

$$w(z_0) \approx \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -(z_0 + \zeta) \vec{\nabla}_h \cdot \vec{u} \approx -z_0 \vec{\nabla}_h \cdot \vec{u}.$$

Στις παραπάνω σχέσεις θεωρήσαμε μικρές κινήσεις και αποκλίσεις από τη κατάσταση ισορροπίας π.χ. ο όρος $\zeta \vec{\nabla}_h \cdot \vec{u}$ είναι δεύτερης τάξης οπότε είναι αμελητέος. Στο ίδιο επίπεδο προσέγγισης

$$\vec{u} = \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t},$$

οπότε

$$\zeta = -z_0 \vec{\nabla}_h \cdot \vec{\xi}.$$

Προσέξτε ότι στον παραπάνω υπολογισμό θεωρήσαμε το βάθος z_0 σταθερό. Συνεπώς καταλήγουμε ότι οι διαταραχές εξελίσσονται σύμφωνα με την κυματική εξίσωση:

$$\frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = c^2 \nabla_h^2 \vec{\xi} - g \vec{\nabla}_h \zeta_0 .$$

όπου η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων είναι $c^2 = gz_0$ όπου z_0 το μέσο βάθος του νερού και ζ_0 είναι η παρέκλιση από το μέσο βάθος και η δυναμική ανωμαλία στο ύψος της επιφανείας βρίσκεται από τον τύπο: $\zeta = -z_0 \vec{\nabla}_h \cdot \vec{\xi}$.

Η κυματική αυτή εξίσωση είναι πολύ ακριβής όταν το μήκος κύματος του κύματος είναι πολύ μεγαλύτερο από το βάθος του νερού (shallow water approximation). Αυτή είναι η εξίσωση διάδοσης παλιρροϊκών κυμάτων ή tsunami. Αυτή είναι η ταχύτητα διάδοσης και εξομάλυνσης των ανωμαλιών όταν γίνει κάποια σεισμική μετατόπιση του πυθμένα σε μία θαλάσσια περιοχή. Η ταχύτητα αυτή είναι πολύ μεγάλη π.χ. για λεκάνη βάθους 1 km η ταχύτητα μετάδοσης των κυμάτων αυτών είναι $c = 100\text{m/s}$.

Η κυματική αυτή εξίσωση ισχύει σε ένα μη περιστρεφόμενο πλανήτη. Σε ένα περιστρεφόμενο πλανήτη πρέπει να προστεθούν και οι επιταχύνσεις Coriolis που οδηγούν σε πολύ ενδιαφέρουσες αλλαγές στην εξέλιξη των κυμάτων. Προς το παρόν εμείς θα αμελήσουμε την επιρροή της περιστροφής της Γης. Αυτή η προσέγγιση είναι καλή εάν υποθέσουμε ότι η λεκάνη δεν είναι πολύ μεγάλη, ή είναι μία μονοδιάστατη ζώνη στον ισημερινό ή κατα μήκος ενός μεσημβρινού οπότε η εγκάρσια κίνηση είναι μικρή με συνέπεια οι δυνάμεις Coriolis να μηδενίζονται. Αυτές τις δύο μάλιστα απλές περιπτώσεις θα εξετάσουμε πρώτα πριν παρουσιάσουμε την συμπεριφορά μίας περιστρεφόμενης υδάτινης μάζας, όπως έκανε Laplace στην *Mecanique Celeste*.

0.2 Το παλιρροϊκό δυναμικό

Έστω τώρα μία υδάτινη μάζα σταθερού βάθους η οποία όμως δέχεται κάποια εξωτερική παλιρροϊκή επίδραση που μετατοπίζει την ισοδυναμική επιφάνεια από την κατάσταση ισορροπίας κατά ζ_0 . Η ισοδυναμική επιφάνεια μίας λεκάνης νερού μετατοπίζεται ώστε

$$g\zeta_0 = \Phi_{tidal} ,$$

πέραν του σταθερού βάθους z_0 (έστω της λεκάνης) οπότε η κυματική εξίσωση που διέπει την δυναμική εξέλιξη των παλιρροϊών είναι:

$$\frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = c^2 \nabla_h^2 \vec{\xi} - \vec{\nabla}_h \Phi_{tidal} .$$

Παρατηρούμε ότι οι οριζόντιες συνιστώσες του παλιρροϊκού δυναμικού είναι αυτές που θα κινήσουν το νερό.

Το παλιρροϊκό δυναμικό στην επιφάνεια ενός πλανήτη ακτίνας a στο σημείο που προσδιορίζεται από την γωνία Δ που σχηματίζεται μεταξύ της ευθείας που ενώνει τα κέντρα των δύο ουρανίων σωμάτων με την ευθεία που ενώνει το κέντρο του κύριου σώματος με το σημείο είναι

$$\Phi_{tidal} = -\frac{GMa^2}{2R^3}(3 \cos^2 \Delta - 1)$$

όπου M είναι η μάζα του σώματος που προκαλεί την παλίρροια και R η απόσταση των κέντρων των δύο σωμάτων.

Η γωνία Δ είναι

$$\cos \Delta = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_r = \sin \theta \cos \Phi$$

όπου θ η πολική γωνία του σημείου από τον άξονα περιστροφής του κυρίου πλανήτη και Φ η αζιμουθιακή γωνία που σχηματίζεται στο επίπεδο κίνησης του σώματος που προκαλεί την παλίρροια και της αζιμουθιακής γωνίας του σημείου που γίνεται η παρατήρηση.

Σε τόπο τώρα που βρίσκεται σε αξιμουθιακή γωνία ϕ επειδή και το κεντρικό σώμα περιστρέφεται περί τον άξονα της καθώς και το άλλο σώμα περί το κεντρικό θα είναι:

$$\Phi = \Omega t + \phi + \phi_0$$

όπου Ω η φαινόμενη συχνότητα περιστροφής του σώματος γύρω από το κεντρικό σώμα, π.χ. στην περίπτωση Γης και Σελήνης είναι

$$\Omega = \Omega_E - \Omega_M$$

όπου $\Omega_E = 2\pi/(24 h)$ η συχνότητα περιστροφής της Γης περί τον άξονά της και $\Omega_M = 2\pi/(30days)$ η συχνότητα περιστροφής της σελήνης περί την Γή (και οι δύο περιστροφές έχουν την ίδια φορά).

0.3 Οι παλίρροιες στον ισημερινό είναι ανάποδες !

Θεωρήστε ότι κατασκευάζουμε ένα κανάλι σταθερού βάθους κατά μήκος του ισημερινού και αμελητέου πλάτους. Θα μελετήσουμε πως κινείται αυτή η υδάτινη μάζα λόγω της παλιρροϊκής δύναμης. Σε αυτή την περίπτωση το παλιρροϊκό κύμα μετατοπίζεται μόνο κατα μήκος του ισημερινού κατά $\xi(\phi, t)$ και ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{c^2}{a^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \phi^2} - f \sin(2\phi + 2\Omega t + 2\phi_0).$$

όπου

$$f = \frac{3GMa}{2R^3}.$$

Η κίνηση θα είναι περιοδική συνάρτηση του ϕ και σύμφωνα με το θεώρημα Fourier η πλέον γενική λύση θα παίρνει τη μορφή:

$$\xi = \sum_n A_n(t) \sin(n(\Omega t + \phi)) + B_n(t) \cos(n(\Omega t + \phi)).$$

Το θεώρημα Fourier μας αποκαλύπτει δηλαδή αμέσως τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης.

Αντικαθιστώντας στη κυματική εξίσωση για $n \neq 2$ έχουμε ελεύθερες ταλαντώσεις τα πλάτη των οποίων ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$\ddot{A}_n + \frac{n^2 c^2}{a^2} A_n = 0 \quad , \quad \ddot{B}_n + \frac{n^2 c^2}{a^2} B_n = 0$$

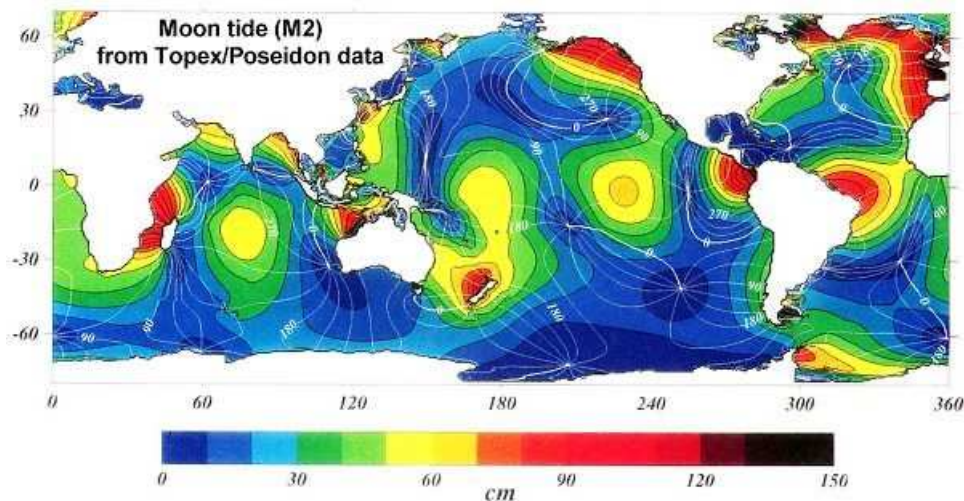
όποτε έχουμε κανονικούς τρόπους ταλάντωσης με συχνότητες $\omega_n = nc/a$. Για $n = 2$ έχουμε εξαναγκασμένη ταλάντωση και βρίσκουμε ότι τότε:

$$\xi = -\frac{1}{4} \frac{fa^2}{c^2 - \omega^2 a^2} \sin(2\phi + 2\Omega t + 2\phi_0)$$

ενώ η κατακόρυφη μετατόπιση είναι:

$$\begin{aligned} \zeta &= -\frac{z_0}{a} \frac{\partial \xi}{\partial \phi} \\ &= \frac{1}{2} \frac{fa z_0}{c^2 - \omega^2 a^2} \cos(2\phi + 2\Omega t + 2\phi_0). \end{aligned}$$

Αν η ταχύτητα του κύματος $c = \sqrt{gz_0}$ είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα κίνησης της παλιρροϊκής διέγερσης ωa τότε η παλιρροϊκή απόκριση έχει την ίδια φάση με τη σελήνη, όταν το φεγγάρι μεσουρανή έχουμε το μέγιστο της πλημμυρίδας. Αλλιώς το παλιρροϊκό κύμα δεν έχει τον χρόνο να επηρεάσει και έχουμε παλιρροϊκή απόκριση σε αντίθετη φάση από την παλιρροϊκή διέγερση όπως



Σχήμα 1: Οι παλίρροιες χαρακτηρίζονται από το πλάτος τους και την φάση τους. Στη φωτογραφία δείχνουμε τις τελευταίες δορυφορικές παρατηρήσεις τω παλίρροιών, οι γραμμές είναι γραμμές ίσης φάσης και οι χρωματισμένες περιοχές σημειώνουν το πλάτος της παλίρροιας. Όταν η φάση είναι 0 τότε το μέγιστο της πλημμυρίδας συμπίπτει με το φεγγάρι να μεσουρανή ή να μεσουνηχτ..... Όταν είναι 180 έχουμε το ανάποδο και η δυναμική απόκριση είναι ακριβώς αντίθετη από την απόκριση που θα πρόεβλεπε η παλίρροια στη κατάσταση ισορροπίας. Τα σημεία που συγκλίνουν οι γραμμές φάσεως λέγονται αμφίδρομα σημεία και είναι σημεία χωρίς παλίρροια. Ακολουθώντας τις γραμμές ίσης φάσης κανείς μπορεί να φανταστεί την κίνηση των μετώπων της παλίρροιας.

ακριβώς συμβαίνει στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις όταν η περίοδος της φυσικής ταλάντωσης είναι μεγαλύτερη από τη περίοδο του διεγέρτη. Σχηματίζουμε τον λόγο

$$\frac{c^2}{\omega^2 a^2} = \frac{h}{\frac{\omega^2 a^2}{g}} = \frac{z_0(\text{km})}{20.5(\text{km})},$$

και βρίσκουμε ότι μόνο αν το βάθος του καναλιού ήταν μεγαλύτερο από 20.5 χιλιόμετρα θα είχαμε απόκριση σε φάση με τη σελήνη. Το μέσο βάθος των ωκεανών είναι 5 χιλιόμετρα ενώ το μέγιστο βάθος είναι περί τα 10.

Το πρόβλημα είναι σχεδόν απαράλλαχτο αν θεωρήσουμε ένα κανάλι γύρω από τη γη σε σταθερό γεωγραφικό πλάτος, τότε τα σημεία του καναλιού θα σχηματίζουν γωνία Δ

$$\cos \Delta = \sin \theta \cos(\Omega t + \phi + \phi_0)$$

όπου θ η σταθερή πολική γωνία που σχηματίζει το κανάλι με τον άξονα περιστροφής του κεντρικού σώματος. Σε αυτή την περίπτωση δείξτε ότι παλιρροϊκή απόκριση είναι:

$$\begin{aligned} \zeta &= -\frac{z_0}{a \sin \theta} \frac{\partial \xi}{\partial \phi} \\ &= \frac{1}{2} \frac{f a z_0 \sin^2 \theta}{c^2 - \omega^2 a^2 \sin^2 \theta} \cos(2\phi + 2\Omega t + 2\phi_0). \end{aligned}$$

οπότε αν $\omega a > c$ η παλίρροια θα είναι σε φάση με το φεγγάρι αν $\sin \theta < c/\omega a$ (για βάθος 3 χιλιομέτρων αυτό συμβαίνει σε γεωγραφικό πλάτος περί τα 68 !).

0.4 Οι παλίρροιες σε ένα μεσημβρινό κανάλι

Τότε επειδή το κανάλι βρίσκεται σε σταθερή αξιμουθιακή γωνία η κίνηση ξ θα γίνεται κατα τη πολική διεύθυνση θ και το ουράνιο σώμα θα σχηματίζει γωνία

$$\cos \Delta = \sin \theta \cos(\Omega t + \phi_0).$$

Η εξίσωση κίνησης θα είναι:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= \frac{c^2}{a^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_{tidal}}{\partial \theta} \\ &= \frac{c^2}{a^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} + \frac{f}{2} \sin 2\theta (1 + \cos(2\Omega t + 2\phi_0)) .\end{aligned}$$

και η εξαναγκασμένη λύση της:

$$\xi = \frac{fa^2}{8c^2} \sin 2\theta + \frac{1}{8} \frac{fa^2}{c^2 - \omega^2 a^2} \sin 2\theta \cos(2\Omega t + 2\phi_0) .$$

και συνεπώς η απόκριση της επιφάνειας του νερού είναι

$$\begin{aligned}\zeta &= -\frac{z_0}{a} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \\ &= -\frac{faz_0}{4c^2} \cos 2\theta - \frac{1}{4} \frac{faz_0}{c^2 - \omega^2 a^2} \cos 2\theta \cos(2\Omega t + 2\phi_0) .\end{aligned}$$

Ο πρώτος όρος είναι μία διόρθωση στο βάθος ισορροπίας του νερού ενώ ο δεύτερος όρος δίνει απόκριση σε φάση με το φεγγάρι αν $\omega a > c$ και $\theta < \pi/4$ και σε αντίθετη φάση αντίθετα.

0.5 Παλίρροιες σε μία περιορισμένο μεσημβρινό κανάλι

Στα μονοδιάστα κανάλια που θεωρήσαμε η φάση των παλιρροιών είχαν διαφορά φάσης είτε 0 είτε 180 σχετικά με τη φάση του αιτίου που τις προκαλούσε. Θα θεωρήσουμε τώρα ένα πεπερασμένο κανάλι σε ένα μεσημβρινό, πέστε ότι εκτείνεται στο διάστημα με πολικές γωνίες $[\alpha, \beta]$. Ένα τέτοιο κανάλι μπορεί να είναι ο ατλαντικός ωκεανός ή ο πορθμός του Ευρύπου. Η εξίσωση κίνησης είναι πάλι η

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{c^2}{a^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} + \frac{f}{2} \sin 2\theta (1 + \cos(2\Omega t + 2\phi_0)) .$$

$$\xi(\alpha) = \xi(\beta) = 0 ;$$

0.6 Η κίνηση ατόμων σε ένα κυκλικό μόριο

εξίσωση ταλάντωσης των n ατόμων είναι

$$\ddot{q} + \omega_0^2 K q = 0$$

όπου ο $n \times n$ πίνακας είναι

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Οι χαρακτηριστικές συχνότητες είναι

$$\omega_m = 2\omega_0 \sin\left(\frac{\pi m}{n}\right) , \quad m = 0, \dots, n-1 .$$

Οι αντιστοιχούσες χαρακτηριστικές συντεταμένες είναι

$$Q_k^m = \frac{1}{\sqrt{n}} \exp\left(i \frac{2\pi m k}{n}\right) , \quad m = 0, \dots, n-1 ,$$

όπου m η χαρακτηριστική συντεταγμένη και k η συντεταγμένη.

Οι χαρακτηριστικές συντεταγμένες σχηματίζουν μία ορθοκανονική βάση διότι είναι:

$$Q^{I\dagger}Q^J = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \exp\left(i\frac{2\pi(J-I)k}{n}\right),$$

και όταν είναι $J = I$ τότε αμέσως έχουμε ότι $Q^{I\dagger}Q^J = 1$, ενώ όταν $J \neq I$ θέτοντας

$$z = \exp\left(i\frac{2\pi(J-I)}{n}\right)$$

υπολογίζουμε ότι το άθροισμα είναι:

$$\begin{aligned} Q^{I\dagger}Q^J &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n z^k \\ &= \frac{z z^n - 1}{n z - 1} \\ &= \delta_{JI}. \end{aligned}$$

Αν αρχικά ήταν $q_k(0) = \delta_{kk_0}$ τότε αυτή η κατάσταση αναλύεται στις χαρακτηριστικές συντεταγμένες ως εξής:

$$\begin{aligned} q_k(0) &= \sum_{m=0}^{n-1} C_m Q_k^m \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=0}^{n-1} C_m \exp\left(i\frac{2\pi mk}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \exp\left(i\frac{2\pi m(k-k_0)}{n}\right). \end{aligned}$$

Συνεπώς η χρονική εξέλιξη της k συντεταγμένης αυτής της αρχικής κατάστασης είναι:

$$\begin{aligned} q_k(t) &= \sum_{m=0}^{n-1} C_m Q_k^m \cos(\omega_m t) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \exp\left(i\frac{2\pi m(k-k_0)}{n}\right) \cos\left(2\omega_0 \sin\left(\frac{\pi m}{n}\right) t\right). \end{aligned}$$

Ειδικά η k_0 συντεταγμένη εξελίσσεται ως:

$$\begin{aligned} q_{k_0}(t) &= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \cos\left(2\omega_0 \sin\left(\frac{\pi m}{n}\right) t\right) \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \cos\left(2\omega_0 \sin\left(\frac{\pi m}{n}\right) t\right) \frac{\pi \delta m}{N} \\ &\approx \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(2\omega_0 t \sin x) dx \\ &= J_0(2\omega_0 t). \end{aligned}$$

Προσεγγίσαμε το άθροισμα με ολοκλήρωμα στο όριο $n \rightarrow \infty$. Εκφράσαμε το άθροισμα ως το ολοκλήρωμα παρατηρώντας ότι το άθροισμα είναι η προσέγγιση του ολοκληρώματος αν η ολοκληρωτέα

συνάρτηση υπολογισθεί στα σημεία $x_m = \pi m/n$ του διαστήματος $[0, \pi]$. Ο διαμερισμός αυτός σε n σημεία έχει βήμα $\delta x_m = \pi \delta m/n$ με $\delta m = 1$.

Οι άλλες συντεταγμένες δίδονται από την έκφραση:

$$\begin{aligned}
 q_k(t) &= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \exp\left(i \frac{2\pi m(k-k_0)}{n}\right) \cos\left(2\omega_0 \sin\left(\frac{\pi m}{n}\right) t\right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \exp\left(i \frac{2\pi m(k-k_0)}{n}\right) \cos\left(2\omega_0 \sin\left(\frac{\pi m}{n}\right) t\right) \frac{\pi \delta m}{n} \\
 &\approx \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(2\omega_0 t \sin x) \cos(2(k-k_0)x) dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (\cos(2((k-k_0)x - 2\omega_0 t \sin x)) + \cos(2((k-k_0)x + 2\omega_0 t \sin x))) dx \\
 &= \frac{1}{2} (J_{2(k-k_0)}(2\omega_0 t) + J_{-2(k-k_0)}(2\omega_0 t)) .
 \end{aligned}$$

Επειδή για $x \rightarrow \infty$

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) ,$$

θα είναι:

$$q_k(t) \approx (-1)^{k-k_0} \sqrt{\frac{1}{\pi \omega_0 t}} \cos\left(2\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right) \equiv (-1)^{k-k_0} J_0(2\omega_0 t)$$

Τα αποτελέσματα αυτά είναι ασυμπτωτικά. Βεβαίως η συνεχής προσέγγιση ισχύει για πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Θέλουμε να εκτιμήσουμε τώρα το χρονικό διάστημα που ισχύει η συνεχής προσέγγιση.

Θα διερευνήσουμε τώρα τη συμπεριφορά ολοκληρωμάτων της μορφής

$$F(t) = \int_a^b f(x) e^{ixt} dx$$

για $t \rightarrow \infty$. Ολοκληρώματα αυτής της μορφής (βλ. διάγραμμα) τείνουν στο μηδέν όταν $t \rightarrow \infty$. Αν το a και b είναι πεπερασμένα και η $f(x)$ σταθερά τότε το αποτέλεσμα προκύπτει αμέσως και μάλιστα γνωρίζουμε στην περίπτωση αυτή ότι η αλληλοαναίρεση των ταλαντώσεων οδηγεί το ολοκλήρωμα να είναι τάξης $O(1/t)$. Η ίδια όμως συμπεριφορά αναμένεται όμως και όταν η $f(x)$ δεν είναι η σταθερή συνάρτηση διότι τότε όσο το t μεγαλώνει τόσο η περίοδος της αρμονικής συνάρτησης e^{ixt} που είναι $2\pi/t$ μικραίνει και το ολοκλήρωμα σε μεγάλη προσέγγιση γίνεται, χωρίζοντας το διάστημα σε n υποδιαστήματα με $a = x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} = b$, ίσο με:

$$\begin{aligned}
 |F(t)| &\approx \left| \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} e^{i\xi t} d\xi \right| \\
 &= \left| \sum_i f(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} e^{i\xi t} d\xi \right| \\
 &\leq \sum_i \frac{2|f(x_i)|}{t} \\
 &= \frac{2nk}{t} ,
 \end{aligned}$$

όπου k κάποιο ανώτερο φράγμα της $f(x)$. Από αυτή την ανισότητα προκύπτει ότι για κάθε n όσο μεγάλο και αν είναι αυτό υπάρχει t που κάνει την $|F(t)|$ μικρότερη από κάθε θετικό αριθμό, συνεπώς η

$F(t) \rightarrow 0$ όταν $t \rightarrow \infty$. Κατ'ουσία έτσι απέδειξε ο Riemann την παραπάνω πρόταση η οποία ονομάζεται λήμμα Riemann-Lebesgue παρότι το είχε δημοσιεύσει ο Hamilton νωρίτερα.

Το κλασικό αυτό αποτέλεσμα έχει πολλές αποδείξεις ανάλογα τις υποθέσεις που κάνει κανείς για την συνάρτηση $f(x)$ και τα όρια της ολοκλήρωσης. Θα δώσουμε δύο άλλες αποδείξεις του λήματος Riemann-Lebesgue κάνοντας ασθενέστερες υποθέσεις για την συνάρτηση $f(x)$. Θα υποθέσουμε ότι η $f(x)$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη, δηλαδή είναι $\int_a^b |f(x)|dx = K_0$ αλλά και παραγωγίσιμη.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)e^{ixt} dx &= \int_a^b f(x) \frac{de^{ixt}}{it} dx \\ &= \frac{f(b)e^{ibt} - f(a)e^{iat}}{it} - \frac{1}{it} \int_a^b f'(x)e^{ixt} dx, \end{aligned}$$

όπου $f'(x)$ είναι η πρώτη παράγωγος. Συνεπώς αν η συνάρτηση $f'(x)$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη και $\int_a^b |f'(x)|dx = K_1$, τότε μπορούμε να εκτιμήσουμε ότι

$$\left| \int_a^b f(x)e^{ixt} dx \right| \leq \frac{|f(b)| + |f(a)|}{t} + \frac{K_1}{t},$$

δηλαδή σε αυτή τη περίπτωση το ολοκλήρωμα στο όριο $t \rightarrow \infty$ είναι τάξης $O(1/t)$. Παρατηρήστε ότι ο πρώτος όρος τάξης $O(1/t)$ προέρχεται από τα όρια της ολοκλήρωσης. Ο δεύτερος όρος μπορεί να εκτιμηθεί ότι είναι τάξης $O(1/t^2)$ αν υποθέσουμε ότι υπάρχει και δεύτερη παράγωγος, $f''(x)$, που είναι και αυτή απόλυτα ολοκληρώσιμη $\int_a^b |f''(x)|dx = K_2$, Πράγματι μία νέα ολοκλήρωση κατα μέρη δίνει:

$$\left| \int_a^b f'(x)e^{ixt} dx \right| \leq \frac{|f'(b)| + |f'(a)|}{t} + \frac{K_2}{t}.$$

Εάν η συνάρτηση έχει παραγώγους κάθε τάξης τότε η διαδικασία αυτή μπορεί να συνεχισθεί επ'άπειρον. Αν δε τα όρια της ολοκλήρωσης μετατεθούν στο άπειρο και οι τιμές των συναρτήσεων και κάθε τάξης παραγώγων των συναρτήσεων τείνουν στο μηδέν προκύπτει ότι η αλληλοαναίρεση είναι τόσο αποτελεσματική ώστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ixt} dx \approx O(t^{-n})$$

για κάθε θετικό n , οπότε και γίνεται εκθετικά μικρό.

Η περίπτωση αυτή μπορεί να αναλυθεί και διαφορετικά αναλυτικά επεκτείνοντας την $f(x)$ στο μιγαδικό πεδίο και κάνοντας την υπόθεση ότι η $f(z)$ είναι αναλυτική συνάρτηση