

*ΣΤ Σειρά Ασκήσεων*  
*22 Ιανουαρίου 2006- γραπτή παράδοση 29/1*

Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

1. Ένα ημισφαίριο ακτίνας  $a$  που αποτελείται από ομογενές υλικό πυκνότητας  $\rho_1$  τοποθετείται ακίνητο στην επιφάνεια οριζοντίου επιπέδου μέσα σε ένα ιδανικό ρευστό πυκνότητας  $\rho$  που ρέει μακριά από το ημισφαίριο με οριζόντια ταχύτητα  $U$ . Το ημισφαίριο βρίσκεται στο ομογενές πεδίο βαρύτητας έντασης  $-g$  στη κατακόρυφη διεύθυνση. Η ροή του ιδανικού ρευστού θεωρείται ασυμπίεστη και αστρόβιλη. Προσδιορίστε τη ροή του ρευστού και τη δύναμη που ασκείται στο ημισφαίριο από τη ροή. Παρουσιάζεται δύναμη αντίστασης στη κίνηση του ρευστού; Δείξτε ότι μόνο αν η πυκνότητα της σφαίρας ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$\rho_1 \geq \rho + \frac{33}{64} \frac{\rho U^2}{ga}$$

θα παραμείνει το ημισφαίριο επί του επιπέδου.

2. *Θεώρημα αμοιβαιότητας του Lorentz (1906)* Θεωρήστε την ασυμπίεστη ροή που προκαλείται από στερεό σώμα που κινείται με ταχύτητα  $\vec{U}(t)$  σε απεριόριστο ρευστό μεγάλου ιξώδους. Υποθέτουμε ότι η επαγόμενη ταχύτητα είναι τάξης  $O(1/r)$  σε μεγάλες αποστάσεις  $r$  από το σώμα και ικανοποιεί την προσέγγιση του Stokes σύμφωνα με την οποία οι αδρανειακές επιταχύνσεις είναι αμελητέες (Αριστοτέλεια προσέγγιση της δυναμικής).

1. Εάν το πεδίο ταχυτήτων  $\vec{u}$  με τον αντίστοιχο τανυστή τάσης  $\sigma$  είναι μία ροή περί το σώμα που ικανοποιεί τις εξισώσεις του Stokes και  $\vec{u}'$ ,  $\sigma'$  μία δεύτερη ροή που και αυτή για τον ίδιο όγκο ρευστού (αλλά για διαφορετικές συνοριακές συνθήκες) ικανοποιεί τις εξισώσεις του Stokes τότε θα ισχύει:

$$\int_S u_i \sigma'_{ij} n_j dS = \int_S u'_i \sigma_{ij} n_j dS$$

όπου  $dS$  στοιχείο της επιφάνειας του σώματος και  $\vec{n}$  η προς τα έξω κάθετος στην επιφάνεια του σώματος.

2. Δείξτε με προσοχή ότι η αντίσταση που ασκείται στο σώμα  $\vec{F}$  είναι γραμμική συνάρτηση της ταχύτητας του σώματος  $F_i(t) = A_{ij} U_j(t)$  όπου  $A_{ij}$  ένας χρονοανεξάρτητος τανυστής που εξαρτάται από τη γεωμετρία του στερεού σώματος.

3. Κάνοντας χρήση του θεωρήματος αμοιβαιότητας αποδείξτε ότι η αντίσταση  $\vec{F}_1$  στο σώμα όταν αυτό κινείται με ταχύτητα  $\vec{U}_1$  και η αντίσταση στο σώμα  $\vec{F}_2$  όταν αυτό κινείται με ταχύτητα  $\vec{U}_2$  ικανοποιεί τη σχέση  $\vec{F}_1 \cdot \vec{U}_2 = \vec{F}_2 \cdot \vec{U}_1$ . Εξ' αυτού αποδείξτε ότι ο τανυστής  $A_{ij}$  είναι συμμετρικός.

4. Δείξτε τέλος ότι η ισχύς που καταναλώνεται για να κινείται το σώμα με ταχύτητα  $\vec{U}(t)$  ισούται με την ανάλωση της ροής περί το σώμα από το ιξώδες, δηλαδή

$$-F_i U_i = 2\mu \int_V e_{ij} e_{ij} dV,$$

όπου  $V$  ο όγκος του ρευστού.