Ε Σειρά Ασκήσεων
23 Δεκεμβρίου 2005- γραπτή παράδοση 11/1/06

Προτεινόμενο διάβασμα

Η ύλη που συμπεραλαμβάνουμε έχει καλυφθεί ήδη στις διαλέξεις

Landau

Chapter 1: Sections 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10

Chapter 2: Sections 15, 16, 17

Chapter 8: Section 64

Batchelor

Chapter 1: 1.2, 1.3, 1.4,1.6

Chapter 2: 2.1,2.2,2.3, p. 120-124

Chapter 3 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5. 3.6

Chapter 4 : 4.1, 4.2

Chapter 5: 5.1, 5.2, 5.3, 5.4

Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

1. (Διαστελλόμενο σύμπαν) Θεωρήστε ότι το σύμπαν είναι ένα σφαιρικό ρευστό και ότι τα πεδία της ταχύτητας $\vec{u}$, της πυκνότητας ρ και του βαρυτικού δυναμικού ϕ ικανοποιούν την εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \ ,$$

τις εξισώσεις Euler χωρίς την ύπαρξη πίεσης:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \ = \ - \nabla \phi \ ,$$

και το βαρυτικό δυναμικό ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \ .$$

1. Υποθέστε τώρα ότι αρχικά η ταχύτητα του σύμπαντος είναι ακτινική $\vec{u} = u\vec{e}_r$ και όλα τα πεδία είναι σφαιρικά συμμετρικά και εξαρτώνται μόνο από την απόσταση r από το κέντρο, τον χρόνο t και τη σταθερά της βαρύτητας G που έχει διαστάσεις: $[G] = L^3 M^{-1} T^{-2}$. Μόνο από ανάλυση των διαστάσεων προσδιορίστε τη χρονική και χωρική εξάρτηση των πεδίων $u(r,t,G)$, $\rho(r,t,G)$ και $\phi(r,t,G)$.

2. Γράψτε τις εξισώσεις σε πολικές συντεταγμένες και επιβεβαιώστε ότι οι συναρτήσεις που προβλέψατε από ανάλυση των διαστάσεων πράγματι λύνουν τις εξισώσεις και προσδιορίστε τις τρεις σταθερές που προσδιορίζουν πλήρως τις λύσεις. Υπ. η ακτινική επιτάχυνση είναι:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r}$$

3. Τι προβλέπεται σε αυτή τη κοσμολογία για την "σταθερά" του Hubble. Πως εξελίσσεται αυτό το σύμπαν;

4. Πόσος ο στροβιλισμός της λύσης που βρήκατε; Γράψτε την εξίσωση εξέλιξης του στροβιλισμού. Τι συμπεραίνετε για τον στροβιλισμό σε κατοπινά στάδια εξέλιξης του σύμπαντος όταν το πεδίο ταχύτητας δεν είναι απόλυτα σφαιρικά συμμετρικό (π.χ. υπάρχουν και ακουστικές διακυμάνσεις). Εάν γνωρίζουμε ότι υπάρχει στροβιλισμός τι συμπέρασμα μπορείτε να εξάγετε στα πλαίσια της Νευτώνειας θεωρίας για την αρχική εξέλιξη του σύμπαντος;

2. Θεωρήστε μία σκληρή σφαίρα ακτίνας a της οποίας το κέντρο βρίσκεται στη θέση $\vec{x}_0(t)$. Η ταχύτητά της είναι $\vec{U}_0(t) = d\vec{x}_0/dt$. Η σφαίρα βρίσκεται μέσα σε ένα ασυμπίεστο ιδανικό ρευστό πυκνότητας ρ το οποίο σε μεγάλες αποστάσεις από τη σφαίρα κινείται με ταχύτητα $\vec{U}_\infty(t)$. Η ροή του ρευστού θεωρείται αστρόβιλη οπότε η ταχύτητα προκύπτει από το δυναμικό $\vec{u} = \nabla\phi$. Αμελήστε το ποεδίο βαρύτητας.

1. Υπολογίστε το δυναμικό και το πεδίο ταχυτήτων που προκύπτει. Σχεδιάστε τις γραμμές ροής μία χρονική στιγμή στις περιπτώσεις όταν $\vec{U}_\infty(t) = 0$ αλλά $\vec{U}_0(t) \neq 0$ και όταν $\vec{U}_\infty(t) \neq 0$ αλλά $\vec{U}_0(t) = 0$.

2. Αποδείξτε ότι ανά πάσα στιγμή η ποσότητα

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{|\nabla\phi|^2}{2}$$

υπολογισμένη σε κάθε σημείο του ρευστού είναι ίση με την ίδια χρονική συνάρτηση $A(t)$ και εξ αυτού υπολογίστε την πίεση στην επιφάνεια.

3. Η δύναμη που ασκείται από το ρευστό στην επιφάνεια της σφαίρας είναι ίση με

$$\vec{F} = -\int_{S(a)} p\vec{n}dS$$

όπου $S(a)$ η επιφάνεια της σφαίρας και $\vec{n}$ η προς τα έξω κάθετος στην επιφάνεια της σφαίρας. Πόση είναι αυτή η δύναμη όταν οι ταχύτητες της σφαίρας και του ρευστού στο άπειρο είναι σταθερές;

4. Για την περίπτωση για την οποία $\vec{U}_\infty(t) = 0$ υπολογίστε την συνολική κινητική ενέργεια του ρευστού [Υπ. είναι συνάρτηση μόνο της ακτίνας της σφαίρας, της ταχύτητας της σφαίρας, και της πυκνότητας του ρευστού].

5. Γράψτε την ενεργό Λαγκρανζιανή που θα περιέγραφε τη κίνηση της σφαίρας σε αυτό το ρευστό (πάλι με $\vec{U}_\infty(t) = 0$). Θεωρήστε ότι η πυκνότητα της σφαίρας είναι ρ_0.

6. Θεωρήστε τώρα ότι η σφαίρα βρίσκεται και στο ομογενές πεδίο βαρύτητας. Υπολογίστε την άνωση που ασκείται στη σφαίρα.

7. Ένα εκκρεμές εκτελεί μικρές κινήσεις στο κατακόρυφο επίπεδο μέσα σε ιδανικό αστρόβιλο και ασυμπίεστο ρευστό πυκνότητας ρ που εκτείνεται σε όλο τον τριδιάστατο χώρο και ηρεμεί στο άπειρο. Το εκκρεμές αποτελείται από μία αβαρή ράβδο μήκους l και στο άκρο της ράβδου βρίσκεται το κέντρο ομογενούς σφαίρας ακτίνας a, με $a < l$, και πυκνότητας ρ_0. Γράψτε την Λαγκρανζιανή για τη κίνησή του και υπολογίστε την συχνότητα ταλάντωσής του. Πόσο μεγάλη διόρθωση επιφέρει στη περίοδο η κίνηση του ρευστού; Μπορείτε να το επιβεβαιώσετε αυτό πειραματικά;