Δ Σειρά Ασκήσεων
14 Δεκεμβρίου 2005- γραπτή παράδοση 21/12

Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

1. Θεωρήστε ότι ρέει ένα ρευστό σταθερής πυκνότητας σε έναν ακίνητο κυκλικό κυλινδρικό σωλήνα ακτίνας R κατά μήκος του άξονα συμμετρίας του κυλίνδρου z στον οποίο ασκείται σταθερή βαθμίδα πίεσης έτσι ώστε να παρουσιάζεται πτώση πίεσης Δp κάθε απόσταση L δηλαδή είναι $-dp/dz = \Delta p/L$. Υποθέστε ότι η ροή είναι μόνο συνάρτηση της απόστασης r από τον άξονα συμμετρίας. Χρησιμοποιήστε κυλινδρικές συντεταγμένες (r, θ, z).

1. Προσδιορίστε τη ροή $(u_r, u_\theta, u_z) = (0, 0, U(r))$ και την εξάρτησή της από τις σταθερές Δp, L, R, και το ιξώδες μ. Αμελήστε το πεδίο βαρύτητας (έτσι και αλλοιώς δεν έχει συνεισφορά σε αυτό το πρόβλημα). Η ροή αυτή είναι στάσιμη λύση των εξισώσεων Navier-Stokes και λέγεται ροή Hagen - Poiseuille και μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι ευσταθής για όλες τις τιμές των παραμέτρων δηλαδή για όλους τους αριθμούς Reynolds (αντιθετα με τη ροή .Poiseuille σε ένα επίπεδο αγωγό, η οποία γίνεται ασταθής για ορισμένους αριθμούς Reynolds όπως ανακάλυψε ο Heisenberg). Παρά την ευστάθειά της η Hagen - Poiseuille γίνεται τυρβώδης όταν ο αριθμός Reynolds είναι αρκούντως μεγάλος.

2. Υπολογίστε την ολική παροχή και δείξτε ότι η μέση ταχύτητα είναι το ήμισυ της μέγιστης ταχύτητας.

3. Λαμβάνοντας ένα κυλιδρικό όγκο ακτίνας a με ίδιο άξονα με αυτόν του σωλήνα, υπολογίστε για τη ροή που βρήκατε τη συνολική δύναμη που ασκείται σε αυτό τον κύλινδρο (πρέπει να είναι μηδενική δεδομένου ότι είναι στάσιμη). Προσέξτε ότι οι μόνες δυνάμεις που ασκούνται είναι οι επιφανειακές δυνάμεις, οπότε οι συνιστώσες της συνολικής δύναμης που ασκείται στον κύλινδρο είναι η $\int \sigma_{ij} n_i dS$, όπου n_i οι συνιστώσες τών καθέτων στην κλειστή κυλινδρική επιφάνεια. Ο γενικός συμμετρικός τανυστής παραμόρφωσης σε κυλινδρικές πολικές συντεταγμένες έχει συνισταμένες:

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \ , \ e_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \ , \ e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$e_{r\theta} = \frac{r}{2}\frac{\partial (u_\theta/r)}{\partial r} + \frac{1}{2r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} \ , \ e_{\theta z} = \frac{1}{2r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{1}{2}\frac{\partial u_\theta}{\partial z} \ , \ e_{rz} = \frac{1}{2}\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial u_z}{\partial r}$$

2. *Ροή ΄πάνω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο* Θεωρήστε τη στάσιμη ροή ενός Νευτώνειου ρευστού σταθερού βάθους d επί ενός κεκλιμένου επιπέδου που σχηματίζει γωνία α με το οριζόντιο επίπεδο. Εδώ η βαρύτης είναι το αίτιο της κίνησης. Η άνω επιφάνεια του ρευστού είναι ανοικτή και περιβάλλεται από τον αέρα, ο οποίος θεωρείται ότι είναι μηδαμινής πυκνότητας και δεν συμμετέχει στη κίνηση. Γενικά στη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ δύο ρευστών απαιτείται συνέχεια των εφαπτομενικών στην επιφάνεια και καθέτων στην επιφάνεια τάσεων. Στην επίπεδη επιφάνεια που χωρίζει τώρα το ρευστό από τον αέρα θεωρούμε ότι η εφαπτομενική επιφανειακή δύναμη είναι μηδενική (η εφαπτομενική δύναμη είναι συνεχής συνάρτηση και μηδενίζεται στον αέρα δεδομένου ότι θεωρείται ακίνητος) και ότι η πίεση στην επιφάνεια είναι ίση με την ατμοσφαιρική πίεση.

1. Δείξτε ότι η εφαπτομενική τάση που ασκεί ένα κινούμενο ρευστό στην επιφάνειά του είναι ίση με $\mu \frac{du_x}{dy}$ όπου u_x η ταχύτητα στην κατεύθυνση του εφαπτόμενου επιπέδου της επιφανείας και y στη διεύθυνση κάθετη στην επιφάνεια.

2. Ποιές συνοριακές συνθήκες ΄ικανοποιούνται στην επιφάνεια του κεκλιμένου επιπέδου και επί της ελεύθερης επιφανείας.

3. Υπολογίστε το πεδίο ταχυτήτων της ροής, σχεδιάστε τη ταχύτητα που προκύπτει, και υπολογίστε ανα μονάδα πλάτους του κεκλιμένου επιπέδου τη παροχή. Αρχίστε δείχνοντας ότι οι εξισώσεις κίνησης είναι οι ακόλουθες:

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \rho g \sin\alpha &= 0 \\
-\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \cos\alpha &= 0,
\end{aligned}
$$

όπου x η διεύθυνση κατά μήκους του κεκλιμένου επιπέδου και y η διεύθυνση η κάθετη στο κεκλιμένο επίπεδο.

4. Θεωρούμε τώρα ότι επί του κεκλιμένου επιπέδου ρέουν δύο ρευστά ίδιας πυκνότητας αλλά διαφορετικού ιξώδους. Το βάθος του πρώτου (στο κάτω στρώμα) είναι d_1 και το ιξώδες του μ_1 , ενώ το δεύτερο, στο άνω στρώμα, έχει βάθος d_2 και ιξώδες μ_2. Προσδιορίστε τη ταχύτητα ροής και σχεδιάστε την. Η ταχύτητα στο κάτω στρώμα εξαρτάται από το d_2 αλλά όχι από το μ_2, Γιατί;