Γ Σειρά Ασκήσεων
7 Δεκεμβρίου 2005- γραπτή παράδοση 14/12

Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

1. Θεωρήστε το συμμετρικό τανυστή παραμόρφωσης e_{ij}. Έιναι αληθής η ταυτότητα:

$$e_{ij}e_{ji} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad .$$

2. *Καταστατική εξίσωση για ρευστά με προσανατολισμό.* Θεωρήστε ένα υλικό που αποτελείται από υγρούς κρυστάλλους (τέτοιο ρευστό είναι στις νέες οθόνες των υπολογιστών). Υποθέστε ότι αυτό το ρευστό προκύπτει με την εισαγωγή σε ένα Νευτώνειο ρευστό μορίων με μορφή μικροσκοπικών στερεών ράβδων. Τα μόρια αυτά μπορούν να προσανατολιστούν και συμβολίζουμε σε κάθε σημείο του χώρου με $\vec{N}$ το μέσο διάνυσμα προσανατολισμού των μορίων (όπου $\vec{N}\cdot\vec{N} = 1$). Τα διανύσματα $\vec{N}$ ορίζουν με το τρόπο αυτό το πεδίο προσανατολισμού του ρευστού. Γενικά το πεδίο προσαναταλισμού είναι άγνωστο και εξαρτάται από τη ροή και μπορεί να βρεθεί μόνο επιλύοντας τις εξισώσεις κίνησης. Για να προσδιορίσουμε όμως τις εξισώσεις κίνησης πρέπει να συσχετίσουμε τον τανυστη τάσης σ_{ij} με τον τανυστή παραμόρφωσης του πεδίου ταχύτητας της ροής. Ο τανυστής τάσης αναμένεται να είναι της μορφής: $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + d_{ij}$ όπου p η θερμοδυναμική πίεση στη κατάσταση ηρεμίας και το d_{ij} συμμετρικός τανυστής που θεωρούμε ότι εξαρτάται γραμμικά από τη παραμόρφωση που επιβάλλεται σε κάθε σημείο από το πεδίο της ταχύτητας:

$$d_{ij} = A_{ijkl}(\vec{N})\frac{\partial u_k}{\partial x_l} \ ,$$

όπου ο A εξαρτάται τώρα και από το πεδίο $\vec{N}$.

1. Τι υποθέτει κανείς με την παραπάνω πρόταση για τη κατάσταση ισορροπίας;
2. Δείξτε ότι αν d_{ij} είναι μόνο συνάρτηση του συμμετρικού τανυστή παραμόρφωσης e_{ij} ότι τότε $A_{ijkl} = A_{ijlk}$.
3. Θεωρούμε τώρα ότι η εξάρτηση $A(\vec{N})$ είναι τέτοια ώστε ο A να είναι αναλλοίωτος σε κατοπτρισμούς $\vec{N} \to -\vec{N}$ (πως εκλογικεύετε αυτή τη παραδοχή; συμφωνείτε;). Αν ο A_{ijkl} μπορεί να γραφεί συναρτήσει διαφόρων δ_{ij} και διαφόρων συντεταγμένων του $\vec{N}$ γράψτε τη γενικότερη σχέση για το A.
4. Γράψτε τη δυναμική εξίσωση κίνησης για αυτό το ρευστό.

3. Δίδεται το πεδίο ταχύτητας

$$\vec{u} = (u_x(x,y), 0, 0) = (y, 0, 0) \ .$$

1. Υπολογίστε την απόκλιση του πεδίου και τον στροβιλισμό του $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$.
2. Υπολογίστε τον συμμετρικό τανυστή e_{ij} και προσδιορίστε τους κύριους άξονες του.
3. Θεωρήστε ένα τετραγωνικό χωρίο στο ρευστό. Σχεδιάστε το χωρίο αυτό λίγο αργότερα. Σχεδιάστε επίσης τη παραμόρφωση που γίνεται στο χωρίο αυτό από τον e_{ij} και έπειτα από τον αντισυμμετρικό ξ_{ij}.

4. Δίδεται το πεδίο ταχύτητας:

$$\vec{u} = (u_x(x,y), u_y(x,y), 0) = (\sin\pi x\cos\pi y, -\cos\pi x\sin\pi y, 0) \ .$$

1. Μπορούμε να ορίσουμε την ρευματοσυνάρτηση $\psi(x, y)$ έτσι ώστε $u_x = \partial\psi/\partial y$ και $u_y = -\partial\psi/\partial x$. Οι σχέσεις αυτές θυμίζουν τις εξισώσεις του Χάμιλτον και συνεπώς αποδείξτε ότι το ρευστό θα κινείται επί καμπύλων σταθερού ψ, δηλαδή αν αφήναμε ένα μικροσκοπικό κόκκο σκόνης θα ακολουθήσει καμπύλη σταθερού ψ. Υπολογίστε τη ρευματοσυνάρτηση για τη ροή που σας δίδεται και σχεδιάστε τη ροή. Τι παριστάνει αυτή η ροή;

2. Υπολογίστε την απόκλιση του πεδίου και τον στροβιλισμό της ροής.

3. Υπολογίστε τον συμμετρικό τανυστή e_{ij} και προσδιορίστε τα σημεία στα οποία η συμμετρική παραμόρφωση είναι μέγιστη και ελάχιστη και τα σημεία στα οποία ο στροβιλισμός είναι μέγιστος και ελάχιστος. Πως είναι τοπικά η κίνηση στα σημεία αυτά; Σχεδιάστε την.

5. *Θ*εωρήστε ότι η σχέση μεταξύ δύο συμμετρικών τανυστών δεύτερης τάξης στις τρείς διαστάσεις Σ και E δίνεται από τη συνεχή συνάρτηση $\Sigma = f(E)$ (γράφουμε εδώ τους τανυστές ως πίνακες). Θεωρούμε τώρα ότι η σχέση μεταξύ αυτών είναι ισοτροπική, δηλαδή αν κάνουμε κάποιο ορθογώνιο μετασχηματισμό S οπότε ο Σ μετασχηματίζεται στον $\tilde{\Sigma} = S\Sigma S^{-1}$ και ο E στον $\tilde{E} = SES^{-1}$ και πάλι η ίδια συνάρτηση f θα συνδέει τους μετασχηματισμένους πίνακες, δηλαδή θα είναι: $\tilde{\Sigma} = f(\tilde{E})$. Δείξτε ότι ο ορθογώνιος μετασχηματισμός που καθιστά τον E διαγώνιο καθιστά συγχρόνως και τον Σ. (Υπόδειξη: θεωρήστε ότι ο E έχει γίνει διαγώνιος και αποδείξτε ότι και ο Σ είναι διαγώνιος, κάνοντας άλλο ένα μετασχηματισμό στροφής περί τον ένα κύριο άξονα του E κατά γωνία π.)

6. Θεωρήστε τη ροή πλησίον μίας επίπεδης ακίνητης στερεάς επιφανείας. Θεωρούμε ότι ακριβώς επί της επιφανείας η ταχύτητα της ροής είναι μηδενική. ´Εστω z η κατεύθυνση η κάθετη στην επιφάνεια και x, y οι συντεταγμένες της επιφανείας.

1. Θεωρήστε ότι η ροή είναι ασυμπίεστη. Ποία η τάση σ_{zz} επί της επιφανείας;

2. Θεωρήστε ότι η ροή είναι συμπιεστή. Ποία τώρα η τάση σ_{zz} επί της επιφανείας; (Υπ. θα βρείτε ότι εξαρτάται από το ρυθμό μεταβολής της πυκνότητας) Εξηγείστε το αποτέλεσμά σας.

7.